

Zeeman-Spektroskopie ¹

Julia Kisela und Rainer Bäuerle

Wir beobachteten den Zeeman-Effekt mit Hilfe einer Lummer-Gehrke-Platte. Weiterhin wurde die Aufspaltung der Linien für drei verschieden starke Magnetfelder gemessen und daraus μ_B bestimmt. Anschließend wurde mit einem Präzissionsspektrometer die rote Cadmium-Linie bestimmt und eine weitere Linie wurde als Wolfram-Linie identifiziert.

Als besondere Auswertung testiert: Datum, Unterschrift

¹Versuch F44, durchgeführt am 01.02.16, betreut durch Janko Nauta

Inhaltsverzeichnis

1	Zeeman-Spektroskopie	1
1.1	Theorie	1
1.1.1	Der normale Zeeman-Effekt	1
1.1.2	Der anormale Zeeman-Effekt	4
1.2	Versuchsanordnung	7
1.3	Versuchsdurchführung	9
1.3.1	Überprüfung der Polarisierung	9
1.3.2	Eichung des Magnetfeldes	9

1 Zeeman-Spektroskopie

1.1 Theorie

Befinden sich Atome in einem externen Magnetfeld, so kommt es zur Aufspaltung der atomaren Spektrallinien. Diesen Effekt nennt man Zeeman-Effekt, benannt nach dem niederländischen Physiker Pieter Zeeman(1865-1943), welcher für diese Entdeckung 1902 den Nobelpreis bekam. Man unterscheidet zwischen normalem und anormalem Zeeman-Effekt; der normale Zeeman-Effekt ist ein Spezialfall des anormalen Zeeman-Effekts, bei dem der Gesamtspin Null wird: $\mathbf{S} = \sum_i \mathbf{s}_i = 0$.

1.1.1 Der normale Zeeman-Effekt

Die Emission von Licht aus Atomen beschreibt man klassisch mit einem Dipol. Dieser wird durch einen positiv geladen Kern und ein negativ geladenes und um den Kern kreisendes Elektron dargestellt. Für das Dipolmoment gilt $\mathbf{p} = e\mathbf{r}$. Man legt den Koordinatenursprung in den Kern. Dadurch lässt sich das System als linearer Oszillator beschreiben und man kann folgende Bewegungsgleichung aufstellen:

$$m_e \ddot{\mathbf{r}} + m_e \omega_0^2 \mathbf{r} = 0 \quad (1.1)$$

m_e ist die Masse des Elektrons, ω_0 seine Eigenfrequenz.

Mit dem nun in z -Richtung angelegten B -Feld wirkt eine Lorenzkraft auf das Elektron, wodurch der Dipol in Präzession versetzt wird. Die daraus resultierende Schwingungsgleichung lautet:

$$m_e \ddot{\mathbf{r}} + m_e \omega_0^2 \mathbf{r} + |\mathbf{v} \times \mathbf{B}| = 0 \quad (1.2)$$

Mit der Larmorfrequenz

$$\omega_L = \frac{Be}{2m_e} \quad (1.3)$$

ergibt sich:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + 2\omega_L \dot{y} = 0 \quad (1.4)$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y + 2\omega_L \dot{x} = 0 \quad (1.5)$$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \quad (1.6)$$

Mit den komplexen Ansatz $x = ae^{i\omega t}$ und $y = be^{i\omega t}$ ergibt sich das homogene lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2)a + 2i\omega_L \omega b &= 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2)b - 2i\omega_L \omega a &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Die nichttriviale Lösung lautet:

$$\omega_{1,2} = \mp\omega_L + \sqrt{\omega_0^2 + \omega_L^2} \approx \omega_0 \mp \omega_L \quad (1.8)$$

Wobei ω_L gegenüber ω_0 klein ist und daher vernachlässigt werden kann. Daraus ergibt sich die Frequenzverschiebung $\Delta\nu$ in Bezug auf $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ von:

$$\Delta\nu = \pm \frac{\omega_L}{2\pi} = \pm \frac{eB}{4\pi m_e} \quad (1.9)$$

Die Spektrallinien spalten sich in drei Komponenten, das Lorentztriplett, auf: man erhält eine unverschobene (weil in z -Richtung keine Lorentzkraft wirkt) und zwei um $\mp \frac{\omega_L}{2\pi}$ verschobene Linien.

Mit Hilfe des homogenen linearen Gleichungssystems 1.7 kann man über die Polarisationsrichtung Aussagen treffen. Wird $\omega_1 = -\omega_L + \sqrt{\omega_0^2 + \omega_L^2}$ in eine der beiden Gleichungen eingesetzt, ergibt sich für die komplexe Amplitude $a = -ib = be^{-i\frac{\pi}{2}}$, d.h. die x -Phase hinkt der y -Phase um $\frac{\pi}{2}$ hinterher, die zugehörige Lichtwelle ist rechts zirkular polarisiert (σ^-). Mit ω_2 lässt sich analog verfahren, wobei hier die Amplitude $a = -ib = be^{+i\frac{\pi}{2}}$ ist und es so eine links zirkular polarisierte Welle (σ^+) ist. Die unveränderte Linie ist linear polarisiert (π). Beobachtet man in Richtung des Magnetfeldes, so ist die π -Linie nicht zu sehen, da der Dipol in Schwingungs-

richtung keine Strahlung abgibt.

In der wellenmechanischen Betrachtung ist die Hamiltonfunktion eines Elektrons mit der Masse m_e im Feld des Atomkerns

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} + V \quad (1.10)$$

wobei hier $\mathbf{p}$ der Impuls des Elektrons und $V = \frac{Ze^2}{r}$ die potentielle Energie des Elektrons im elektrischen Potential des Kerns ist. Im homogenen Magnetfeld $\mathbf{B}$ verändert sich der Impuls zu $\mathbf{p}_B = \mathbf{p} + e\mathbf{A}$, mit $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$, dadurch ergibt sich für die Hamiltonfunktion

$$H = \frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2}{2m_e} + V \quad (1.11)$$

Den Differentialoperator $-i\hbar\nabla$ ordnen wir dem Impuls $\mathbf{p}$ zu, der $\mathbf{A}^2$ -Term kann vernachlässigt werden. Mit der Coulomb-Eichung $\text{div}\mathbf{A} = 0$ ergibt sich für den Hamiltonoperator

$$H = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\nabla^2 + \frac{2e}{\hbar} \mathbf{A} \cdot \nabla + \frac{e^2}{\hbar^2} \mathbf{A}^2 \right) + V \quad (1.12)$$

Für ein konstantes Magnetfeld in z -Richtung gilt:

$$\begin{aligned} A_x &= -\frac{B}{2}y \\ A_y &= \frac{B}{2}x \\ A_z &= 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

daraus folgt:

$$\mathbf{A} \cdot \nabla = \frac{B}{2} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{B}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (1.14)$$

Setzt man Gleichung 1.14 und den Hamiltonoperator 1.12 in die Schrödinger-Gleichung ein, ergibt sich mit der Coulombwechselwirkung $V(r) = \frac{Ze^2}{r}$ folgende

Wellengleichung:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta + \frac{eB}{2m_e}\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} + V(r)\right)\Psi = E\Psi \quad (1.15)$$

Die Gleichung lässt sich durch den Separationansatz lösen:

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (1.16)$$

Für die Energien gilt:

$$E_m = E_0 + B\frac{e\hbar}{2m_e}m \quad \text{mit } m = -l, \dots, l \quad (1.17)$$

E_0 ist die Energie ohne Magnetfeld, m die magnetische Quantenzahl und l die Drehimpulsquantenzahl.

Es entstehen verschiedene Energieniveaus, welche in Abhängigkeit der Magnetquantenzahl m gegenüber dem ursprünglichen Energieniveau E_0 verschoben sind. Zwei Niveaus E_m und E_{m+1} haben einen Energieunterschied von

$$\Delta E = \frac{e\hbar}{2m_e}B \quad (1.18)$$

daraus ergibt sich eine Frequenzaufspaltung von

$$\Delta\nu = \frac{\Delta E}{\hbar} = \frac{eB}{4\pi m_e} \quad (1.19)$$

Das entspricht dem Ergebnis der halbklassischen Betrachtungsweise.

1.1.2 Der anormale Zeeman-Effekt

Der anormale Zeeman-Effekt tritt auf, wenn der Gesamtelektronenspin $\mathbf{S}$ nicht verschwindet. Da dies auf die meisten Atome zutrifft, ist dieser Effekt deutlich häufiger zu beobachten als der normale Zeeman-Effekt. Durch den zusätzlichen Elektronenspin entsteht ein weiteres magnetisches Moment

$$\mu_s = -2\frac{\mu_B}{\hbar}\mathbf{S} \quad (1.20)$$

Da der Spin keine klassische Entsprechung hat, muss der anormale Zeeman-Effekt quantenmechanisch betrachtet werden. Ist die L-S-Kopplungsenergie V_{LS} groß gegen die Kopplung der einzelnen Momente mit dem Magnetfeld, d.h. ist das äußere Magnetfeld schwach, so koppeln der Gesamtbahndrehimpuls $\mathbf{L}$ und der Gesamtspin $\mathbf{S}$ der Elektronen zu einem Gesamtdrehimpuls $\mathbf{J}$, welcher langsam um die Richtung des äußeren Magnetfeldes präzidiert. $\mathbf{L}$ und $\mathbf{S}$ präzidieren ihrerseits mit der Frequenz $\omega_L = \frac{V_{LS}}{\hbar}$ um $\mathbf{J}$. Die magnetischen Momente μ_L und μ_S zeigen in die Gegenrichtung von $\mathbf{L}$ und $\mathbf{S}$. Das resultierende Moment μ_J zeigt jedoch im Allgemeinen nicht in die Gegenrichtung von $\mathbf{J}$, sondern präzediert um $\mathbf{J}$. Da seine Präzession schnell ist, kann man die Position von μ_J zeitlich mitteln. Als Mittel bleibt die Projektion von μ_J auf $\mathbf{J}$ übrig

$$\langle \mu_J \rangle = (\mu_J)_J = \frac{\mu_J \cdot \mathbf{J}}{|\mathbf{J}|} \quad (1.21)$$

Errechnet man das zeitliche Mittel $\langle \mu_J \rangle$ aus dem Vektormodell, so erhält man unter Verwendung des Bohrschen Magnetons $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$

$$\begin{aligned} \langle \mu_J \rangle &= \frac{3J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2\sqrt{J(J+1)}} \mu_B \\ &= g_J \sqrt{J(J+1)} \mu_B = g_J \mu_B \frac{|\mathbf{J}|}{\hbar} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Hierbei wurde der Lande-Faktor g_J definiert durch:

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} \quad (1.23)$$

Mit $J_z = m_J \hbar$ erhält man somit für die z -Komponente des mittleren magnetischen Moments

$$\langle \mu_J \rangle_z = m_J g_J \mu_B \quad (1.24)$$

Die potentielle Energie eines magnetischen Moments im äußeren Feld ist gegeben durch $E = -\mu \cdot \mathbf{B}$, daher erhalten wir in unserem Fall bei einem Magnetfeld in z -Richtung die magnetische Zusatzenergie:

$$E = -\langle \mu_J \rangle_z \mathbf{B} = -m_J g_J \mu_B \mathbf{B} \quad (1.25)$$

Für den energetischen Abstand einer aufgespaltenen Linie zur unverschobenen Linie gilt:

$$\Delta E = \mu_B B (g_{J,2} m_{J,2} - g_{J,1} m_{J,1}) \quad (1.26)$$

und somit für den Frequenzabstand:

$$\Delta \nu = \frac{\mu_B B}{\hbar} (g_{J,2} m_{J,2} - g_{J,1} m_{J,1}) \quad (1.27)$$

wobei $g_{J,i}$ die g -Faktoren der zu dem jeweiligen Übergang gehörenden Zustände sind.

1.2 Versuchsanordnung

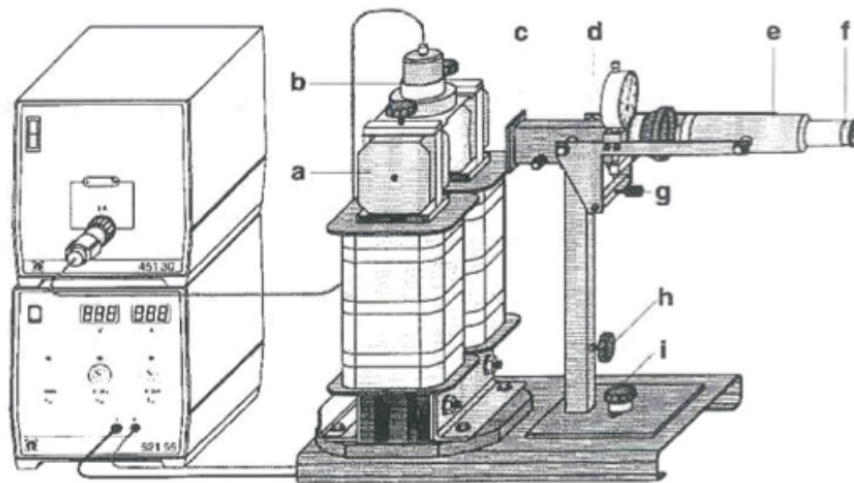


Abb. 1.1: Skizze des Versuchsaufbaus zur Beobachtung des normalen Zeeman-Effekts, aus [1]

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 1.1 dargestellt, dabei bedeuten die Buchstaben das Folgende:

- a) magnetischen Polschuhe: im Bild vorne befindet sich ein “Guckloch”, um die polarisierten Wellen in Magnetfeldrichtung beobachten zu können und um in Teil II des Versuchs das Licht der Cd-Lampe in die Glasfaser einzuspeisen.
- b) Cadmium-Lampe (fest eingespannt)
- c) FarbfILTER
- d) Lummer-Gehrcke-Platte
- e) Teleskop
- f) Okular
- g) Höhenstellschraube mit analoger Drehanzeige für die spätere Messung.
- h) Stellschraube (fest während des Versuchs)
- i) siehe h)

Die Interferenzeffekte werden in der Lummer-Gehrcke-Platte erzeugt. Zuerst wird das Licht aus der Cd-Lampe mit Hilfe eines Prismas in die Platte eingekoppelt. Dort wird es mehrfach reflektiert (siehe Abbildung 1.2), wobei bei jeder Reflektion ein kleiner Teil der Lichtintensität an der Oberfläche der Lummer-Gehrcke-Platte gebrochen wird und austritt. Die ausgetretenen Strahlen überlagern sich und man erkennt durch das Fernrohr ein Interferenzmuster.

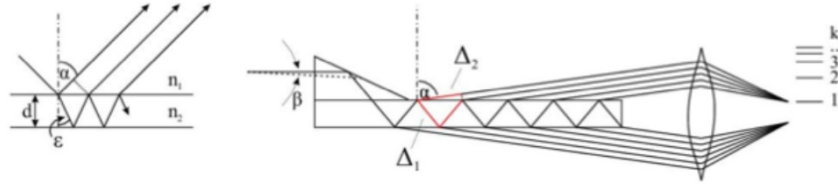


Abb. 1.2: Schematische Beschreibung der Lummer-Gehrcke-Platte, aus [1]

1.3 Versuchsdurchführung

1.3.1 Überprüfung der Polarisisation

Durch den Rotfilter werden alle Linien außer der roten (643.8 nm) ausgeblendet. Das Fernrohr wird so ausgerichtet, dass die Linie über viele Ordnungen gut sichtbar ist. Mit angeschaltetem Magnetfeld kann man nun mit steigender Magnetfeldintensität die Aufspaltung der Linien sehr gut erkennen.

Wir beobachten die Linien senkrecht zum Magnetfeld. Vor den Rotfilter kann ein linearer Polarisationsfilter gehalten werden. Durch Drehen dieses Filters können je nach Richtung der Polarisisation die π -Linie bzw. die σ -Linien ausgeblendet werden. Zur Prüfung der Polarisisation bei Beobachtung in Richtung der Magnetfeldlinien wird der gesamte Sockel, auf dem die Spulen und Polschuhe stehen, gedreht und die Linien durch das in Paragraph 1.2 erwähnte Guckloch beobachtet. Mit Hilfe eines $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchens wird die zirkuläre Polarisisation der σ -Linien nachgewiesen. Die π -Linie ist bei dieser Beobachtungsrichtung nicht sichtbar.

1.3.2 Eichung des Magnetfeldes

Durch das Hoch- und Herunterfahren der Spannung durchläuft das Magnetfeld eine Hysterese-Kurve, die mit der Hall-Sonde gemessen wird, siehe Tabelle 1.1 und Abbildung 1.3. Der Fehler durch die Hysterese ist zu vernachlässigen.

Die Messungen werden mit $I = 8\text{ A}$, $I = 10\text{ A}$ und $I = 12\text{ A}$ durchgeführt, für das

Tabelle 1.1: Messwerte für die Hysteresekurve

I[A]	1. Durchgang		2. Durchgang		3. Durchgang	
	B_{hoch} [T]	B_{runter} [T]	B_{hoch} [T]	B_{runter} [T]	B_{hoch} [T]	B_{runter} [T]
0	0	0.001 ± 0.002		0.001 ± 0.002		0.001 ± 0.005
2	0.077 ± 0.005	0.082 ± 0.005	0.080 ± 0.005	0.081 ± 0.005	0.076 ± 0.005	0.077 ± 0.005
4	0.155 ± 0.005	0.158 ± 0.005	0.157 ± 0.005	0.157 ± 0.005	0.155 ± 0.005	0.155 ± 0.005
6	0.230 ± 0.005	0.233 ± 0.005	0.227 ± 0.005	0.227 ± 0.005	0.227 ± 0.005	0.225 ± 0.005
8	0.305 ± 0.005	0.308 ± 0.005	0.303 ± 0.005	0.300 ± 0.005	0.300 ± 0.005	0.297 ± 0.005
10	0.375 ± 0.005	0.380 ± 0.005	0.380 ± 0.005	0.370 ± 0.005	0.368 ± 0.005	0.369 ± 0.005
12	0.435 ± 0.005	0.437 ± 0.005	0.431 ± 0.005	0.431 ± 0.005	0.426 ± 0.005	0.426 ± 0.005
13	0.460 ± 0.005		0.445 ± 0.005		0.446 ± 0.005	

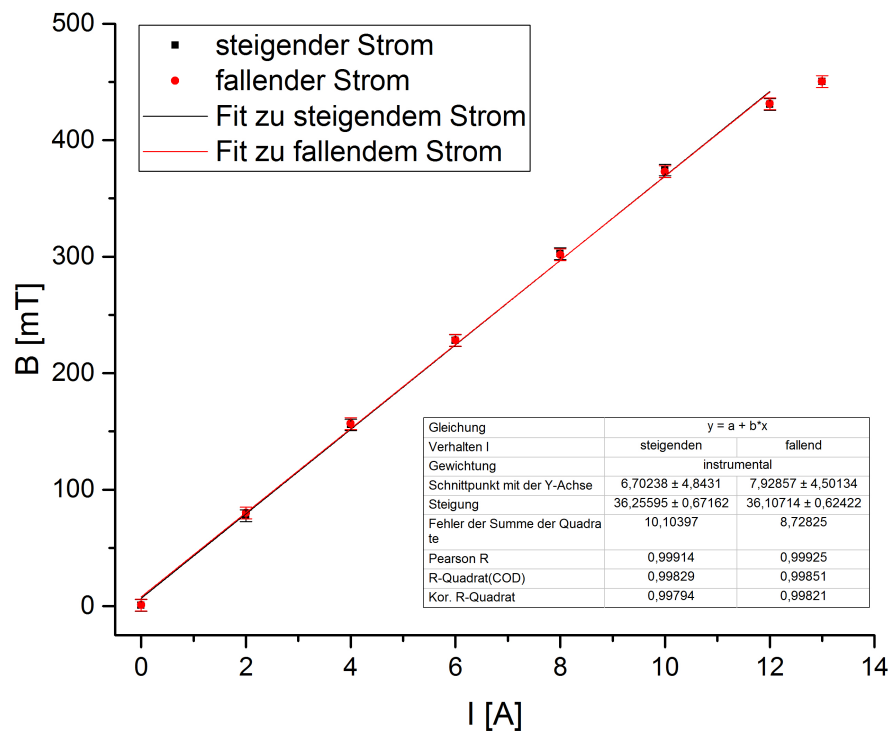


Abb. 1.3: Hysteresekurve des Magnetfeldes. Als Werte wurden die Mittelwerte aus Tabelle 1.1 verwendet. Die Fits wurden mit *OriginPro 2016G* durchgeführt. Da zwischen Rot und Schwarz kaum unterschieden werden kann, ist der Hystere-seeffekt vernachlässigbar.

Magnetfeld ergeben sich mit den Fits aus Tabelle 1.3 folgende Werte:

$$B(8A) = (0.296 \pm 0.008)T$$

$$B(8A) = (0.369 \pm 0.010)T$$

$$B(8A) = (0.441 \pm 0.012)T$$

Position der Interferenzstreifen

Die Stromstärke wird auf die festen Werte 8 A, 10 A und 12 A eingestellt. Es werden 12 nebeneinander liegende Ordnungen der π -Linien und die zugehörigen σ -Linien ausgemessen, siehe Tabellen 1.2, 1.3 und 1.4.

Tabelle 1.2: Position der Linien bei einer Stromstärke von 8 A

k	σ^-	π	σ^+
1	$57,81 \pm 0,70$	$67,91 \pm 1,38$	$75,47 \pm 0,80$
2	$116,16 \pm 0,30$	$131,44 \pm 0,37$	$138,70 \pm 0,11$
3	$184,83 \pm 0,88$	$197,72 \pm 1,85$	$204,85 \pm 0,80$
4	$255,08 \pm 0,36$	$269,57 \pm 0,54$	$275,54 \pm 0,21$
5	$328,52 \pm 0,40$	$342,12 \pm 0,82$	$349,57 \pm 0,49$
6	$407,65 \pm 0,28$	$419,75 \pm 0,42$	$428,08 \pm 0,36$
7	$491,23 \pm 0,32$	$504,23 \pm 0,37$	$513,23 \pm 0,32$
8	$581,96 \pm 0,32$	$594,14 \pm 0,26$	$604,51 \pm 0,28$
9	$682,07 \pm 0,43$	$695,20 \pm 0,28$	$706,74 \pm 0,29$
10	$793,43 \pm 0,47$	$808,19 \pm 0,24$	$821,91 \pm 0,34$
11	$922,20 \pm 0,40$	$939,92 \pm 0,23$	$957,13 \pm 0,47$
12	$1083,15 \pm 0,48$	$1106,92 \pm 0,32$	$1131,00 \pm 0,55$

Tabelle 1.3: Position der Linien bei einer Stromstärke von 10 A

k	σ^-	π	σ^+
1	$58,18 \pm 0,68$	$71,29 \pm 1,02$	$79,95 \pm 0,67$
2	$117,12 \pm 0,30$	$133,21 \pm 0,42$	$143,52 \pm 0,14$
3	$185,50 \pm 0,61$	$201,33 \pm 0,68$	$210,27 \pm 0,35$
4	$255,57 \pm 0,35$	$271,61 \pm 0,38$	$280,78 \pm 0,24$
5	$328,93 \pm 0,29$	$345,33 \pm 0,22$	$355,29 \pm 0,17$
6	$407,74 \pm 0,25$	$423,59 \pm 0,17$	$434,42 \pm 0,16$
7	$488,88 \pm 0,44$	$510,39 \pm 0,30$	$519,56 \pm 0,02$
8	$582,58 \pm 0,27$	$598,67 \pm 0,16$	$612,04 \pm 0,20$
9	$678,84 \pm 0,42$	$694,48 \pm 0,45$	$716,48 \pm 0,28$
10	$793,58 \pm 0,30$	$813,48 \pm 0,18$	$832,04 \pm 0,22$
11	$923,35 \pm 0,19$	$946,65 \pm 0,14$	$970,40 \pm 0,20$
12	$1085,45 \pm 0,17$	$1115,09 \pm 0,15$	$1147,24 \pm 0,22$

Tabelle 1.4: Position der Linien bei einer Stromstärke von 12 A

k	σ^-	π	σ^+
1	$55,41835 \pm 0,60523$	$72,01443 \pm 0,43609$	$81,89435 \pm 0,20873$
2	$115,7081 \pm 0,25013$	$134,12377 \pm 0,34344$	$145,45141 \pm 0,11259$
3	$184,34669 \pm 0,53773$	$202,2157 \pm 0,41587$	$212,38012 \pm 0,22021$
4	$253,63515 \pm 0,37624$	$272,0844 \pm 0,22772$	$283,09583 \pm 0,15165$
5	$326,97334 \pm 0,26577$	$345,88459 \pm 0,13647$	$357,89896 \pm 0,09434$
6	$405,58685 \pm 0,23184$	$424,09451 \pm 0,11798$	$437,11259 \pm 0,11066$
7	$489,74698 \pm 0,26642$	$508,43853 \pm 0,14249$	$522,73682 \pm 0,13497$
8	$580,36514 \pm 0,20163$	$599,7142 \pm 0,11468$	$616,15295 \pm 0,1118$
9	$679,89873 \pm 0,23174$	$700,87791 \pm 0,15049$	$719,8034 \pm 0,13423$
10	$791,88834 \pm 0,18932$	$815,08322 \pm 0,13364$	$837,55518 \pm 0,14519$
11	$922,33341 \pm 0,15832$	$949,33531 \pm 0,12346$	$977,51934 \pm 0,1588$
12	$1084,85421 \pm 0,14305$	$1119,40839 \pm 0,13014$	$1158,07518 \pm 0,20355$

Literaturverzeichnis

[1] Zeeman-Effekt, Praktikumsanleitung