

Experimentalphysik IV (PEP4)

Dozent. Prof. S. Jochim

Übung 6

Abgabe am Montag, den 27.5.2013 vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Landéscher g-Faktor (4P)

Betrachten Sie die beiden Gleichungen für den Gesamtdrehimpuls $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$ und das magnetische Moment $\vec{\mu}_j = \vec{\mu}_l + \vec{\mu}_s$. Die magnetischen Momente sind gegeben durch $\vec{\mu}_l = -\frac{g_l \mu_B}{\hbar} \vec{l}$ und $\vec{\mu}_s = -\frac{g_s \mu_B}{\hbar} \vec{s}$. Dabei sind $g_l = 1$ und $g_s = 2$. Da $g_l \neq g_s$, sind $\vec{\mu}_j$ und $\vec{j}$ nicht parallel und nur $\vec{\mu}_{j_{eff}}$ als Projektion von $\vec{\mu}_j$ auf $\vec{j}$ ist für das magnetische Moment relevant: $\vec{\mu}_{j_{eff}} = \frac{\vec{j}(\vec{\mu}_j) \cdot \vec{j}}{j^2} = -\frac{g(j,l,s) \mu_B}{\hbar} \vec{j}$. $g(j,l,s)$ ist der Landésche g-Faktor.

- Zeigen Sie, dass gilt: $g(j,l,s)j^2 = \frac{3}{2}j^2 - \frac{1}{2}l^2 + \frac{1}{2}s^2$
- Fassen Sie den Ausdruck aus a) nun als Ausdruck für quantenmechanische Operatoren auf. Zeigen Sie, dass auch gilt: $g(j,l,s) = 1 + \frac{j(j+1)+s(s+1)-l(l+1)}{2j(j+1)}$
- Berechnen Sie die Landéschen g-Faktoren für die Zustände $2p_{1/2}$ und $2p_{3/2}$

Kommentar: Für eine ausführlichere Erläuterung von $\vec{\mu}_{j_{eff}}$ wird auf die Wiki-Einträge de.wikipedia.org/wiki/Landé-Faktor und en.wikipedia.org/wiki/Landé_g-factor verwiesen.

Lösung:

a) $g_j = g(j,l,s)$

$$\vec{\mu}_{j_{eff}} = \vec{j}(\vec{\mu}_l + \vec{\mu}_s) \cdot \vec{j} = -\frac{j(\frac{\mu_B}{\hbar} \vec{l} \cdot \vec{j} + \frac{2\mu_B}{\hbar} \vec{s} \cdot \vec{j})}{j^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Wegen } j^2 &= (\vec{l} + \vec{s})^2 = l^2 + s^2 + 2\vec{l} \cdot \vec{s} \rightarrow \vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2}(j^2 - l^2 - s^2) \\ \rightarrow \vec{l} \cdot \vec{j} &= \vec{l} \cdot (\vec{l} + \vec{s}) = l^2 + \frac{1}{2}(j^2 - l^2 - s^2) = \frac{1}{2}(j^2 + l^2 - s^2) \\ \rightarrow \vec{s} \cdot \vec{j} &= \vec{s} \cdot (\vec{l} + \vec{s}) = \frac{1}{2}(j^2 - l^2 - s^2) + s^2 = \frac{1}{2}(j^2 - l^2 + s^2) \end{aligned}$$

$$\vec{\mu}_{j_{eff}} = -\frac{\mu_B}{\hbar} j \left(\frac{1}{2}(j^2 + l^2 - s^2) + (j^2 - l^2 + s^2) \right) / j^2 = -g_j \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{j}$$

$$\text{also } g_j j^2 = \frac{3}{2}j^2 - \frac{3}{2}l^2 + \frac{1}{2}s^2$$

b) Mit den zugehörigen Eigenwerten

$$g_j j(j+1)\hbar^2 = \frac{3\hbar^2}{2} j(j+1) - \frac{\hbar^2}{2} l(l+1) + \frac{\hbar^2}{2} s(s+1)$$

$$\rightarrow g_j = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}$$

c) $g_j \left(2p_{\frac{1}{2}} \right) = \frac{2}{3}$ und $g_j \left(2p_{\frac{3}{2}} \right) = \frac{4}{3}$

Aufgabe 2: Die Lamb-Verschiebung – Aufhebung der j-Entartung (4P)

Die Lamb-Verschiebung des 1s-Grundzustands in Wasserstoff wurde mittels Laserspektroskopie bestimmt. In einem besonders eleganten Verfahren konnte die Differenz der $2s \rightarrow 4s$ und dem vierten Teil der $1s \rightarrow 2s$ -Übergangsenergie gemessen werden¹:

$$\Delta E = (E_{4s} - E_{2s}) - \frac{1}{4} (E_{2s} - E_{1s})$$

In dieser Summe fallen die größten Energiebeiträge weg, wie sie durch die Rydbergformel $E_n = -E_{\text{Ryd}}/n^2$ gegeben sind. Übrig bleiben die relativistischen Beiträge sowie die Lamb-Verschiebung. Aus dem experimentellen Wert von $\Delta E = 4797$ MHz lässt sich die 1s-Lamb-Verschiebung L_{1s} bestimmen. Verwenden Sie hierfür die aus dem Experiment von Lamb und Retherford bekannte 2s-Lamb-Verschiebung ($L_{2s} = 1057$ MHz), die sehr viel kleinere 4s-Lamb-Verschiebung ($L_{4s} = 131$ MHz), sowie den Ausdruck für die Dirac-Energien (siehe Vorlesung):

$$E_{n,j} = E_n \left[1 - \frac{\alpha^2 Z^2}{n} \left(\frac{3}{4n} - \frac{1}{j + 1/2} \right) \right]$$

Welcher Anteil von ΔE beruht auf den relativistischen (Dirac-)Beiträgen?

¹Die Beiträge der Hyperfeinstruktur in den experimentellen Werten sind hier der Einfachheit halber weggelassen. Originalliteratur zu diesem Experiment finden Sie auf der e-learning Plattform Moodle.

Lösung: Unter Vernachlässigung der Hyperfeinstruktur kann man die Energieniveaus der Zustände schreiben:

$$E_{n,j} = E_n \left(1 + \frac{\alpha^2}{n} \left(\frac{1}{j + 1/2} - \frac{3}{4n} \right) \right) + \Delta E_{Lamb}$$

Der erste Term entspricht einfach den Bohr'schen Energieniveaus und somit ist

$$(E_{4s} - E_{2s}) - \frac{1}{4}(E_{2s} - E_{1s})_{\text{Bohr}} \propto \frac{1}{4^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2} \right) = 0$$

Da es sich bei allen Zuständen um s -Zustände handelt gilt immer $j = \frac{1}{2}$. Die Dirac-Beiträge sind also gegeben durch

$$\Delta E_{\text{Dirac}} = 13.6 \text{ eV} \cdot \frac{\alpha^2}{n^3} \left(1 - \frac{3}{4n} \right),$$

für den $1s$ -Zustand ist der Term $\frac{1}{n^3} \left(1 - \frac{3}{4n} \right)$ gleich $\frac{1}{4}$, für den $2s$ -Zustand gleich $\frac{5}{64}$ und für den $4s$ -Zustand gleich $\frac{13}{1024}$. Damit erhält man

$$\left[(E_{4s} - E_{2s}) - \frac{1}{4}(E_{2s} - E_{1s}) \right]_{\text{Dirac}} = -\alpha^2 13.6 \text{ eV} \frac{23}{1024} = 16.3 \mu\text{eV}.$$

Dies entspricht einer Frequenz von

$$\left[(E_{4s} - E_{2s}) - \frac{1}{4}(E_{2s} - E_{1s}) \right]_{\text{Dirac}} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 16.3 \mu\text{eV}}{6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}} = 3.93 \text{ GHz}.$$

Somit ergibt sich für den Zusammenhang aus den Messungen und der gesuchten Lamb-shift E_{1s}^L :

$$\Delta E_{\text{gem}} = 4797 \text{ MHz} = \Delta E_{\text{Dirac}} + \left((\Delta E_{4s}^L - \Delta E_{2s}^L) - \frac{1}{4}(\Delta E_{2s}^L - \Delta E_{1s}^L) \right)$$

und damit

$$\Delta E_{1s}^L = 4(4797 - 3930 - 131 + \frac{5}{4} 1057) \text{ MHz} = 8229 \text{ MHz}.$$

Aufgabe 3: Hyperfeinstruktur und Dopplereffekt (4P)

Neben den relativistischen Korrekturen gibt es noch weitere Korrekturen zu den Energiezuständen des Wasserstoffatoms. Eine davon ist die Hyperfeinstruktur, die durch den Spin I des Protons (Kernspin) verursacht wird. Für $1s$ -Zustände lässt sich diese Korrektur schreiben als

$$\Delta E_{I,j} = \frac{2}{3} g_j g_I \frac{\mu^3 \alpha^4 c^2}{2m_e m_K} (F(F+1) - j(j+1) - I(I+1)) \quad (1)$$

Wobei, g_j wie aus Aufgabe 1 b), $g_I = 5.585$ der g -Faktor des Kerns und μ die reduzierte Masse des Systems ist. $\vec{F}$ bezeichnet den Gesamtspin ($\vec{F} = \vec{j} + \vec{I}$) und j den Gesamtdrehimpuls des Elektrons.

- a) Bestimmen Sie die Hyperfeinaufspaltung $\Delta E_{I,j}$ zwischen den beiden Zuständen $1s_{1/2}$ ($F = 1$) und $1s_{1/2}$ ($F = 0$) des Grundzustands des Wasserstoffatoms. Drücken Sie das Ergebnis in Einheiten von $[\text{cm}^{-1}]$, $[\text{Hz}]$ und $[\text{eV}]$ aus.

- b) Mit welcher relativen Genauigkeit muss der $1s \rightarrow 2p$ Übergang im Wasserstoffatom spektroskopiert werden, damit die $1s$ -Hyperfeinaufspaltung aufgelöst werden kann?
- c) Auch das Antiteilchen des Elektrons (Positron) kann mit einem Elektron für kurze Zeit einen gebundenen Zustand eingehen, der Positronium genannt wird. Welche Größen ändern sich für das Positronium in Gleichung (1) und welche neuen Werte besitzen sie? Bestimmen Sie analog zu Aufgabe (a) mit diesen neuen Werten die Hyperfeinaufspaltung des $1s$ -Zustands im Positronium.
- d) Die 21cm-Linie von Wasserstoff wurde mit sehr hoher Präzision vermessen. Sie lässt sich auch in den Spektren von Galaxien nachweisen, doch ist sie hier normalerweise leicht gegenüber dem Messwert verschoben, der sich bei Labormessungen auf der Erde ergibt. Für die Galaxien N959 und O255-36 erscheint die Linie z.B. bei um 0,042cm bzw. 0,437cm größeren Wellenlängen. Wie interpretieren Sie dieses Ergebnis?

Lösung:

Für den $1s_{1/2}(F=0)$ ist $n=1$, $F=0$, $l=0$, $s=1/2$ und $j=1/2$, für den $1s_{1/2}(F=1)$ ist $F=1$, $l=0$, $s=1/2$ und $j=1/2$, d.h. einmal stehen $\vec{j}$ und $\vec{F}$ antiparallel und im anderen Fall parallel zueinander. Somit ergibt sich für die Aufspaltung aufgrund der Hyperfeinstruktur:

$$\Delta E_{HFS}(1s_{1/2}(F=1) - 1s_{1/2}(F=0)) = \frac{2}{3} g_j g_I \frac{\alpha^4 \mu^3 c^2}{2m_e m_K} \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{6}{4}\right) \right) = \frac{2}{3} g_j g_I \frac{\alpha^4 \mu^3 c^2}{m_e m_K} = 9.28 \cdot 10^{-24} J.$$

Dies entspricht

$$\Delta E_{HFS}(1s_{1/2}(F=1) - 1s_{1/2}(F=0)) = \frac{9.28 \cdot 10^{-25} J}{1.6 \cdot 10^{-19} J/eV} = 5.87 \cdot 10^{-6} eV.$$

Die hierzu gehörige Wellenlänge ist

$$\lambda_{HFS}^{-1} = \frac{\Delta E_{HFS}}{hc} = \frac{9.28 \cdot 10^{-25} J}{6.626 \cdot 10^{-34} Js \cdot 2.998 \cdot 10^8 m/s} = 0.0467 \text{ cm}^{-1},$$

also entsprechend einer Wellenlänge von 21cm und einer Frequenz von

$$\nu_{HFS} = c \cdot \lambda_{HFS}^{-1} = 2.998 \cdot 10^8 m/s \cdot 4.67 \text{ m}^{-1} = 1.4 \text{ GHz}$$

- b) Relative Genauigkeit: $5,87 \cdot 10^{-6} \text{ eV} / 10,2 \text{ eV} = 5,7 \cdot 10^{-7}$.

c)

Um das Positronium richtig zu behandeln muss man

$$g_I \rightarrow g_S = 2 \quad \mu \rightarrow \frac{m_e}{2} \quad m_k \rightarrow m_e$$

Damit ergibt sich für die Hyperfeinaufspaltung des Positroniums:

$$\Delta E_{HFS}(1s_{1/2}(F=1) - 1s_{1/2}(F=0)) = \frac{1}{3}\alpha^4 m_e c^2 = 4.8 \cdot 10^{-4} \text{eV} \quad (1)$$

Gemessen wird aber ein abweichender Wert von $8.5 \cdot 10^{-4} \text{eV}$. Der Grund hierfür ist ein zusätzlicher Term in der e^+e^- -Wechselwirkung der in der ep -Wechselwirkung nicht vorhanden ist ($e^-e^+ \rightarrow \gamma^* \rightarrow e^-e^+$).

d)

Die höhere Wellenlänge ergibt sich daraus, dass die Galaxien sich von unserer Galaxie entfernen. Dies verschiebt die Wellenlängen zu größeren Werten. Die Wellenlängenänderung aufgrund der Relativbewegung der Galaxien beträgt:

$$\Delta\lambda = \lambda_0 \frac{v}{c}$$

Die Galaxien bewegen sich also mit Geschwindigkeiten von

$$v = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$$

Es ergibt sich für die Galaxie N959 eine Geschwindigkeit von 601 km/s und für O255-36 6208 km/s.