

PEP 3 – Übungsblatt 7 – WS 2013/2014

Besprechung am 5./6. Dezember 2013

7.1 de Broglie Wellenlänge (10)

Nach de Broglie kann jedem Objekt eine Materiewelle mit einer charakteristischen Wellenlänge zugeordnet werden. Damit lassen sich quantenmechanische Effekte von Materie wie z. B. Interferenz beschreiben, die in der klassischen Mechanik keine Erklärung finden.

Berechnen Sie die de Broglie Wellenlänge für

- (a) einen Tennisball der Masse $m = 80$ g, der mit einer Geschwindigkeit von 180 km/h aufgeschlagen wird, ein Photon der Wellenlänge 480 nm, ein Elektron, das in einem Elektronenmikroskop durch eine Spannung von $U = 50$ kV beschleunigt wird und ein Proton, das am Large Hadron Collider eine kinetische Energie von 4 TeV erhalten hat. Ist es möglich, Interferenzeffekte für obigen Tennisball zu beobachten?
- (b) Eine moderne Methode, die Struktur kondensierter Materie zu untersuchen, ist die Streuung langsamer Neutronen an einem Probekörper. Welche kinetische Energie müssen Neutronen haben, um typische Abstände von Atomen im Probekörper von 1 nm aufzulösen? Welche Temperatur entspricht dieser kinetischen Energie?

Lösung:

$$(a) \lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}.$$

$$\text{Tennisball: } p = mv = 0.08\text{kg} \cdot 50\text{m/s} = 4\text{Ns}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = 1.66 \cdot 10^{-34} \text{ m.}$$

$$\text{Photon: } \lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{E/c} = \frac{hc}{hf} = \lambda = 480 \text{ nm.}$$

$$\text{Elektron (klassisch): } E = eU$$

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 50000 \text{ V} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}}} = 5.5 \text{ pm.}$$

$$\text{Elektron (relativistisch): } p = \sqrt{E^2 - m^2 c^4} / c, E = mc^2 + eU$$

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{2 \cdot 50\text{keV} \cdot 511\text{keV} + (50\text{keV})^2}} = 5.35 \text{ pm.}$$

$$\text{Proton: relativistischer Impuls } (E \gg m_p c^2): p \approx E/c$$

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{4\text{TeV}/c} = \frac{h}{4 \cdot 10^{12} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J} / 3 \cdot 10^8 \text{ s/m}} = 3.1 \cdot 10^{-19} \text{ m.}$$

$$(b) \lambda_{dB} = 1\text{nm.}$$

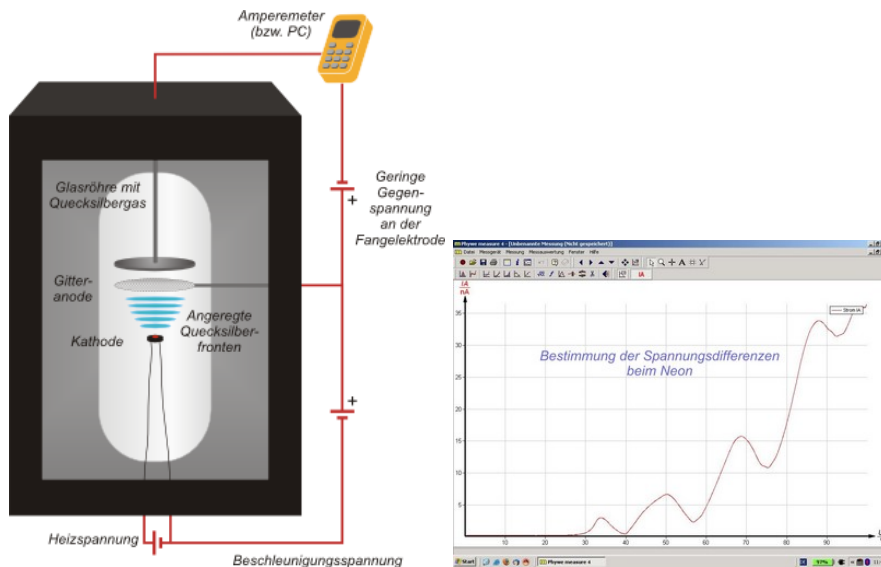
$$v = \frac{p}{m} = \frac{h}{m\lambda_{dB}} = 395.6 \text{ m/s}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = 1.31 \cdot 10^{-22} \text{ J} = 0.818 \text{ meV}$$

$$T = \frac{2}{3} \frac{E}{k} = 6.32 \text{ K}$$

7.2 Franck-Hertz Versuch (10)

Mit Hilfe des Franck-Hertz-Versuches kann gezeigt werden, daß die Abgabe von Energie von Elektronen nur gequantelt erfolgen kann. Dies belegt die Existenz von diskreten Energieniveaus in Atomen. In einer mit Neon gefüllten Röhre befindet sich eine Glühkathode, aus der Elektronen austreten und zur Anode beschleunigt werden. Zwischen der Kathode und Anode befindet zudem noch ein Gitter, mit einer Beschleunigungsspannung von 0-60 V. Da an der Anode eine Gegenspannung von 2 V anliegt, werden die Elektronen abgestoßen und müssen Energie aufbringen, um sich ihr zu nähern. An der Anode ist daraufhin ein Stromfluß zu beobachten. Dieser sogenannte Auffängerstrom wird nun gemessen. Daraus läßt sich ermitteln, wie viele Elektronen genug Energie besaßen, um die Anode zu erreichen. Bei steigender Beschleunigungsspannung zeigen sich mehrere Schichten, bei denen das Gas in der Röhre orangefarben leuchtet. Der Stromverlauf an der Anode in Abhängigkeit der Beschleunigungsspannung ist in der Abbildung unten rechts gezeigt.



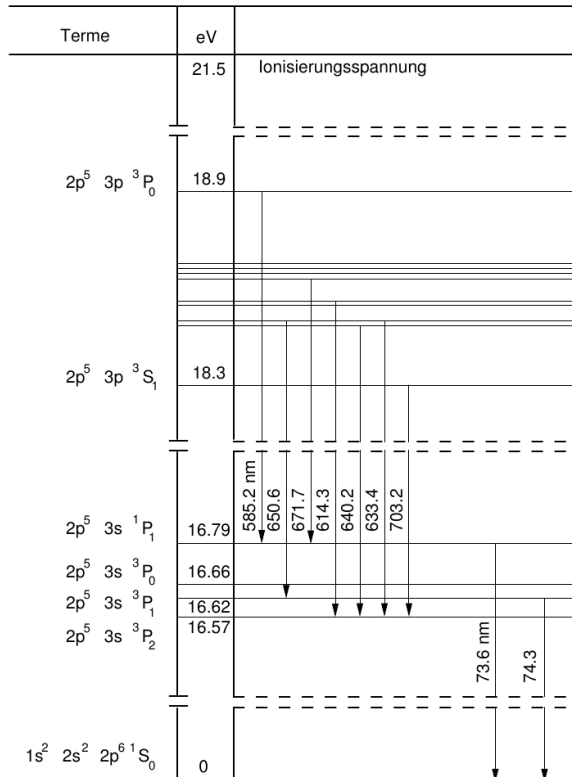
- (a) Was ist die Ursache der Leuchterscheinung und deren Schichtung?
- (b) Deuten Sie den Verlauf des Anodenstroms in Abhängigkeit der Beschleunigungsspannung.

Lösung:

- (a) Die aus der Kathode austretenden Elektronen werden im elektrischen Feld zwischen Kathode und Anodengitter zur Anode hin beschleunigt. Auf ihrem Weg zur Anode treffen sie dabei auf die Atome des Gases. Ist die Geschwindigkeit der Elektronen zu gering, um ein Elektron der Gashülle anzuregen oder zu ionisieren, finden lediglich elastische Stöße statt, bei denen die Elektronen zwar ihre Richtung ändern, aber keine Energie an das Atom abgeben.

Bei weiter steigender Beschleunigungsspannung erreichen die Elektronen die notwendige Energie, bevor sie die Auffängerelektrode erreichen. Bei den nun auftretenden unelastischen Stößen geben sie einen Teil ihrer Energie an das Atom ab, indem sie dort ein Elektron anregen oder ganz aus der Atomhülle ausschlagen (Ionisation). Das stoßende Elektron wird nach dem Stoßerneut beschleunigt, im Atom wird das freigewordene Energieniveau mit einem Elektron aus einem höheren Niveau wiederbesetzt, die Energiedifferenz wird als Photon emittiert, was zu der sichtbaren Leuchterscheinung führt. Bei hinreichend hoher Beschleunigungsspannung kann dieser Prozeß sich gegebenenfalls mehrmals wiederholen bevor das Elektron die Anode erreicht, was zu der Schichtung der Leuchterscheinung führt.

Aus der graphischen Darstellung der Meßwerte kann man entnehmen, daß die von den Elektronen auf die Gasatome übertragene Energie in der Größenordnung von 19 eV liegt. Andererseits ist die Leuchterscheinung mit bloßem Auge zu beobachten, liegt also im Bereich des sichtbaren Lichts (einige wenige eV). Dies läßt darauf schließen, daß das freigewordene Energieniveau nicht direkt besetzt wird, sondern ein Elektron von einem höheren Energieniveau ausgehend in mehreren Schritten bis auf das Zielniveau zurückfällt. Bei jedem Energieübergang wird ein entsprechendes Photon emittiert, von denen mindestens ein Übergang im optischen Bereich liegt.



Obiges Diagramm zeigt ein stark vereinfachtes Energieniveauschema von Neon. Aus dem Diagramm zum Auffängerstrom kann man entnehmen, daß bei einem unelastischen Stoß eine Energie von 19 eV übertragen wird. Dies reicht aus, um ein Elektron aus dem Grundzustand auf einen der oberen freien Anregungszustände zu bringen, es findet jedoch keine Ionisation statt.

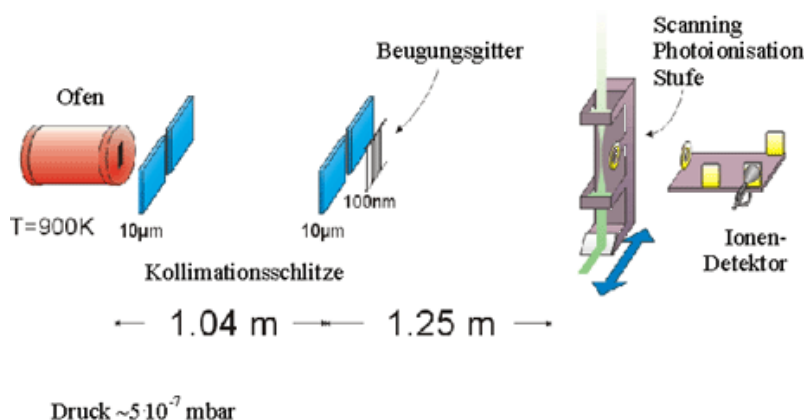
Die Abregung erfolgt nicht in einem einzigen Schritt, sondern beginnt mit einem Übergang auf eines der mittleren Niveaus, wobei die Wellenlänge des emittierten Photons im sichtbaren Bereich liegt (rot bis gelb). Dies führt zu einem orangefarbenen Gesamteindruck der emittierten Lichts. Die weiteren Übergänge liegen im UV Bereich und sind mit dem Auge nicht zu erkennen.

(b) Aus wikipedia, siehe <http://de.wikipedia.org/wiki/Franck-Hertz-Versuch>

Der zu beobachtende Abfall der Stromstärke entspricht einer drastisch kleiner werdenden Zahl von zur Anode durchkommenden Elektronen. Das hängt damit zusammen, daß die Elektronen, sobald sie eine bestimmte Energie besitzen, beim Stoß mit den Atomen des Füllgases kinetische Energie abgeben können. Das getroffene Atom wird bei diesem unelastischen Stoß angeregt, d. h. im Bohr'schen Atommodell nimmt ein Hüllenelektron die abgegebene Energie auf und springt auf ein höheres Energieniveau. Da dieser Zustand instabil ist, fällt es unter Emission eines Lichtquants kurze Zeit später zurück in den Grundzustand. Zunächst steigt der Strom, weil das beschleunigende Feld stärker wird und mehr emittierte Elektronen die Gegenspannung überwinden, die zwischen Gitter und der Auffangplatte besteht. Dabei erfolgen offensichtlich nur elastische Stöße zwischen den Elektronen und den Gasteilchen, d. h. es kann keine Energieübertragung vom Elektron auf das Atom erfolgen. Wenn die Spannung die Elektronen stark genug beschleunigt, führen sie unelastische Stöße mit den Atomen aus und geben dabei Energie ab. Daher sinkt die Zahl der Elektronen mit ausreichender kinetischer Energie, um das abbremende Feld zu berwinden. Der gemessene Strom nimmt somit ab. Er sinkt jedoch nicht wieder bis auf 0 Ampere, weil niemals alle Elektronen mit den Atomen unelastisch zusammenstoßen. Es gibt immer Elektronen, die zwar (kurz vor dem Gitter) die notwendige Energie zur quantenhaften Absorption erreichen, dann allerdings wegen der geringen Weglänge zum Gitter keinen Stoßpartner mehr finden und registriert werden. Beim Erhöhen der Beschleunigungsspannung werden auch die Elektronen, die beim Stoß Energie abgeben, wieder stark genug weiterbeschleunigt, sodaß die Zahl der Elektronen, die die abbremende Spannung überwinden, wieder größer wird, bis die beschleunigende Spannung die Elektronen so stark beschleunigt, daß sie ein zweites Mal die erforderliche Energie an ein Gasteilchen abgeben können. Nun existiert nicht nur eine Zone leuchtenden Gases, es gibt zwei voneinander getrennte Zonen, usw.

7.3 Materiewellen (10)

- (a) Es stellt sich die Frage, ob es eine obere Grenze für das Auftreten von Interferenzeffekten gibt. Betrachten Sie dazu das von Markus Arndt und Kollegen durchgeführte Experiment in der Abbildung unten. Dabei werden C_{60} Moleküle, sogenannte Buckminster Fullerene oder auch Bucky-Balls, in einem Ofen verdampft. Der so erzeugte Atomstrahl wird mittels Blenden kollimiert und auf ein Beugungsgitter mit einem Spaltabstand von 100 nm gerichtet. Das Interferenzmuster hinter dem Gitter wird vermessen, indem man die Atome mit einem fokussierten Laser zunächst ionisiert und die erzeugten Ionen nachweist. Die wahrscheinlichste Geschwindigkeit der Atome im Atomstrahl betrage 220 m/s. Berechnen Sie anhand der Angaben in der Abbildung die resultierende Wellenlänge und den Abstand der Interferenzmaxima erster Ordnung von der Strahlachse am Ort des Detektors.



- (b) Ein Rubidiumatom werde in einer magneto-optischen Falle gekühlt und gespeichert. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Falle ausgeschaltet. Das Atom falle mit der Anfangsgeschwindigkeit $v = 1$ m/s im Gravitationsfeld nach unten. Wie groß ist die anfängliche Wellenlänge der Materiewelle? Nach welcher Zeit hat sie sich halbiert?

Hinweis: Nehmen Sie für die Atommasse von Rubidium $M = 85$ amu an.

Lösung:

- (a) Die im Experiment gemessene wahrscheinlichste Geschwindigkeit ist 220 m/s.

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{60 \cdot 12 \text{ u} \cdot 220 \text{ m/s}} = 2.52 \text{ pm}$$

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{d} \approx \tan \alpha = \frac{x}{D}$$

$$D = 1.25 \text{ m}, d = 100 \text{ nm}$$

$$x = 2.52 \text{ pm} \cdot \frac{1.25 \text{ m}}{100 \text{ nm}} = 31.5 \text{ μm}$$

Originalveröffentlichung: Markus Arndt, Olaf Nairz, Julian Voss-Andreae, Claudia Keller, Gerbrand van der Zouw, Anton Zeilinger: *Wave-particle duality of C_{60} molecules*, *Nature*. 401, Nr. 6754, 1999, S. 680682, doi:10.1038/44348, http://www.atomwave.org/rmparticle/ao_refs/aifm_pdfs_by_group_leaders/arndt_pdfs/ANV99_C60_duality.pdf

$$(b) \quad \lambda(0) = \frac{h}{mv(0)} = 4.7 \text{ nm. Gesucht: } T, \text{ so dass } \lambda(T) = \lambda(0)/2.$$

$$v(T) = \frac{h}{m\lambda(T)} = \frac{h}{m} \frac{2mv}{h} = 2v(0) = 2 \text{ m/s}$$

$$v(T) = v(0) + gT$$

$$T = \frac{v(T) - v(0)}{g} = \frac{v(0)}{g} = \frac{1 \text{ m/s}}{9.81 \text{ m/s}^2} = 102 \text{ ms.}$$