

Experimentalphysik IV (PEP4)

Dozent. Prof. S. Jochim

Übung 1

Abgabe am Dienstag, den 22.4.2014 , 11:00 Uhr

Aufgabe 1 (4P): Wiederholung des Kastenpotenzials

Betrachten Sie ein Teilchen in einem eindimensionalen Potenzialtopf mit unendlich hohen Wänden.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| < a \\ \infty & \text{für } |x| > a \end{cases}$$

- Welche Randbedingungen müssen die Wellenfunktionen im Potenzialtopf erfüllen?
- Nehmen Sie für das Teilchen de Broglie-Wellen an und leiten Sie daraus die möglichen Energiewerte ab, indem Sie die Randbedingungen berücksichtigen.
- Berechnen Sie die Wellenfunktionen mit Hilfe der Schrödinger-Gleichung.
- Zeigen Sie, dass die Wellenfunktionen orthogonal sind: $\int \psi_n \psi_m dx = \delta_{nm}$.

Aufgabe 2 (4P): Zustände im Ortsraum

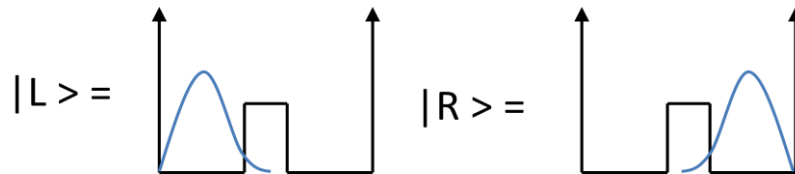
Gegeben seien folgende Zustände im Ortsraum:

- $\psi(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$ (nicht-normierte ebene Welle).
- $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2}$ (Harmonischer Oszillator Grundzustand).

- Die Ortsdarstellung des Impulsoperators lautet in einer Dimension $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$. Zeigen Sie, dass (i) eine Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung für den Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{p}^2 / (2m)$ (freies Teilchen) ist.
- Welcher der beiden Zustände ist Eigenzustand des Impulsoperators? Was ist der Eigenwert?
- Berechnen Sie jeweils Erwartungswert und Varianz des Impulses für (i), (ii) und der Wellenfunktion aus Aufgabe 1c). Benutzen Sie, dass $\int \psi(x)^* \psi(x) dx = 1$.

Aufgabe 3: Das Zwei-Niveau-System (4P)

Ein Teilchen in einem sogenannten Doppelmuldenpotenzial kann als Zwei-Niveau-System beschrieben werden, wenn in jeder einzelnen Mulde nur der energetisch niedrigste Zustand betrachtet wird. Dabei sind diese beiden möglichen orthonormierten Zustände:



In Vektorform sei $|L\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $|R\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ein allgemeiner Zustand ist $|\psi\rangle = a|L\rangle + b|R\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Die Hamiltonoperator in Matrixform ist $\hat{H} = E_0(|L\rangle\langle L| + |R\rangle\langle R|) + J(|R\rangle\langle L| + |L\rangle\langle R|)$, wobei E_0 die Grundzustandsenergie in einer Mulde ist und J die Tunnelrate in Einheiten von $\hbar$ ist.

- Zeigen Sie, dass $|L\rangle$ und $|R\rangle$ keine Eigenzustände des Systems sind.
- Stellen Sie $\hat{H}$ in Matrixform dar.
- Bestimmen Sie die Energieeigenwerte und die normierten Eigenzustände.

Fortsetzung folgt auf dem nächsten Übungsblatt.

Lösung Aufgabe 1

a) Randbedingungen

$$\Psi(x = -a) = \Psi(x = a) = 0$$

b)

$$\text{Kinetische Energie: } E = \frac{p^2}{2m}$$

$$\text{deBroglie Wellenlänge: } \lambda = \frac{h}{p}$$

Es passen nur Vielfache der halben Wellenlänge in den Potentialkasten:

$$\lambda = \frac{4a}{n}, (n \in \{1, 2, 3, \dots\})$$

Daraus folgt:

$$p_n = \frac{h n}{4a} \text{ und } E_n = \frac{h^2 n^2}{32 m a^2} = \frac{(2 \pi \hbar)^2 n^2}{32 m a^2}$$

c)

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0, & x > |a| \\ \tilde{\Psi}(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $x \in [-a, a]$ gilt $E_{\text{pot}} = 0$.

Durch Einsetzen in die stationäre SGL erhält man

$$\frac{d^2 \tilde{\Psi}(x)}{dx^2} + k^2 \tilde{\Psi} = 0, \text{ mit } k^2 = \frac{2m E_n}{\hbar^2} = \frac{\pi^2 n^2}{4a^2}$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$\tilde{\Psi}(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} = A \cos(kx) + A i \sin(kx) + B \cos(kx) - B i \sin(kx)$$

Mit den Randbedingungen aus b):

$$0 = A \cos\left(\frac{n\pi}{2a} a\right) + A i \sin\left(\frac{n\pi}{2a} a\right) + B \cos\left(\frac{n\pi}{2a} a\right) - B i \sin\left(\frac{n\pi}{2a} a\right)$$

$$\begin{cases} A = -B & \text{für } n \text{ gerade} \\ A = B & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$A = \sqrt{\frac{1}{2a}} \text{ wegen } \int \tilde{\Psi}(x)^* \tilde{\Psi}(x) = 1$$

$$\tilde{\Psi}(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2a}} \sin\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) & \text{für } n \text{ gerade} \\ \sqrt{\frac{1}{2a}} \cos\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

d)

zu zeigen: $\int \psi_n \psi_m dx = \delta_{nm}$.

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \sin\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2a}x\right) dx &= \frac{\sin\left(\frac{(m-n)\pi x}{2a}\right)}{(m-n)\pi} \Bigg|_{-a}^a - \frac{\sin\left(\frac{(m+n)\pi x}{2a}\right)}{(m+n)\pi} \Bigg|_{-a}^a = \\ \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(m-n)\pi\right)}{(m-n)\pi} + \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(m+n)\pi\right)}{(m+n)\pi} - \left(-\frac{\sin\left(\frac{1}{2}(m-n)\pi\right)}{(m-n)\pi} - \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(m+n)\pi\right)}{(m+n)\pi} \right) &= \end{aligned}$$

$$2 \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(m-n)\pi\right)}{(m-n)\pi} + 2 \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(m+n)\pi\right)}{(m+n)\pi} \equiv b$$

Fall i) m und n = gerade $\rightarrow m \pm n$ = gerade $\rightarrow b=0$

Fall ii) m und n = ungerade $\rightarrow m \pm n$ = gerade $\rightarrow b=0$

Fall iii) m gerade (ungerade) und n ungerade (gerade) $\rightarrow m \pm n$ = ungerade

$$\rightarrow b = \frac{2}{\pi} \left(\frac{i^{-1+m-n}}{m-n} + \frac{i^{-1+m+n}}{m+n} \right)$$

$$\text{Beispiel: } m=8, n=3 \rightarrow b = \frac{12}{55\pi}$$

d) z. zeigen: $\int_{-a}^a \psi_n \cdot \psi_m dx = \delta_{n,m}$

(i) n : gerade m : ungerade $\int_{-a}^a \sin\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{m\pi}{2a}x\right) dx$

$\nearrow$ um $\emptyset$ symmetrisches Intervall $\uparrow$ ungerade Fkt. $\uparrow$ gerade Fkt.

$\rightarrow \text{Integral} = 0$

(ii) n : gerade m : gerade $\int \sin\left(\frac{n\pi}{2a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{2a}x\right) dx =$

$$= \left[\frac{\sin\left(\frac{(m-n)\pi x}{2a}\right)}{\frac{\pi x}{a}(m-n)} - \frac{\sin\left(\frac{(m+n)\pi x}{2a}\right)}{\frac{\pi x}{a}(m+n)} \right]_{-a}^a =$$

$$= \frac{\cancel{\sin \frac{\pi}{2}}(m-n)}{\pi(m-n)} - \frac{\cancel{\sin(m+n) \frac{\pi}{a}}}{\pi(m+n)} - \frac{\cancel{\sin(m-n) \left(-\frac{\pi}{2}\right)}}{-\frac{\pi}{2}(m-n)} + \frac{\cancel{\sin(m+n) \left(-\frac{\pi}{2}\right)}}{-\pi(m+n)} =$$

$= 0$

Lösung Aufgabe 2

Lösung

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx} \Rightarrow \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$$

(a) Schrödingergleichung: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \hat{H} \Psi(x, t)$, einsetzen:

$$i\hbar(-i\omega) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cancel{e^{i(kx-\omega t)}} = -\frac{\hbar^2}{2m} (ik)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cancel{e^{i(kx-\omega t)}} \\ \hookrightarrow \hbar\omega = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$$

b)

Eigenwert:

$$-i\hbar \partial_x \psi_{(i)}[x] = \hbar k e^{i(kx-t\omega)} = \hbar k \psi_{(i)}[x]$$

c)

Erwartungswert (i)

$$\langle p \rangle = \langle \psi_{(i)} | \hat{p} | \psi_{(i)} \rangle = \int (-i\hbar) \psi_{(i)}^*[x] \partial_{\{x\}} \psi_{(i)}[x] dx = \hbar k \int \psi_{(i)}^*[x] \psi_{(i)}[x] dx = \hbar k$$

$$\text{mit } \int \psi_{(i)}^*[x] \psi_{(i)}[x] dx = 1$$

Varianz (i)

$$\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \hbar^2 k^2 - (\hbar k)^2 = 0$$

Mit

$$\langle p \rangle^2 = (\hbar k)^2$$

$$\langle p^2 \rangle = \int (-i\hbar)^2 \psi_{(i)}^*[x] \partial_{\{x\}} \partial_{\{x\}} \psi_{(i)}[x] dx = e^{-i(kx-t\omega)} \hbar^2 k^2 e^{i(kx-t\omega)} = \hbar^2 k^2$$

Erwartungswert (ii)

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (-i\hbar) \psi_{(ii)}^*[x] \partial_{\{x\}} \psi_{(ii)}[x] dx = (i\hbar) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} x}{\sqrt{\pi} \sigma^3} dx = 0$$

Varianz (ii)

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (-i\hbar)^2 \psi_{(ii)}^*[x] \partial_{\{x\}} \partial_{\{x\}} \psi_{(ii)}[x] dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \hbar^2 (-x^2 + \sigma^2)}{\sqrt{\pi} \sigma^5} dx = \frac{\hbar^2}{2\sigma^2}$$

$$\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{2\sigma^2} - 0 = \frac{\hbar^2}{2\sigma^2}$$

Erwartungswert (1c)

$$\langle p \rangle = \int (-i\hbar) \psi_{(1c)}^*[x] \partial_{\{x\}} \psi_{(1c)}[x] dx = - \int_{-d}^d \frac{i\hbar n\pi \sin\left[\frac{n\pi x}{d}\right]}{4d^2} dx = \frac{i\hbar \cos\left[\frac{n\pi x}{d}\right]}{4d} = 0$$

Varianz (1c)

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle &= \int (-i\hbar)^2 \psi_{(1c)}^*[x] \partial_{\{x\}} \partial_{\{x\}} \psi_{(1c)}[x] dx = \int_{-d}^d \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2 \sin\left[\frac{n\pi x}{2d}\right]^2}{4d^3} dx \\ &= \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{d \sin\left[\frac{n\pi x}{d}\right]}{2n\pi} \right)}{4d^3} = \frac{\hbar^2 n\pi (n\pi - \sin[n\pi])}{4d^2} \end{aligned}$$

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\hbar^2 \pi^2}{4d^2}, (n=1)$$

$$\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{4d^2} - 0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{4d^2}$$

Lösung Aufgabe 3

a)

$$\hat{H}|\mathbf{R}\rangle = c|\mathbf{R}\rangle \quad ? \quad (c = \text{const})$$

$$\hat{H}|\mathbf{R}\rangle = E_0|\mathbf{R}\rangle + J|\mathbf{L}\rangle \neq c|\mathbf{R}\rangle$$

$$\hat{H}|\mathbf{L}\rangle = E_0|\mathbf{L}\rangle + J|\mathbf{R}\rangle \neq c|\mathbf{L}\rangle$$

b)
$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \langle L | E_0 | L \rangle & \langle L | J | R \rangle \\ \langle R | J | L \rangle & \langle R | E_0 | R \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 & J \\ J & E_0 \end{pmatrix}$$

c)

Eigenwertgleichung

$$\det \left| \begin{pmatrix} E_0 & J \\ J & E_0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

Eigenwerte:

$$\lambda_{+,-} = E_0 \pm J$$

Eigenvektoren:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$