

Lösung zur Klausur zur Analysis II

Vorlesung von Prof. L. Tobiska, Sommersemester 2004

Bitte benutzen Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt.

Bitte versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Matrikelnummer.

1. Aufgabe: Uneigentliches Integral

(5 Punkte)

Man bestimme alle reellen Zahlen a , für die das uneigentliche Integral

$$\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^a x}$$

existiert. Für diese a ermittle man den Wert des Integrals.

Lösung: Wir substituieren mit $u = \ln x$ und erhalten mit $du = \frac{1}{x} dx$

$$\int_e^{\infty} \frac{1}{x \ln^a x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_e^b \frac{1}{x \ln^a x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^{\ln b} \frac{1}{u^a} du.$$

Für $a = 1$ folgt

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^{\ln b} \frac{1}{u^1} du = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln u \right]_1^{\ln b} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln(\ln b) - \underbrace{\ln(1)}_{=0} = \infty.$$

Für $a \neq 1$ folgt

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^{\ln b} \frac{1}{u^a} du = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1-a} \cdot \frac{1}{u^{a-1}} \right]_1^{\ln b} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-a} \cdot \left(\frac{1}{\ln^{a-1} b} - 1 \right) = \begin{cases} -\frac{1}{1-a} & \text{für } a > 1 \\ \infty & \text{für } a < 1 \end{cases}.$$

Damit konvergiert das Integral für $a > 1$ und divergiert für $a \leq 1$.

2. Aufgabe: Extremwerte

(12 Punkte)

Ermitteln Sie alle lokalen Maxima und Minima der Funktion

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^2y + xy^2 + \frac{1}{3}y^3 - 4y.$$

Lösung: Als partielle Ableitungen erhalten wir

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy + y^2 - 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x + 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + 2y = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

$$(x, y) \text{ ist kritischer Punkt von } f \iff \begin{aligned} 2xy + y^2 &= y(2x + y) = 0 \\ x^2 + 2xy + y^2 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

1. Fall: Sei $y = 0$. Einsetzen in die zweite Gleichung liefert $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$.

2. Fall: Sei $y = -2x$. Einsetzen in die zweite Gleichung liefert $x^2 - 4x^2 + 4x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 2$ und $y_{3,4} = \mp 4$.

Damit sind die kritischen Punkte (x, y) von f :

$$P_1 = (2, 0), \quad P_2 = (-2, 0), \quad P_3 = (2, -4), \quad P_4 = (-2, 4).$$

Wir untersuchen nun die Hesse-Matrix von f in den kritischen Punkten

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x + 2y \\ 2x + 2y & 2x + 2y \end{pmatrix}.$$

Die Hessematrix im Punkt $P_1 = (2, 0)$ lautet

$$H_f(2, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 2\sqrt{5} + 2 > 0$ und $\lambda_2 = 2 - 2\sqrt{5} < 0$ und ist damit indefinit. f hat in $P_1 = (2, 0)$ kein Extremum.

Die Hessematrix im Punkt $P_2 = (-2, 0)$ lautet

$$H_f(-2, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 2\sqrt{5} - 2 > 0$ und $\lambda_2 = -2 - 2\sqrt{5} < 0$ und ist damit indefinit. f hat in $P_2 = (-2, 0)$ kein Extremum.

Die Hessematrix im Punkt $P_3 = (2, -4)$ lautet

$$H_f(2, -4) = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1 = -6 + 2\sqrt{5} < 0$ und $\lambda_2 = -6 - 2\sqrt{5} < 0$ und ist damit negativ definit. f hat in $P_3 = (2, -4)$ ein Maximum.

Die Hessematrix im Punkt $P_4 = (-2, 4)$ lautet

$$H_f(-2, 4) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 6 + 2\sqrt{5} > 0$ und $\lambda_2 = 6 - 2\sqrt{5} > 0$ und ist damit positiv definit. f hat in $P_4 = (-2, 4)$ ein Minimum.

3. Aufgabe: Gradient und Richtungsableitung

(5 Punkte)

Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion $z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $(1, 2)$, wobei $z(x, y) = x^2 - 2y^2$, in Richtung eines Vektors, der mit der positiven x -Achse einen Winkel von $\pi/4$ bildet.

Lösung: Für die partiellen Ableitungen erhält man

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = -4y.$$

Der Gradient in einem Punkt (x, y) ist damit

$$(\text{grad } z)(x, y) = (2x, -4y)$$

und im Punkt $P = (1, 2)$

$$(\text{grad } z)(1, 2) = (2, -8).$$

Ein Vektor, der mit der positiven x -Achse einen Winkel von $\pi/4$ bildet, ist

$$\ell = \left(\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Da $\|\ell\| = 1$ erhält man sofort die Richtungsableitung zu

$$\frac{\partial z}{\partial \ell}(1, 2) = (\text{grad } z)(1, 2) \cdot \ell = -3\sqrt{2}.$$

4. Aufgabe: Kurvenintegrale

(10 Punkte)

a) Man überprüfe das Integral

$$I = \int_{\widehat{AB}} (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy, \quad A = (0, 1), \quad B = (1, 0)$$

auf Wegunabhängigkeit.

b) Gegebenenfalls ermittle man eine Potentialfunktion.

c) Man ermittle den Wert von I für die beiden Wege

i) $\widehat{AB}$ sei ein Geradenstück von A nach B ,

ii) $\widehat{AB}$ sei ein Kreisbogen (um den Ursprung, mathematisch positiv orientiert).

Lösung:

a) Sei $f = (x^2 + 2xy - y^2, x^2 - 2xy - y^2, 0)$. Das Integral I ist wegunabhängig, da $\operatorname{rot} f = 0$ bzw. die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2xy - y^2) = 2x - 2y, \quad \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 2xy - y^2) = 2x - 2y$$

erfüllt ist.

b) Potentialfunktion: $U = \frac{1}{3}x^3 + x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3$.

c) i) $\widehat{AB}$ sei ein Geradenstück von A nach B . Eine Parametrisierung der Strecke zwischen den Punkten $A = (0, 1)$ und $B = (1, 0)$ ist

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Dann ist das Wegintegral

$$\begin{aligned} W(\alpha) &= \int_0^1 \{ (t^2 + 2t(1-t) - (1-t)^2) + (t^2 - 2t(1-t) - (1-t)^2) \cdot (-1) \} dt \\ &= \int_0^1 4t(1-t) dt = 4 \int_0^1 (t - t^2) dt = 4 \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}. \end{aligned}$$

ii) Da das Wegintegral wegunabhängig ist, muss dieses Integral mit der Kreisparametrisierung den gleichen Wert wie c) i) haben, also $W(\alpha_{\text{ii}}) = \frac{2}{3}$.

Oder alternativ: Gleich mit Potential

$$U(B) - U(A) = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

5. Aufgabe: Bogenlänge

(6 Punkte)

Man ermittle die Bogenlänge der ebenen Kurve

$$x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Lösung:

$$\dot{x}(t) = -3 \cos^2 t \cdot \sin t, \quad \dot{y}(t) = 3 \sin^2 t \cdot \cos t.$$

Für die Bogenlänge ℓ erhält man

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\ell}} &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} \, dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9(\cos^4 t \cdot \sin^2 t + \sin^4 t \cdot \cos^2 t)} \, dt \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2 t \cdot \sin^2 t \cdot (\cos^2 t + \sin^2 t)} \, dt = 3 \int_0^{\pi/2} |\cos t \cdot \sin t| \, dt = 3 \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \sin t \, dt \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(2t) \, dt = \frac{3}{4} (-\cos 2t) \Big|_0^{\pi/2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

6. Aufgabe: mehrdimensionale Integralrechnung

- a) Berechnen Sie das Integral (6 Punkte)

$$\int_{\Omega} \frac{x^2}{1+y^2} dx dy, \quad \Omega = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2.$$

- b) Bestimmen Sie das Volumen des Körpers (6 Punkte)

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 < 0, \quad 0 < z < a\}, a > 0.$$

「 **Hinweis:** Benutzen Sie Zylinderkoordinaten. 」

Lösung:

- a) Der Integrand ist in dem kompakten Rechteck stetig und somit darf Theorem 11.8 (Allgemeiner Satz über die sukzessive Integration) angewendet werden.

Sei $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ und $f(x, y) := \frac{x^2}{1+y^2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\int_{\Omega} f dV}} &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dx \right) dy = \int_0^1 x^2 dx \cdot \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \cdot \left[\arctan y \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \pi = \underline{\underline{\frac{\pi}{12}}}. \end{aligned}$$

- b) Gemäß Hinweis benutzen wir Zylinderkoordinaten

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z$$

und erhalten

$$\underline{\underline{\text{vol}(U)}} = \int_0^a \int_0^z \int_0^{2\pi} r d\varphi dr dz = 2\pi \int_0^a \int_0^z r dr dz = 2\pi \int_0^a \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=z} dz = \pi \int_0^a z^2 dz = \underline{\underline{\pi \frac{a^3}{3}}}.$$