

Blatt 5 (Präzisierung der Formulierung der Aufgabenstellung)

Nr. 1b/2 $\text{mod}_p(tx) = t \odot x$

$$\text{mod}_p(t+x) = t \oplus x$$

Notation: Eine Familie von Elementen einer Menge M ist eine Abbildung von einer Indexmenge I nach M , $\varphi: I \rightarrow M$ geschrieben $(a_i)_{i \in I}$, $a_i \in M \quad \forall i \in I$

Beispiel: $\sum_{i \in I} x_i$ für Zahlenmengen

$$\bigcap_{i \in I} M_i \quad \text{wenn } M_i \text{ Mengen sind}$$

$$\bigcup_{i \in I} M_i \quad \text{--- " ---}$$

Bemerkung: Elemente a_i in $(a_i)_{i \in I}$ dürfen mehrfach vorkommen

Definition 1.4.2: Sei V ein Vektorraum über dem Körper K

Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt Untervektorraum von V , wenn

- 1) $U \neq \emptyset$
- 2) $\forall u, v \in U \Rightarrow u+v \in U$ (U ist abgeschlossen bzgl. Addition)
- 3) $u \in U, \alpha \in K \Rightarrow \alpha u \in U \quad \forall u \in U, \alpha \in K$

Definition 1.4.2' Eine Teilmenge U eines Vektorraums V heißt Untervektorraum, wenn U bzgl. der Operationen in V selbst ein Vektorraum ist.

Bem. 1.4.3 Die beiden Definitionen sind äquivalent.

• Sei $v \in V$, dann ist $U = K \cdot v = \{ \alpha v \mid \alpha \in K \}$ ein Untervektorraum (UVR)

Beweis: nachrechnen.

Lemma 1.4.4 Sei V ein K -Vektorraum und $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untervektorräumen. Dann ist $U = \bigcap_{i \in I} U_i$ ebenfalls ein UVR.

Beweis: Seien $u, v \in U$. Es folgt $u, v \in U_i \quad \forall i \in I$

$$(U_i \text{ UVR}) \Rightarrow u+v \in U_i \quad \forall i \in I$$

$$\Rightarrow u+v \in \bigcap_{i \in I} U_i = U$$

$\alpha \cdot u$ genauso.

□

Diese Aussage gilt nicht für die Vereinigung

Def 1.4.5 Sei V ein K -Vektorraum. Ein Ausdruck der Form $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ mit $\alpha_i \in K, v_i \in V, i=1, \dots, n$ heißt Linearkombination.

Sei $A \subset V$ eine beliebige Teilmenge, dann heißt die Menge: $\text{span } A = \langle A \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \mid n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in K, v_i \in A, i=1, \dots, n \right\}$ das Erzeugnis von A . $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$

Satz 1.4.5 Sei V ein K -Vektorraum.

- 1) $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in V \quad \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in K, v_i \in V, i=1, \dots, n$
- 2) $A \subset \langle A \rangle$
- 3) $\langle A \rangle$ ist UVR von V
- 4) $\langle A \rangle$ ist der „kleinste“ ^{vektor}Unterraum von V , der A enthält
- 5) $\langle U \rangle = U$ für $U \subset V$ UVR
- 6) $A \subset B \Rightarrow \langle A \rangle \subset \langle B \rangle$ und $A \subset \langle B \rangle \Rightarrow \langle A \rangle \subset \langle B \rangle$
 $\forall A, B \subset V$

Beweis: 1) Vektorraumaxiome nachrechnen

2) $1 \cdot v = v \Rightarrow A \subset \langle A \rangle$

3) Seien $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i, v = \sum_{i=1}^n \beta_i b_i$ (o.E. gleiche Länge, Erweiterung der kurzen Kette durch Nullen.)
 $u+v = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^n \beta_i b_i$
ist Linearkombination von Elementen aus A ,

daher $u+v \in \langle A \rangle$.

Sei $u \in \langle A \rangle$ wie oben, $\alpha \in K$: $\alpha u = \alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i = \sum_{i=1}^n \underbrace{\alpha \alpha_i}_{\in K} a_i \in \langle A \rangle$
 $\Rightarrow \langle A \rangle$ ist UVR.

4) Sei U UVR von V mit $A \subset U$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$ mit $\alpha_i \in K, u_i \in A$

$\Rightarrow \forall U$ mit $A \subset U$ gilt: $\langle A \rangle \subset U$.

insbesondere $\langle A \rangle \subset \bigcap_{A \subset U} U$, U UVR

Es gilt nach 2), dass $\langle A \rangle$ UVR mit $A \subset \langle A \rangle$

$\Rightarrow \bigcap_{A \subset U} U \subset \langle A \rangle \Rightarrow \text{Beh.}$

5) Aus 2) folgt: $U \subset \langle U \rangle$

Aus 1) folgt: $\langle U \rangle \subset U \Rightarrow U = \langle U \rangle$

6) Erste Inklusion folgt direkt aus der Definition von $\langle A \rangle$.

Die zweite folgt, indem sie $\langle A \rangle$ bilden und $\langle A \rangle = \langle \langle A \rangle \rangle$ in die erste einsetzen. $\square$

Definition 1.4.6 Sei V ein K -Vektorraum. Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ mit Elementen aus V und einer beliebigen Indexmenge I heißt Erzeugendensystem, wenn gilt:

$\forall v \in V \exists J \subset I$ endlich und $(\alpha_i)_{i \in J}, (v_i)_{i \in J}$ mit $\alpha_i \in K, v_i \in V$ und $v = \sum_{i \in J} \alpha_i v_i$

In Worten: Jedes $v \in V$ kann ^{man} als endliche Linearkombination von Elementen in $(v_i)_{i \in I}$ schreiben.

Ein Vektorraum V heißt endlich erzeugt, wenn es eine solche Familie mit endlich vielen Elementen gibt.

Zu jedem Vektorraum V gibt es mindestens ein Erzeugendensystem (ES): $V = \langle V \rangle$.

Weiteres Beispiel:

$\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$, $z = x + iy$, $\mathbb{C} = \langle 1, i \rangle$

(Man kann auch $\mathbb{C} = \langle \{1, i\} \rangle$ schreiben, allerdings ~~ist~~ ^{darf} man im Rahmen der Veranstaltung die Mengenklammer weglassen)

Erzeugendensystem für K^n

$$K^n = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \mid v_i \in K, i=1, \dots, n \right\}$$

Notation:

$$e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ - i-te Zeile}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ erzeugt } K^n.$$

$$\text{da } \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + v_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n v_i e_i$$

Ab jetzt: Alle Vektorräume in diesem Semester seien endlich erzeugt!

Definition 1.5.1 Eine Familie von Vektoren in V $(v_i)_{i \in I}$ heißt linear unabhängig, wenn gilt:

$$\sum_{i \in I} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i \in I.$$

Eine Familie heißt linear abhängig, wenn sie nicht linear unabhängig ist.

Lemma Sei V ein K -Vektorraum. Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine linear unabhängige Familie von Vektoren in V , dann gibt es keinen Vektor v_i in dieser Familie, so dass

$$v_i = \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} \alpha_j v_j$$

Beweis: $0 = \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} \alpha_j v_j - v_i = \sum_{j \in I} \alpha_j v_j$ mit $\alpha_i = -1$
 $\nRightarrow$ linear unabh.

Lemma: Umgekehrt gilt: Wenn kein Vektor der Familie $(v_i)_{i \in I}$ sich als Linearkombination der übrigen schreiben lässt, so ist die Familie linear unabhängig.

Beweis: Widerspruchsaussage: $\exists (\alpha_i)_{i \in I}$ mit $\sum_{i \in I} \alpha_i v_i = 0$ und mindestens ein $\alpha_i \neq 0$. Teile durch α_i .

$$\sum_{i \in I} \alpha_i v_i = 0 \Leftrightarrow v_i = \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} \frac{\alpha_j v_j}{\alpha_i} \quad \nRightarrow \text{Voraussetzung!}]$$