

Experimentalphysik IV (PEP4)

Dozent. Prof. S. Jochim

Übung 10

Abgabe am Montag, den 23.6.2013 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Linienbreiten (4P)

a) Ein Ensemble von Wasserstoffatomen befinde sich zum Zeitpunkt 0 im angeregten H(2p)-Zustand. Durch spontane Emission gelangen die Atome wieder in den Grundzustand. Für das dabei emittierte elektrische Feld gilt:

$$E(t) = E_0 e^{-t/(2\tau)} \cos \omega_0 t \quad \text{für } t \geq 0 \quad \text{sonst } 0.$$

Dabei ist E_0 eine reelle Amplitude, ω_0 die atomare Übergangsfrequenz und τ die natürliche Lebensdauer. Berechnen Sie die Fouriertransformierte $E(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt$. (Gehen Sie dabei davon aus, dass die Frequenzen ω in der Umgebung von ω_0 liegen. Dann können Sie die Terme mit $(\omega + \omega_0)$ vernachlässigen).

b) Berechnen Sie nun das Linienspektrum $S(\omega) = \text{const} \cdot |E(\omega)|^2$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = 1$. Wie groß ist die Halbwertsbreite (FWHM) $\Delta\nu$? Welche Linienform stellt das Spektrum dar? (memo: $\omega = 2\pi \nu$)

c) Die mittlere Lebensdauer des H(2p)-Zustands beträgt $\tau = 1.6$ ns. Berechnen Sie die natürliche Breite für die Lyman- α -Linie (2p $\rightarrow$ 1s). Berechnen Sie die Dopplerverbreiterung der Linie bei Zimmertemperatur (in der Einheit Hz).

Hinweis: Die Intensitätsverteilung um die Frequenz ν_0 aufgrund des Dopplereffektes ist gegeben durch

$$I(\nu) = I_0 e^{-\frac{mc^2(\nu-\nu_0)^2}{2\nu_0^2 k_B T}}.$$

a)

$$E(\omega) = E_0 \int_0^{\infty} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos \omega_0 t e^{-i\omega t} dt =$$

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{-i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t})$$

$$E(\omega) = \frac{E_0}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\gamma}{2}t} (e^{-i\omega_0 t} + e^{i\omega_0 t}) e^{-i\omega t} dt =$$

$$= \frac{E_0}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\gamma}{2}t} (e^{-i(\omega_0+\omega)t} + e^{i(\omega_0-\omega)t}) dt =$$

$$= \frac{E_0}{2} \int_0^{\infty} e^{-(\frac{\gamma}{2} + i(\omega_0+\omega))t} + e^{-(\frac{\gamma}{2} - i(\omega_0-\omega))t} dt =$$

$$= \frac{E_0}{2} \left[-\frac{e^{-(\frac{\gamma}{2} + i(\omega_0+\omega))t}}{\frac{\gamma}{2} + i(\omega_0+\omega)} - \frac{e^{-(\frac{\gamma}{2} - i(\omega_0-\omega))t}}{\frac{\gamma}{2} - i(\omega_0-\omega)} \right]_0^{\infty} =$$

$$= \frac{E_0}{2} \left(\frac{1}{\frac{\gamma}{2} + i(\omega_0+\omega)} + \frac{1}{\frac{\gamma}{2} - i(\omega_0-\omega)} \right)$$

für $\omega_0 \approx \omega$ kann der erste Bruch vernachlässigt werden, da gilt:

$$E(\omega) = \frac{E_0}{2} \frac{1}{\frac{\gamma}{2} - i(\omega_0-\omega)}$$

$$\frac{1}{\frac{\gamma}{2} + i(\omega_0+\omega)} = \frac{\frac{\gamma}{2}}{\underbrace{\frac{\gamma^2}{4} + (\omega_0+\omega)^2}_{\approx 0}} - i \frac{(\omega_0+\omega)}{\underbrace{\frac{\gamma^2}{4} + (\omega_0+\omega)^2}_{\approx 0}}$$

b)

$$I(\omega) = \text{const} |E(\omega)|^2 = \text{const} \frac{E_0^2}{4} \frac{1}{\frac{1}{4\tau^2} + (\omega_0 - \omega)^2} =$$

$$= \text{const} E_0^2 \frac{1}{\frac{1}{\tau^2} + 4(\omega_0 - \omega)^2} \quad S(\nu) = \text{const} \cdot E_0^2 \frac{1}{\frac{1}{\tau^2} + 16\pi^2(\nu_0 - \nu)^2}$$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) d\nu = \text{const} E_0^2 \left[-\frac{\tau}{4\pi} \tan^{-1}(4\pi\tau(\nu_0 - \nu)) \right]_{-\infty}^{\infty} =$$

$$= \text{const} \cdot E_0^2 \left[\frac{\tau}{4\pi} \frac{\pi}{2} + \frac{\tau}{4\pi} \frac{\pi}{2} \right] = \text{const} \cdot E_0^2 \cdot \frac{\tau}{4}$$

$$\text{const} = \frac{4}{E_0^2 \cdot \tau}$$

$$S(\nu) d\nu = \frac{1}{\frac{1}{\tau^2} + 16\pi^2(\nu_0 - \nu)^2} \frac{4}{\tau} = \frac{4\tau}{1 + (4\pi\tau(\nu_0 - \nu))^2} d\nu$$

FWHM - Breite $\Delta\nu$ errechnet sich aus der Bedingung

$$S\left(\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}\right) = \frac{1}{2} S(\nu_0) = 2\tau$$

$$\frac{\Delta\nu}{2} = \frac{1}{4\pi\tau} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\Delta\nu = \frac{1}{2\pi\tau}}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{\Delta\omega = \frac{1}{\tau}}}$$

Das Spektrum hat die Form eines Lorentzprofils.

c)

$$\text{Linienbreite } \Delta\nu = 99,5 \text{ MHz}$$

$$\text{Dopplerbreite } \Delta\nu = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2 \ln 2 k_B T}{m}}$$

$$\nu_0 = R_Y \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

$$\Delta\nu = 40 \text{ GHz}$$



Aufgabe 2: Optisches Pumpen (4P)

In einer Glaszelle befindet sich ein Ensemble von ^{87}Rb Atomen. Sie interessieren sich für optische Übergänge vom Grundzustand $5\ ^2S_{1/2}$ zum angeregten $5\ ^2P_{3/2}$ Zustand, der D2-Linie (Wellenlänge 780.246 nm, natürliche Lebensdauer $\tau = 26.2\text{ ns}$). Das Ensemble sei kalt genug, so dass die Dopplerverbreiterung vernachlässigt werden kann.

- a) ^{87}Rb hat einen Kernspin von $I = 3/2$. Welche Hyperfeinzustände gibt es für die beiden Zustände?
- b) Gehen Sie davon aus, dass zu Beginn alle Atome zufällig über alle Hyperfeinzustände des $5\ ^2S_{1/2}$ -Grundzustands verteilt sind. Ihnen stehen zwei Laserfrequenzen mit je σ^+ -Polarisation zur Verfügung. Die Frequenzen entsprechen den Übergängen $5\ ^2S_{1/2}\ |F = 1\rangle \rightarrow 5\ ^2P_{3/2}\ |F' = 2\rangle$ und $5\ ^2S_{1/2}\ |F = 2\rangle \rightarrow 5\ ^2P_{3/2}\ |F' = 2\rangle$.

Zeichnen Sie in einem Level-Diagramm die möglichen Übergänge ein.

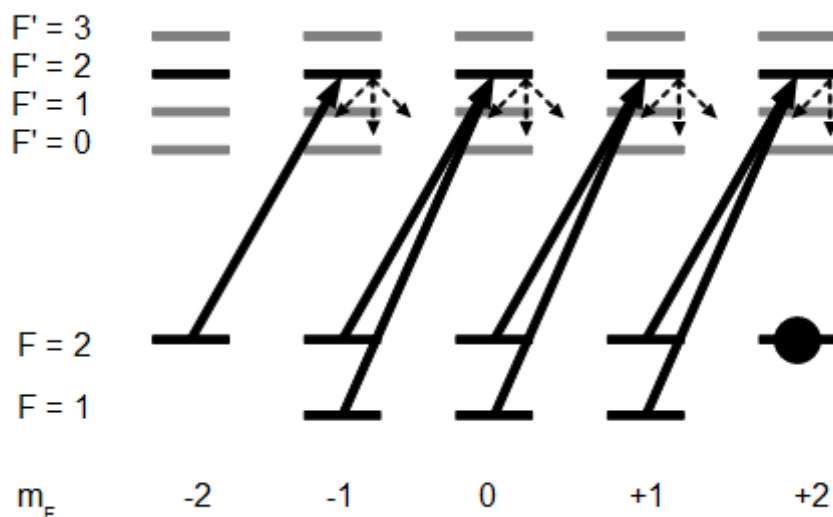
- c) Durch spontane Emission aus den angeregten Zuständen finden Übergänge mit der Auswahlregel $\Delta m = \pm 1, 0$ statt.

In welchem Zustand befinden sich alle Atome nach einer gewissen Zeit (vielfaches der Lebensdauer)? Warum heißt dieses Schema ,optisches Pumpen‘ ?

Lösung:

- a) $F = 1, 2$ ($J = 1/2, I = 3/2$)
 $F' = 0, 1, 2, 3$ ($J = 3/2$ in diesem Aufgabenteil, $I = 3/2$)

b)



c) in $F=2$, $m_F=2$.

Durch Einstrahlung von Energie im ‚optischen Bereich‘ können Atome in sonst willkürlich besetzten (meist in thermisch besetzten Grund-) Zuständen gezielt einen einzigen Zustand annehmen.

Lösung: Für den Grundzustand $5^2S_{1/2}$ mit $J = 1/2$ ergibt sich für die Hyperfeinlevels (mittels $F = I + J \dots |I - J|$) $F = 1$ und $F = 2$. Für den angeregten Zustand entsprechend $F' = 0$, $F' = 1$, $F' = 2$, $F' = 3$.

Für optische Dipolübergänge muss der Gesamtdrehimpuls erhalten bleiben (Photon + Atom). Dies impliziert, daß $\Delta F = 0, \pm 1$ aber nicht $F = 0 \rightarrow F' = 0$.

Die Projektion des Drehimpulses eines Photons ($\hbar$) auf die Magnetfeldrichtung kann die Werte $0, \pm 1$ annehmen. Linear polarisiertes Licht kann nun die Unterzustände koppeln, wenn $\Delta m_F = 0$ und zirkular polarisiertes Licht wenn $\Delta m_F = \pm 1$.

Die Atome befinden sich zunächst in allen möglichen Hyperfein-Unterzuständen. Nun können mit Hilfe eines Lasers entsprechender Frequenz und Polarisation den obigen Auswahlregeln entsprechende Übergänge in den angeregten Zustand getrieben werden. Von dort zerfällt das Atom durch spontane Emission entsprechend den Auswahlregeln wieder in den Grundzustand. Übergänge zwischen Hyperfeinzuständen des Grundzustandes oder des angeregten Zustandes sind prinzipiell auch möglich, die Übergangsfrequenzen befinden sich jedoch im Regime der Mikrowellenstrahlung.

Strahlt man σ^+ polarisiertes Licht ein, daß resonant zum Übergang $F = 1 \rightarrow F' = 2$ ist, werden die Unterzustände in $F = 1$ entvölkert und die Atome befinden sich irgendwann in den Unterzuständen mit $F = 2$. Um sie nun in $|F, m_F\rangle = |2, 2\rangle$ zu transferieren, kann man zusätzlich noch σ^+ -polarisiertes Licht einstrahlen, welches resonant mit dem Übergang $F = 2 \rightarrow F' = 2$ ist. Nach einer gewissen Anzahl von Zyklen aus Anregung und Abregung befinden sich die Atome im gewünschten Zustand (siehe Abbildung). Im Experiment genügt meist ein kurzer Puls von $\approx 100 \mu s$ Dauer.

Aufgabe 3: Ramsey-Spektroskopie (4P)

Ziel der Ramsey-Spektroskopie ist es, präzise die Frequenz eines atomaren Übergangs zu bestimmen. Die beinhaltet sowohl kohärente Kopplung des atomaren Zweiniveausystems durch Mikrowellen- oder Laserstrahlung als auch die frei Propagation des atomaren Systems ohne Wechselwirkung mit dem Lichtfeld.

In der Rotating-Wave-Approximation (RWA) sind die Bewegungsgleichungen der Amplituden von Grundzustand $c_1(t)$ und angeregtem Zustand $c_2(t)$ gegeben durch:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \delta & \Omega \\ \Omega & -\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass sich ausgehend von $c_1(t=0) = 1$ die Wahrscheinlichkeitsamplitude des angeregten Zustandes unter dem Einfluss der Rabi-Kopplung Ω mit der Verstimmung δ schreiben lässt als:

$$c_2(t) = -i \frac{\Omega}{\Omega_{eff}} \sin\left(\frac{\Omega_{eff}}{2} t\right) e^{-\frac{i\delta}{2}t} \quad (2)$$

Die Zeitentwicklung des Grundzustandes lautet:

$$c_1(t) = \left(\cos\left(\frac{\Omega_{eff}}{2} t\right) + i \frac{\delta}{\Omega_{eff}} \sin\left(\frac{\Omega_{eff}}{2} t\right)\right) e^{-\frac{i\delta}{2}t} \quad (3)$$

Dabei ist $\Omega_{eff} = \sqrt{\Omega^2 + \delta^2}$ die effektive Rabifrequenz. Die Zeitentwicklung der allgemeinen Superposition $c_1(t)|1\rangle + c_2(t)|2\rangle$ lässt sich als Bewegung auf der Blochkugel beschreiben.

- a) Zeigen Sie, dass Gl. (2) und (3) für $\delta = 0$ einer Drehung um die x-Achse entspricht. Drücken Sie $c_{1,2}(t)$ über die Polar- und Azimut-Winkel aus (s. Vorlesung). Zeichnen Sie die entsprechende Bahn auf der Blochkugel ein.
Ein sogenannter $\frac{\pi}{2}$ -Puls entspricht einer Kopplung, für die $\Omega t = \frac{\pi}{2}$ gilt. An welchem Punkt der Kugel befindet man sich nach einem solchen Puls, wenn man bei $c_1(t=0) = 1$ gestartet war?
- b) Gegeben sei die Superposition $|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - i|2\rangle)$. Im Fall $\Omega = 0$, d.h. ohne Kopplung bzw. **freie Evolution**, und mit der Verstimmung δ gegenüber der Kopplungsfrequenz ist die Zeitentwicklung von Grund- und angeregtem Zustand gegeben durch:

$$\begin{aligned} c_1(t) &= c_1(0) \\ c_2(t) &= c_2(0)e^{-i\delta t} \end{aligned}$$

Um welche Achse wird jetzt rotiert? Nach welchen Zeiten T landet man wieder bei $|\psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + i|2\rangle)$? Zeichnen Sie den Weg auf der Blochkugel.

- c) Eine mögliche volle Ramsey Sequenz besteht aus einem $\frac{\pi}{2}$ -Puls, einer Zeit T freier Evolution, gefolgt von einem weiteren $\frac{\pi}{2}$ -Puls mit derselben Phase (Drehung um

dieselbe Achse mit gleichem Drehsinn) wie der erste Puls. In einer modernen Atomuhr (atomic fountain clock) sei die Zeit $T = 0.5$ s.

Wie groß muss δ während dieser Zeit sein, damit der zweite Puls zu $|c_2|^2 = 0$ führt? Zeichnen Sie den Weg auf der Blochkugel.

Die Abweichung Δ der atomaren Frequenz vom Lokalszillator (Frequenz des Koppelfeldes) kann damit sehr genau bestimmt werden. Welcher relativen Genauigkeit $\frac{\Delta f}{f}$ entspricht der Abstand eines Maximums zum nächsten Minimum der so entstehenden sog. Ramsey-Fringes auf der Frequenz des Zeitstandards (^{133}Cs – Hyperfein bei 9192631770 Hz).

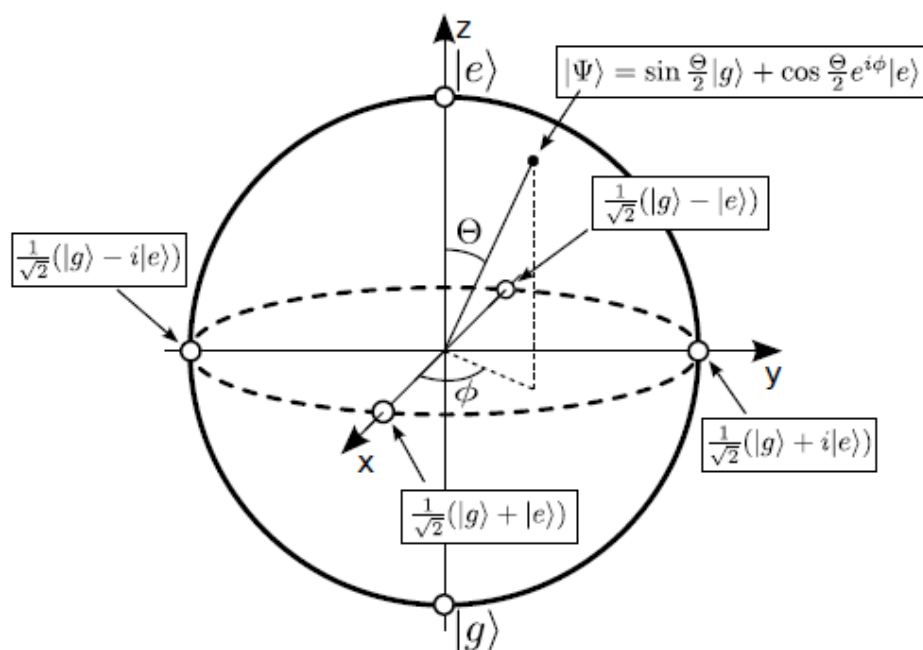


Abbildung 1: Blochkugel

Lösung:

a) memo: $\delta = \Delta$, $c_1 = c_g$, $c_2 = c_e$ (damit mit Vorlesung konsistent)

Lösung Für $\Delta = 0$ ist $\Omega_{\text{eff}} = \Omega$. Die komplexen Koeffizienten $c_g(t)$ und $c_e(t)$ sind periodisch in der Zeit mit der Periode $\frac{4\pi}{\Omega}$. Wir betrachten die erste Periode. Zerlegen der Koeffizienten in Betrag und Phase ergibt:

$$c_g(t) = |c_g(t)| \cdot e^{i\phi_g(t)}$$

$$c_e(t) = |c_e(t)| \cdot e^{i\phi_e(t)}$$

mit

$$|c_g(t)| = \left| \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \right| \quad \phi_g(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t < \frac{\pi}{\Omega} \\ \pi & \text{für } \frac{\pi}{\Omega} \leq t < \frac{2\pi}{\Omega} \\ \pi & \text{für } \frac{2\pi}{\Omega} \leq t < \frac{3\pi}{\Omega} \\ 0 & \text{für } \frac{3\pi}{\Omega} \leq t < \frac{4\pi}{\Omega} \end{cases}$$

$$|c_e(t)| = \left| \cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \right| \quad \phi_e(t) = \begin{cases} \frac{3\pi}{2} & \text{für } 0 \leq t < \frac{\pi}{\Omega} \\ \frac{3\pi}{2} & \text{für } \frac{\pi}{\Omega} \leq t < \frac{2\pi}{\Omega} \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } \frac{2\pi}{\Omega} \leq t < \frac{3\pi}{\Omega} \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } \frac{3\pi}{\Omega} \leq t < \frac{4\pi}{\Omega} \end{cases}$$

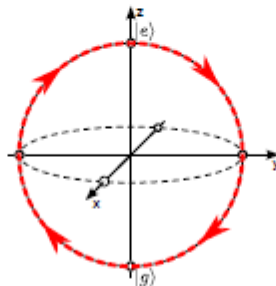
Unter Beachtung der 2π -Mehrdeutigkeit ergibt sich für die relative Phase

$$e^{i\phi(t)} = e^{i[\phi_e(t) - \phi_g(t)]} \text{ mit } \phi(t) = \begin{cases} \frac{3\pi}{2} & \text{für } 0 \leq t < \frac{\pi}{\Omega} \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } \frac{\pi}{\Omega} \leq t < \frac{2\pi}{\Omega} \\ \frac{3\pi}{2} & \text{für } \frac{2\pi}{\Omega} \leq t < \frac{3\pi}{\Omega} \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } \frac{3\pi}{\Omega} \leq t < \frac{4\pi}{\Omega} \end{cases}$$

Die entsprechende Zeitabhängigkeit von Θ ergibt sich aus den Beträgen zu:

$$\Theta(t) = \begin{cases} \pi - \Omega t & \text{für } 0 \leq t < \frac{\pi}{\Omega} \\ \Omega t - \pi & \text{für } \frac{\pi}{\Omega} \leq t < \frac{2\pi}{\Omega} \\ 3\pi - \Omega t & \text{für } \frac{2\pi}{\Omega} \leq t < \frac{3\pi}{\Omega} \\ \Omega t - 3\pi & \text{für } \frac{3\pi}{\Omega} \leq t < \frac{4\pi}{\Omega} \end{cases}$$

Damit entspricht die Zeitentwicklung einer Drehung um die x-Achse vom Südpol der Bloch-kugel über die negative y-Achse zum Nordpol, zur positiven y-Achse und zurück zum Südpol:



Nach einem $\frac{\pi}{2}$ -Puls befindet man sich also auf der negativen y-Achse in der Superposition $|\Psi(t = \frac{\pi}{2\Omega})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle - i|e\rangle)$

b)

Lösung Jetzt wird um die z-Achse rotiert, für $\Delta > 0$ im Uhrzeigersinn. Nach den Zeiten

$$T_n = \frac{1}{\Delta}(\pi + 2\pi n) \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

(eine halbe + n ganze Umdrehungen) befindet man sich bei der Superposition $|\Psi(T_n)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + i|e\rangle)$.

c)

Lösung Ein $\frac{\pi}{2}$ -Puls entspricht einer viertel Umdrehung. Nach dem ersten Puls sei $t = 0$. Damit der zweite Puls den Zustand wieder zum Südpol befördert muss $|\Psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + i|e\rangle)$ sein. Analog zu Aufgabenteil (b) muss dann gelten:

$$\Delta_n = \frac{1}{T}(\pi + 2\pi n) \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Damit liegt das erste Minimum von $|c_e|^2$ nach der vollen Sequenz bei $\Delta = 2\pi\Delta_f = \frac{\pi}{T}$. Die somit erreichte relative Genauigkeit auf der Frequenz des Zeitstandards liegt somit bei

$$\frac{\Delta_f}{f} = \frac{1 \text{ Hz}}{9192631770 \text{ Hz}} \approx 10^{-10}$$

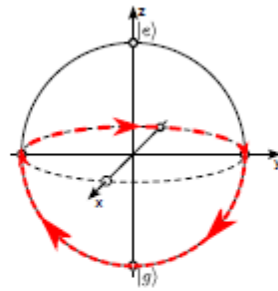


Abbildung 4: Volle Ramsey-Sequenz auf der Blochkugel mit $\Delta \cdot T = \pi$