

Nachfolgend findet Ihr einige Aufgaben, von denen ich denke, dass diese so oder so ähnlich auch in der Klausur gestellt werden könnten. Die Aufgaben variieren in Schwierigkeit und Anwendungsgebiet. Es ist selbsterklärend, dass ein erfolgreiches Lösen dieser Aufgaben keine Garantie ist, dass man eine gute Note in der Klausur erreichen wird. Genauso selbsterklärend ist aber auch, dass man besser im Umgang mit Aufgaben wird, je mehr Übungsaufgaben man rechnet.

1. Grundbegriffe der Topologie

Aufgabe 1.1

Betrachte die Menge $X := \{1, 2, 3\}$. Welche der folgenden Kollektionen definieren Topologien auf X ? Begründe Deine Antwort!

- a) $\mathcal{T}_1 := \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \}$,
- b) $\mathcal{T}_2 := \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$,
- c) $\mathcal{T}_3 := \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$,
- d) $\mathcal{T}_4 := \{\emptyset, X, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}bigr\}$.

Aufgabe 1.2 Welche der folgenden Kollektionen definieren Topologien auf der reellen Zahlen $\mathbb{R}$? Begründe Deine Antwort!

- a) $\mathcal{T}_1 := \{[a, \infty) \mid a \in \mathbb{Z}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$,
- b) $\mathcal{T}_2 := \{[a, \infty) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 1.3 (Stetigkeit)

- a) Sei X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge. Beweise, dass die Inklusionsabbildung $i : A \rightarrow X$, $x \mapsto x$ stetig ist, wobei A mit der Unterraumtopologie versehen ist.
- b) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Beweise, dass die Abstandsfunktion $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist. (*Hinweis:* Beweise und benutze dazu die sog. Vierecksungleichung

$$|d(a, b) - d(c, d)| \leq d(a, c) + d(b, d) \quad \forall a, b, c, d \in X.$$

Eine Fallunterscheidung $d(a, b) \geq d(c, d)$ bzw. $d(c, d) > d(a, b)$ könnte dabei von Nutzen sein.)

2. Differentiation in mehreren Veränderlichen

Aufgabe 2.1 (Differenzierbarkeit)

Betrachte folgende Abbildung:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0), \\ \frac{y^3}{x^2 + y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Beweise:

- a) f ist stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$.
- b) Die partiellen Ableitungen von f in jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ existieren.
- c) f ist im Punkt $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ nicht differenzierbar.

Aufgabe 2.2 (Jacobimatrizen)

Man berechne die Jacobimatrizen von

- a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t, s) := F(e^{ts}, t^2 + s)$, wobei $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) := x^2 + y^2 - xy$,
- b) $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g(x, y) := (xy, \ln(1 + x^2 + y^2), \sin(yz))$ und
- c) $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $h(x, y, z) := (x \sin y \cos z, x \sin y \sin z, x \cos y)$

und gebe bitte alle Ableitungsregeln an, die verwendet werden.

Aufgabe 2.3

Man entscheide (mit Beweis), ob es eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ geben kann, sodass $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x(y^2 - x^2)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y(y^2 - x^2)$ in jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Aufgabe 2.4 (Lokale Extrema und Sattelpunkte) Man klassifiziere die kritischen Punkte der Funktion

$$f_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^3 - y^3 + 3\alpha xy$$

nach Maxima, Minima und Sattelpunkten in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Satz über Implizite Funktionen

Aufgabe 3.1 Man zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - u^2 - v &= 0, \\ x^2 + 2y^2 + 3u^2 + 4v^2 &= 1 \end{aligned}$$

in der Nähe von $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1/2, 0, 1/2, 0)$ nach (u, v) aufgelöst werden kann.

Aufgabe 3.2 Sei $R > \rho > 0$ und

$$F(x, y, z) := (x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - \rho^2)^2 + 4R^2(z^2 - \rho^2).$$

Beweise, dass für jedes $(x_0, y_0, z_0) \in T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$ mit $z_0 \neq 0$ offene Umgebungen $(x_0, y_0, z_0) \in V \subset \mathbb{R}^3$ und $(x_0, y_0) \in U \subset \mathbb{R}^2$ existieren, sodass

$$T \cap V = \text{graph}(f),$$

wobei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion ist.

4. Untermannigfaltigkeiten und Extrema unter Nebenbedingungen

Aufgabe 4.1 (Elliptischer Zylinder)

Seien $a, b \in (0, \infty)$. Entscheide mit Beweis, ob die Menge

$$M_{a,b} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$

eine C^∞ -Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. Falls ja, was ist die Dimension von $M_{a,b}$?

Aufgabe 4.2 (Kompakte Mannigfaltigkeiten und lokale Karten)

Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}^n$ eine k -dimensionale kompakte C^1 -Untermannigfaltigkeit. Beweise, dass M nicht nur eine lokale Karte haben kann, d.h. dass $M \neq \text{Im } \phi$ für eine injektive Immersion $\phi : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $T \subset \mathbb{R}^k$ offen.

Aufgabe 4.3 (Extrema)

Bestimme Supremum und Infimum der glatten Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2 - y^2$$

auf der Menge $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 100\}$.

Aufgabe 4.4 (Lagrange-Multiplikatoren)

Sei $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein C^1 -Vektorfeld mit $\text{rot} V = 0$. Beweise, dass es dann eine Konstante $\mu \in \mathbb{R}$ sowie einen Punkt $(x, y, z) \in S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ gibt, sodass

$$V(x, y, z) = \mu \cdot (x, y, z).$$

5. Differentialformen und Kurvenintegrale

Aufgabe 5.1

Sei eine 1-Form ω auf dem $\mathbb{R}^3$ definiert durch $\omega(x, y, z) := \sin(yz)dx + xz \cos(yz)dy + xy \cos(yz)dz$.

a) Zeige, dass ω geschlossen ist.

- b) Nach dem Poincaré-Lemma gibt es dann eine Stammfunktion von ω , d.h. eine C^1 -Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $df = \omega$. Geben Sie eine solche Stammfunktion konkret an.
- c) Bestimme den Wert des Kurvenintegrals $\int_\gamma \omega$ für einen Weg von $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ nach $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 5.2

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, t^2/2)$ eine Kurve. Berechne

$$\int_\gamma 2xy^3 dx + 3x^2y^2 dy.$$

6. Mehrdimensionale Integrale

Aufgabe 6.1 Berechne die folgenden Integrale:

a)

$$\int_{[0,1]^3} x \sin(y+z) \, dx \, dy \, dz,$$

b)

$$\int_M x^2 z \, dx \, dy \, dz,$$

wobei $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Aufgabe 6.2 (Transformationssatz)

Sei $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0\}$. Transformiere K auf Kugelkoordinaten und berechne dann (unter Verwendung von Kugelkoordinaten) das Integral

$$\int_K \frac{z}{1+x^2+y^2}.$$

Aufgabe 6.3 (Integration über Graphen)

Sei $T \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen und $F : T \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist $M := \text{graph } F$ eine C^1 -Hyperfläche des $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass der Maßtensor dieser Untermannigfaltigkeit gegeben ist als

$$\det g(x) = 1 + \|\text{grad } F(x)\|^2.$$

Aufgabe 6.4 (Nochmal elliptischer Zylinder)

Sei $\phi : (0, 2\pi) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\phi(\alpha, z) = (a \cos \alpha, b \sin \alpha, z)$. Zeige, dass $\text{Im } \phi \subset \mathbb{R}^3$ eine C^1 -Untermannigfaltigkeit ist und berechne das Integral

$$\int_{\text{Im } \phi} \frac{z^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dS.$$