

2. Klausur zur Analysis 2 - Lösungen

Aufgabe 1:

(14 Punkte)

	wahr	falsch
Sei X ein kompakter metrischer Raum, sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Dann besitzt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen Grenzwert in X . <i>Diese Aussage ist falsch.</i> Zum Beispiel ist das Intervall $[-1, 1]$ kompakt, aber die Folge $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt keinen Grenzwert.	☐	☒
Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ist der normierte $\mathbb{R}$ -Vektorraum $(\mathcal{T}([a, b]), \ \cdot\ _{[a, b]})$ der Treppenfunktionen auf $[a, b]$ ein Banachraum. <i>Diese Aussage ist falsch.</i> Aus Analysis 1 ist bekannt, dass jede stetige Funktion auf $[a, b]$ bezüglich $\ \cdot\ _{[a, b]}$ ein Limes von Elementen aus $\mathcal{T}([a, b])$ ist, aber z.B. liegt die stetige Funktion $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ nicht in $\mathcal{T}([a, b])$.	☐	☒
Sei X ein zusammenhängender topologischer Raum, sei $Y \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Dann ist auch Y zusammenhängend. <i>Diese Aussage ist falsch.</i> Zum Beispiel ist $\mathbb{R}$ zusammenhängend, die abgeschlossene Teilmenge $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ aber nicht.	☐	☒
Sei X ein beschränkter metrischer Raum, sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f Lipschitz-stetig. <i>Diese Aussage ist falsch.</i> So ist z.B. das Intervall $(0, 1)$ beschränkt, die stetige Funktion $(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{-1}$ ist aber nicht Lipschitz-stetig.	☐	☒
Sei $f: V \rightarrow V'$ eine differenzierbare Abbildung von normierten $\mathbb{R}$ -Vektorräumen. Dann ist $Df: V \rightarrow \mathcal{L}(V, V')$ eine lineare Abbildung. <i>Diese Aussage ist falsch.</i> Ein Gegenbeispiel: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ ist differenzierbar, aber $Df: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x^2$ ist nicht linear.	☐	☒
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine m -dimensionale Untermannigfaltigkeit, und gelte $m < n$. Dann ist M abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$. <i>Diese Aussage ist falsch.</i> Zum Beispiel ist $(-1, 1) \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit, aber nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$.	☐	☒
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sei $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, und sei $\tilde{x} \in U$. Ist $\text{Hess } f(\tilde{x})$ positiv definit, so hat f in $\tilde{x}$ ein striktes lokales Minimum. <i>Diese Aussage ist falsch.</i> Betrachte z.B. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Es gilt $\text{Hess } f(1) = f''(1) = 2 > 0$, aber f hat in 1 kein lokales Minimum (es gilt $f'(1) = 2 \neq 0$).	☐	☒

Aufgabe 2:

(6+10* Punkte)

Sei X eine Menge, und seien $d': X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ und $d'': X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Metriken auf X . Definiere:

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad d(x, y) := \max(d'(x, y), d''(x, y))$$

(a) Zeige, dass d eine Metrik auf X ist.

(b)* Seien $\mathcal{T}$ bzw. $\mathcal{T}', \mathcal{T}''$ die jeweils von d bzw. d', d'' auf X induzierten Topologien. Zeige: Es gilt $\mathcal{T}' \cap \mathcal{T}'' \subseteq \mathcal{T}$, mit Gleichheit genau dann, wenn $\mathcal{T}' = \mathcal{T}''$.

Lösung:

(a) Wir prüfen die drei Axiome einer Metrik:

(i) z.z.: $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Sei $x = y$, dann gilt $d'(x, y) = 0 = d''(x, y)$ (denn d' und d'' sind Metriken), also auch $d(x, y) = 0$. Sei umgekehrt $0 = d(x, y) = \max(d'(x, y), d''(x, y))$. Dann gilt $d'(x, y) = 0$ und $d''(x, y) = 0$, aufgrund der Metrikaxiome für d' bzw. d'' folgt $x = y$.

(ii) z.z.: $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$.

Dies folgt aus der Definition und dem entsprechenden Axiom für d' und d'' :

$$d(x, y) = \max(d'(x, y), d''(x, y)) = \max(d'(y, x), d''(y, x)) = d(y, x)$$

(iii) z.z.: $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Es gilt die entsprechende Ungleichung für d' und d'' , daher folgt:

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \max(d'(x, z), d''(x, z)) \leq \max(d'(x, y) + d'(y, z), d''(x, y) + d''(y, z)) \\ &\leq \max(d'(x, y), d''(x, y)) + \max(d'(y, z), d''(y, z)) = d(x, y) + d(y, z) \end{aligned}$$

□

(b)* Für eine Metrik $\tilde{d}$ auf X , $x \in X$ und $\epsilon > 0$ bezeichne $B_{\epsilon}^{\tilde{d}}(x)$ den Ball mit Radius ϵ um x bezüglich $\tilde{d}$. Mit dieser Notation gilt für alle $x \in X$ und $\epsilon > 0$:

$$B_{\epsilon}^d(x) = B_{\epsilon}^{d'}(x) \cap B_{\epsilon}^{d''}(x)$$

Wir zeigen nun zunächst, dass $\mathcal{T}' \cap \mathcal{T}'' \subseteq \mathcal{T}$:

Sei $U \in \mathcal{T}' \cap \mathcal{T}''$, sei $x \in U$. Per Definition der von einer Metrik induzierten Topologie existieren dann $\epsilon', \epsilon'' > 0$, so dass $B_{\epsilon'}^{d'}(x) \subseteq U$ und $B_{\epsilon''}^{d''}(x) \subseteq U$. Sei $\epsilon := \min(\epsilon', \epsilon'')$, dann gilt $B_{\epsilon}^d(x) \subseteq U$. Also ist $U \in \mathcal{T}$.

Aus dem bisher Gezeigten geht hervor, dass $\mathcal{T}' \cap \mathcal{T}'' = \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}' \cap \mathcal{T}''$. Nun gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}' \cap \mathcal{T}'' &\iff \forall x \in X, \epsilon > 0 : B_{\epsilon}^d(x) \in \mathcal{T}' \wedge B_{\epsilon}^d(x) \in \mathcal{T}'' \\ &\iff \forall x \in X, \epsilon > 0 \exists \delta', \delta'' > 0 : B_{\delta'}^{d'}(x) \subseteq B_{\epsilon}^d(x) \wedge B_{\delta''}^{d''}(x) \subseteq B_{\epsilon}^d(x) \\ [B_{\epsilon}^d(x) = B_{\epsilon}^{d'}(x) \cap B_{\epsilon}^{d''}(x)] &\iff \forall x \in X, \epsilon > 0 \exists \delta', \delta'' > 0 : B_{\delta'}^{d'}(x) \subseteq B_{\epsilon}^{d'}(x) \wedge B_{\delta''}^{d''}(x) \subseteq B_{\epsilon}^{d''}(x) \\ &\iff \mathcal{T}' = \mathcal{T}'' \end{aligned}$$

□

Aufgabe 3:

(5+7 Punkte)

Betrachte die folgende Funktion:

$$f: [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \sin(x)(\cos(xy) + 1)^2$$

(a) Zeige, dass f ein globales Maximum und ein globales Minimum besitzt.

(b) Zeige: Es existiert ein $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ mit $f(\tilde{x}, \tilde{y}) = \pi$.

Lösung: Sei $X := [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$. Offenbar ist $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

(a) Da $[-\pi, \pi]$ kompakt ist, gilt dies (nach dem Satz von Tychonoff) auch für X . Laut Vorlesung nimmt f also auf X Maximum und Minimum an.

(b) Da $[-\pi, \pi]$ zusammenhängend ist, gilt dies auch für X . Daher ist auch $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend, also ein Intervall in $\mathbb{R}$. Nun gilt $f(0, 0) = 0$ und $f(\frac{\pi}{2}, 0) = 4$, sowie $\pi \in [0, 4]$, also ist $\pi \in f(X)$.

Aufgabe 4:

(6 Punkte)

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Sei $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, so dass $|f(x)| \leq \|x\|^2$ für alle $x \in V$.

Zeige, dass f in 0 differenzierbar ist, und bestimme $Df(0)$.

Lösung: Sei $A: V \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$ die Nullfunktion, sie ist offenbar linear und stetig. Wir behaupten, dass $Df(0) = A$ gilt.

Nach Voraussetzung ist $|f(0)| \leq \|0\|^2 = 0$, also ist $f(0) = 0$. Nun gilt für alle $x \neq 0$:

$$\frac{|f(x) - f(0) - Ax|}{\|x\|} = \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \frac{\|x\|^2}{\|x\|} = \|x\|$$

Es folgt $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{f(x) - f(0) - Ax}{\|x\|} = 0$, q.e.d.

Aufgabe 5:

(6+6 Punkte)

Prüfe die folgenden Mengen auf Offenheit und auf Abgeschlossenheit:

(a) $\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \mathbb{R}$

(b) $(-1, 1) \times [2, 5] \subseteq \mathbb{R}^2$

Lösung:

(a) Sei $A := \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$. Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n := \frac{1}{2^n}$ konvergiert gegen $x_\infty := 0$ und es gilt $A = \{x_n \mid n \in \overline{\mathbb{N}}\}$. Nach Beispiel (14.15.) der Vorlesung ist A kompakt, also abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

Da $\emptyset \neq A \neq \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$ zusammenhängend ist, ist A nicht offen in $\mathbb{R}$.

(b) Sei $B := (-1, 1) \times [2, 5]$. Betrachte die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, 2)$, sie ist offenbar stetig. Nun ist $f^{-1}(B) = (-1, 1)$ nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$, aufgrund der Stetigkeit von f kann also B nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$ sein.

Betrachte nun analog die stetige Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (0, x)$. Das Urbild $g^{-1}(B) = [2, 5]$ ist nicht offen in $\mathbb{R}$, also ist B nicht offen in $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 6:

(5+7 Punkte)

Betrachte die folgende Funktion:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 + \cos(x^2 - y)$$

(a) Zeige, dass $\{(0, k \cdot \pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ die Menge der kritischen Punkte von f ist.

(b) Bestimme alle lokalen Maxima und alle lokalen Minima von f .

Lösung:

(a) f ist offenbar unendlich oft stetig differenzierbar. Für den Gradienten von f gilt:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 2x \sin(x^2 - y) \\ \sin(x^2 - y) \end{pmatrix}$$

Die Menge der kritischen Punkte von f ist die Menge der $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die $\nabla f(x, y) = 0$. Die zweite Gleichung dieser Bedingung lautet $\sin(x^2 - y) = 0$, Einsetzen in die erste Gleichung liefert $x = 0$, und a posteriori $\sin(y) = 0$.

Also ist $\{(0, y) \mid \sin(y) = 0\} = \{(0, k \cdot \pi) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ die Menge der kritischen Punkte von f .

(b) Es gilt:

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - 2 \sin(x^2 - y) - 4x^2 \cos(x^2 - y) & 2x \cos(x^2 - y) \\ 2x \cos(x^2 - y) & -\cos(x^2 - y) \end{pmatrix}$$

Also ist $\text{Hess } f(0, k \cdot \pi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\cos(k \cdot \pi) \end{pmatrix}$. Für gerade k ist diese Matrix indefinit, für ungerade k ist sie positiv definit. Somit besitzt f keine lokalen Maxima, und lokale Minima an den Stellen $(0, (2k+1) \cdot \pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 7:

(10 Punkte)

Zeige, dass sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x^4 + y^2 - z &= 0 \\ x^2 - 2xy - z &= 2 \end{aligned}$$

lokal um den Punkt $p = (-1, 2, 3)$ nach x und y auflösen lässt, und bestimme die Ableitung der implizit gegebenen Funktionen $x(z)$ und $y(z)$ an der Stelle 3.

Lösung: Definiere $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = (-x^4 + y^2 - z, x^2 - 2xy - z - 2)$. f ist $\mathcal{C}^\infty$ mit

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -4x^3 & 2y & -1 \\ 2x - 2y & -2x & -1 \end{pmatrix} \quad (2P.)$$

und es gilt $f(-1, 2, 3) = 0$. Nun ist

$$J_f(-1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 \\ -6 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da $\det \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = 8 + 24 = 32 \neq 0$, existieren also laut Vorlesung eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(-1, 2)$, ein offenes Intervall $I = (3 - \epsilon, 3 + \epsilon) \subseteq \mathbb{R}$ um 3, und eine $\mathcal{C}^\infty$ -Funktion $\gamma: I \rightarrow U$ mit $\gamma(3) = (-1, 2)$, so dass für $(x, y, z) \in U \times V$ gilt:

$$f(x, y, z) = 0 \iff (x, y) = \gamma(z) = (\gamma_1(z), \gamma_2(z))$$

Dabei gilt für die Ableitung von γ :

$$D\gamma(3) = - \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Somit sind $\gamma'_1(3) = -\frac{1}{16}$ und $\gamma'_2(3) = \frac{5}{16}$ die gesuchten Ableitungen.

Aufgabe 8:

(4+4+7* Punkte)

Für $a \in \mathbb{R}$ betrachte die Menge

$$M_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = a\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

(a) Zeige, dass M_a für alle $a \neq 0$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Bestimme für alle $a \neq 0$ eine Basis des Tangentialraums an M_a im Punkt $p_a := (\frac{1}{4} + a, \frac{1}{4} - a)$.

(c)* Zeige, dass M_0 keine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist.

Lösung:

(a) Sei $f_a: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x, y) = x^2 - y^2 - a$, dann gilt $M_a = f_a^{-1}(\{0\})$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Sei nun $a \neq 0$. Dann ist $(0, 0) \notin M_a$, also ist $J_{f_a}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ für alle $(x, y) \in M_a$. Also ist f_a eine Submersion in allen $(x, y) \in M_a$, und folglich ist M_a eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit.

(b) Sei $a \neq 0$. Laut Vorlesung ist $T_{p_a}M$ eindimensional, genauer gilt $T_{p_a}M_a = \ker Df_a(p_a)$. Nun ist $J_{f_a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 2a & -\frac{1}{2} + 2a \end{pmatrix}$. Also ist der Vektor $(\frac{1}{2} - 2a, \frac{1}{2} + 2a)$ ein Erzeuger von $T_{p_a}M_a$.

(c)* Angenommen, M_0 ist eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$. Da M_0 weder diskret noch offen in $\mathbb{R}^2$ ist, muss M_0 dann eindimensional sein.

Nun ist $(0, 0) \in M_0$, und durch $\gamma_1: (-1, 1) \rightarrow M_0 \subseteq \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, t)$ und $\gamma_2: (-1, 1) \rightarrow M_0 \subseteq \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, -t)$ sind differenzierbare Kurven mit $\gamma_1(0) = (0, 0) = \gamma_2(0)$ gegeben. Also sind $\gamma_1'(0) = (1, 1)$ und $\gamma_2'(0) = (1, -1)$ Elemente von $T_{(0,0)}M_0$, daher ist $T_{(0,0)}M_0$ zweidimensional. Widerspruch.

Aufgabe 9:

(6 Punkte)

Sei ω die 1-Form auf $\mathbb{R}^2$ gegeben durch $\omega(x, y) = x \exp(y) dx + \exp(x^2) dy$.

Bestimme das Integral $\int_{\gamma} \omega$ bezüglich des Weges $\gamma: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, t^2)$.

Lösung: Es gilt $\dot{\gamma}(t) = (1, 2t)$ für alle $t \in [0, 2]$. Also ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &\stackrel{\text{Def.}}{=} \int_0^2 \omega(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t)) dt = \int_0^2 t \exp(t^2) \cdot 1 + \exp(t^2) \cdot 2t dt \\ &= \int_0^2 3t \exp(t^2) dt = \frac{3}{2} \int_0^2 2t \exp(t^2) dt \\ &\stackrel{\text{Subst.}}{=} \frac{3}{2} \int_0^4 \exp(s) ds = \frac{3}{2}(e^4 - 1). \end{aligned}$$