

Nachklausur

Notieren Sie nicht nur Ergebnisse, sondern auch alle Zwischenrechnungen.

Viel Erfolg!

1. Operator $\vec{L} \times \vec{L}$ (7 Punkte)

$\vec{L}$ sei der Drehimpulsoperator in drei Dimensionen.

- Berechnen Sie den Operator $\vec{A} = \vec{L} \times \vec{L} = (A_1, A_2, A_3)$.
- Ist dieser Operator hermitesch?
- Geben Sie die Kommutatoren der Komponenten von $\vec{A}$ an.
- Finden Sie die Eigenwerte von A_1 und geben Sie die zugehörigen Eigenfunktionen an.

2. Dreidimensionaler Harmonischer Oszillator (12 Punkte)

Der Hamiltonoperator des dreidimensionalen harmonischen Oszillators

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \vec{X}^2$$

hat in Ortsdarstellung und in Einheiten, in denen die charakteristische Länge und $\hbar\omega = 1$ gesetzt werden, die Form

$$H = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + x_1^2 \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + x_2^2 \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + x_3^2 \right)$$

- Geben Sie Operatoren a_1, a_2, a_3 an, sodass $[a_k, a_k^+] = 1$ für $k \in \{1, 2, 3\}$ ist und

$$H = a_1^+ a_1 + a_2^+ a_2 + a_3^+ a_3 + K$$

ist. Wie groß ist die Konstante K ?

- Berechnen Sie die Kommutatoren $[a_k, a_l]$ und $[a_k, a_l^+]$ für $k \neq l$.
- Geben Sie die Eigenwerte von H und ihre Vielfachheiten an.
- Ist die Wellenfunktion

$$\psi(\vec{x}) = N (x_1 - ix_2) e^{-\frac{1}{2} \vec{x}^2}, \quad N \text{ konstant}$$

ein Eigenvektor von H ? Wenn ja, zu welchem Eigenwert? Ist sie auch ein Eigenvektor der dritten Komponente des Drehimpulses L_3 ? Wenn ja, zu welchem Eigenwert?

- Führen Sie für die Wellenfunktion

$$\psi(\vec{x}) = N (2x_1^2 - 1) e^{-\frac{1}{2} \vec{x}^2}, \quad N \text{ konstant}$$

dieselben Untersuchungen wie in Aufgabenteil d) durch.

3. Wahrscheinlichkeitsverteilung in einer Dimension

(5 Punkte)

Die Wellenfunktion eines Teilchens in einer Dimension sei gegeben durch

$$\psi(x, t) = N \left[e^{-i\frac{1}{2}\omega t} + \sqrt{2} \frac{x}{b} e^{-i\frac{3}{2}\omega t} \right] e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{b}\right)^2}$$

(N , ω , b sind Konstanten.)

- Wie ist die Konstante N zu wählen, damit die Wahrscheinlichkeitsverteilung normiert ist?
- Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle x \rangle_t$ und die mittlere quadratische Schwankung $(\Delta x)_t^2$ des Teilchenortes.

Hilfsformel: $\int_{-\infty}^{\infty} ds s^{2n} e^{-s^2} = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{n! 2^{2n}}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$

4. Matrixdarstellung und Übergangswahrscheinlichkeit

(11 Punkte)

Der Hilbertraum $\mathcal{H}$ habe die Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle\}$. Der selbstadjungierte Hamilton-Operator H wirkt wie folgt:

$$H|\psi_1\rangle = |\psi_1\rangle - 2i|\psi_2\rangle$$

$$H|\psi_3\rangle = 4|\psi_2\rangle + |\psi_3\rangle$$

Außerdem gilt

$$\langle \psi_2 | H | \psi_2 \rangle = 2$$

- Geben Sie die Matrixdarstellung von H bezüglich der ONB $\mathcal{B}$ an.
- Finden Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von H .
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, zur Zeit $t > 0$ den Zustand $|\psi_3\rangle$ zu finden, wenn der Zustand zur Zeit $t = 0$ gleich $|\psi_1\rangle$ war?