

**Klausur zur Vorlesung Analysis II, SS2009,
Donnerstag, 30.7.2009 (Version C)**

Willkommen zur Klausur! Bitte füllen Sie die folgenden Angaben auf diesem und auf dem 2. Deckblatt in **sehr leserlicher** Schrift aus!

Name: _____ **Matrikelnr.:** _____

Studienfach: _____ **Studiengang:** _____ **Semesterzahl:** _____

Die Klausur besteht aus 4 Teilen (Vokabelbuch, Wahr-oder-Falsch, Rechnen, Beweisen). In jedem Teil können Sie maximal 12 Punkte bekommen. Sie haben diese Klausur bestanden, wenn Sie mindestens 18 der möglichen Punkte erreicht haben. Die Klausur dauert 180 Minuten. Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

VIEL ERFOLG!

Ergebnisliste

Vokabelbuch:

1(1)	1(2)	1 (3)	2(1)	2(2)	2(3)	3(1)	3(2)	3(3)	3(4)	4(1)	4(2)	Σ

Wahr/Falsch-Aufgaben:

1	2	3	4	Σ

Rechnen:

1(a)	1(b)	1(c)	2	3	4	5(a)	5(b)	6(a)	6(b)	7(a)	7(b)	Σ

Beweisen:

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Σ

Gesamt	Note

Notenspiegel

Punktzahl	0–8	9–17	18–20	21–22	23–25	26–28	29–30	31–33	34–36	37– 38	39–41	42–48
Note	6,0	5,0	4,0	3,7	3,3	3,0	2,7	2,3	2,0	1,7	1,3	1,0

**Klausur zur Vorlesung Analysis II, SS2009,
Donnerstag, 30.7.2009 (2. Deckblatt)**

Name:

Matrikelnr.:

Studienfach:

Studiengang:

Semesterzahl:

Ergebnisliste

Vokabelbuch:

1(1)	1(2)	1 (3)	2(1)	2(2)	2(3)	3(1)	3(2)	3(3)	3(4)	4(1)	4(2)	Σ

Wahr/Falsch-Aufgaben:

1	2	3	4	Σ

Rechnen:

1(a)	1(b)	1(c)	2	3	4	5(a)	5(b)	6(a)	6(b)	7(a)	7(b)	Σ

Beweisen:

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Aufgabe 4	Σ

Gesamt	Note

Notenspiegel

Punktzahl	0–8	9–17	18–20	21–22	23–25	26–28	29–30	31–33	34–36	37– 38	39–41	42–48
Note	6,0	5,0	4,0	3,7	3,3	3,0	2,7	2,3	2,0	1,7	1,3	1,0

Vokabelbuch

In diesem Teil soll getestet werden, inwieweit Sie in der Lage sind, wichtige Definitionen aus der Vorlesung korrekt zu formulieren. Für jede richtig gelöste Teilaufgabe bekommen Sie einen Punkt. Sie können also in diesem Teil insgesamt 12 Punkte erwerben.

Aufgabe 1. Zur Integralrechnung und zu Taylorreihen.

(1) Formulieren Sie den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung!

(2) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wann existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x) dx$ und wie ist dieses dann definiert?

(3) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar. Geben Sie die Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt 0 an!

Aufgabe 2. Zu metrischen Räumen.

- (1) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wann heißt eine Teilmenge $W \subseteq X$ offen? Wann heißt eine Teilmenge abgeschlossen?

- (2) Sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Wann heißt eine Abbildung $\| \cdot \| : V \rightarrow [0, \infty)$ Norm auf V ? Wie ist dann die zu $\| \cdot \|$ gehörende Metrik auf V definiert?

- (3) Formulieren Sie den Satz von Heine-Borel!

Aufgabe 3. Zu differenzierbaren Funktionen.

- (1) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wann heißt eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ (total) differenzierbar im Punkt $x_0 \in U$?
- (2) Wie sind die partiellen Ableitungen von $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ im Punkt x_0 definiert? Geben Sie eine Formel für die Jacobi-Matrix von f im Punkt x_0 an!
- (3) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und seien $f : U \rightarrow V$ und $g : V \rightarrow \mathbb{R}^l$ Funktionen. Formulieren Sie die Kettenregel für $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^l$ im Punkt $x_0 \in U$.

- (4) Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar. Geben Sie eine Formel für das zweite Taylorpolynom von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Aufgabe 4. Zum Satz über implizite Funktionen und zum Umkehrsatz.

- (1) Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \rightarrow V$ eine stetig differenzierbare Funktion. Unter welchen Voraussetzungen besitzt $f : U \rightarrow V$ eine stetig differenzierbare Umkehrabbildung $f^{-1} : V \rightarrow U$? Geben Sie in diesem Fall eine Formel für $Df^{-1}(f(x))$ in Abhängigkeit von $Df(x)$ für $x \in U$ an!
- (2) Sei $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Funktion und sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar mit $F(x, f(x)) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Geben Sie mit Hilfe der Ableitung von F (unter einer geeigneten zusätzlichen Voraussetzung an die Ableitung von F , die Sie hier auch angeben sollen) eine Formel für die Ableitung $Df(x)$ von f an einer beliebigen Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ an.

Wahr/Falsch-Aufgaben

Für jede der folgenden Aussagen sollen Sie entscheiden, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Kreuzen Sie eine Aussage an, wenn Sie der Meinung sind, dass diese wahr ist. Wenn Sie in einer Aufgabe alles richtig angekreuzt haben, bekommen Sie für diese Aufgabe 3 Punkte. Bei einer Abweichung erhalten Sie für die Aufgabe noch einen Punkt. Bei mindestens zwei Abweichungen gibt es keinen Punkt. Sie können in diesem Teil maximal 12 Punkte erreichen.

Antworten Sie erst, wenn Sie ganz sicher sind, eine Aussage mit allen gegebenen Voraussetzungen richtig verstanden zu haben!

Aufgabe 1. Sei $\mathbb{R}^3$ versehen mit einer Norm und seien M_1, M_2 die Mengen

$$M_1 = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : x^2 = y^2 + z^2\} \quad \text{und} \quad M_2 = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : x^2 < y^2 + z^2\}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr:

- ☐ M_1 und M_2 sind beide abgeschlossen.
- ☐ M_1 ist kompakt.
- ☐ M_1 ist abgeschlossen und M_2 ist nicht kompakt.

Aufgabe 2. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $K \subseteq X$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr:

- ☐ Ist K kompakt, so ist K abgeschlossen und beschränkt.
- ☐ Ist K kompakt, so besitzt jede Folge in K eine in K konvergente Teilfolge.
- ☐ Ist Y metrischer Raum und ist $f : Y \rightarrow X$ stetig, so ist auch $f^{-1}(K) \subseteq Y$ kompakt.

Aufgabe 3. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind wahr:

- ☐ Ist f stetig partiell differenzierbar, so ist f total differenzierbar.
- ☐ Ist f partiell differenzierbar, so ist f stetig.
- ☐ Ist f total differenzierbar, so existieren alle Richtungsableitungen von f .

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $f((x, y, z)^t) = ye^{x^2+z^2}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr:

- ☐ Die Menge $M = f^{-1}(\{0\})$ ist eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.
- ☐ f besitzt keine lokalen Maxima und Minima.
- ☐ f besitzt im Punkt $(1, 0, 0)^t$ ein lokales Maximum oder Minimum unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Rechnen

In den folgenden Aufgaben soll getestet werden, inwieweit Sie die in der Vorlesung besprochenen Rechenverfahren beherrschen. Für jede richtig gelöste Teilaufgabe erhalten Sie einen Punkt. Sie können in diesem Teil also insgesamt 12 Punkte erwerben. Maßgeblich für die Bewertung ist das Endergebnis, aber Sie können auch die wichtigsten Zwischenschritte angeben (was bei fehlerhaftem Endergebnis berücksichtigt werden könnte).

Aufgabe 1. (a) Berechnen Sie eine Stammfunktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Funktion $f(x) = x \cdot \cosh(x)$.

(b) Berechnen Sie das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$.

(c) Berechnen Sie die Länge $L(\alpha)$ des Weges $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2; \alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cosh(t) \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Taylorreihe der Funktion $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

Aufgabe 3. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = \int_0^{\sin(x)} e^{x-y^2} dy$.

Aufgabe 4. Berechnen Sie den Abstand der Punkte $(1, 2, 3)^t$ und $(3, 2, 1)^t$ bezüglich der Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$.

Aufgabe 5. Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Funktion $f((x, y, z)^t) = \begin{pmatrix} x \sin(y + z) \\ \cos(x^2 + y^2 + z^2) \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Ableitung von $Df((x, y, z)^t)$ in jedem beliebigen Punkt $(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3$.

(b) Berechnen Sie in jedem Punkt $(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3$ die Richtungsableitung $D_v f((x, y, z)^t)$ von f in Richtung des Vektors $v = (0, 1, 1)^t \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 6. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $f((x, y)^t) = e^{x^2 - 2x + y^2}$.

(a) Berechnen Sie das zweite Taylorpolynom $T_f((x, y)^t)$ von f mit Entwicklungspunkt $(0, 0)^t$.

(b) Berechnen Sie alle lokalen Maxima und Minima von f , dh. berechnen Sie die Stellen an denen diese vorliegen und geben Sie die entsprechenden Funktionswerte an!

Aufgabe 7. Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $f((x, y, z)^t) = 3x^2 - 4y + 2z$.

(a) Sei $M = f^{-1}(\{0\})$. Berechnen Sie eine Basis $\{v_1, v_2\}$ des Tangentialraums $T_{(0,0,0)^t}M$.

(b) Berechnen Sie alle lokalen und globalen Maxima und Minima von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ (d.h. auf der Mannigfaltigkeit $\tilde{M} = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$). Berechnen Sie dazu die Stellen, an denen diese vorliegen, und geben Sie die entsprechenden Funktionswerte an!

Beweisen

In diesem Abschnitt sollen Sie einige Aussagen beweisen. Sie dürfen dazu alle Resultate der Vorlesung benutzen. Für jede richtig gelöste Aufgabe erhalten Sie 3 Punkte. Sie können also in diesem Bereich insgesamt 12 Punkte erreichen.

Aufgabe 1. Beweisen Sie, dass das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3} dx$ konvergiert.

Beweis:

Aufgabe 2. Beweisen Sie: **(a)** Ist $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge der Cauchyfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im metrischen Raum (X, d) mit $x_{n_k} \rightarrow x$ für ein $x \in X$, so gilt auch $x_n \rightarrow x$.

(b) Zeigen Sie nun: Jeder kompakte metrische Raum (X, d) ist vollständig.

Beweis:

Aufgabe 3. Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix mit $c := \|A\|_{op} < 1$ und sei $v_0 \in \mathbb{R}^n$ fest. Dann besitzt die affine Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n; f(x) = Ax + v_0$ einen Fixpunkt.

Beweis:

Aufgabe 4. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Beweisen Sie: Für jedes $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ existiert die Richtungsableitung $D_v f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ von f im Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, aber f ist im Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht total differenzierbar.

Beweis: