

1) Satz 1.5.2 Sei V ein K -VR und $v_1, \dots, v_n \in V$

Dann ist äquivalent:

- i) $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig
- ii) Ist $v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, dann ist $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ mit $\alpha_i \in K$ eindeutig bestimmt.

Bew.: 1) $\Rightarrow$ 2) Es reicht die Eindeutigkeit zu zeigen.

$$\text{Sei } v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i \Leftrightarrow 0 = v - v = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) v_i$$

$$v_i \text{ l.u.} \Rightarrow \alpha_i = \beta_i \quad \forall i=1, \dots, n$$

$$2) \Rightarrow 1) \quad 0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \text{ mit eindeutig bestimmten } \alpha_i \in K$$

$$\text{Da } 0 = \sum_{i=1}^n 0 \cdot v_i, \text{ folgt } \alpha_i = 0 \quad \forall i=1, \dots, n$$

Lemma 1.5.2.a Seien $v_1, \dots, v_n \in V$, V K -VR lin. unabh.

Dann ist auch jede Teilmenge der v_i lin. unabh.

Def. 1.5.3 Sei V K -VR. $(v_i)_{i \in I} \subseteq V$ heißt Basis von V

- falls:
- i) $\langle v_i \rangle_{i \in I} = V$, also $(v_i)_{i \in I}$ EZS. (Erzeugendensystem)
 - ii) $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig.

Korollar 1.5.4 Sei V ein K -VR, $(v_i)_{i \in I}$ Basis von V . Dann besitzt jedes $v \in V$ eine eindeutige Darstellung als lineare Kombination der $(v_i)_{i \in I}$.

Lemma 1.5.5 Seien $v_1, \dots, v_n \in V$, V K -VR. Dann ist äquivalent.

- i) $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig
- ii) $\exists k \in \{1, \dots, n\} : v_k \in \langle v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$
- iii) $\exists k \in \{1, \dots, n\} : \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n \rangle$

Sind die $v_1, \dots, v_r$ l. unabhängig, so lässt sich $k > r$ wählen in ii) & iii).

Satz 1.5.6 jeder endlich erzeugte Vektorraum besitzt eine Basis und jede solche Basis ist endlich.

Bew.: Sei $v_1, \dots, v_n \in \text{EZS}$. Ist $v_1, \dots, v_n$ l. unabhängig, so ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V . Sonst entferne $v_{p_1}, \dots, v_{p_k}$ solange bis $\{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v_{p_1}, \dots, v_{p_k}\}$ l. unabhängig. Es folgt sofort, dass $\text{EZS} =: B$ endlich ist.

Satz 1.5.7. Seien $v_1, \dots, v_n \in V$. V K -VR. (Dann ist äquivalent:

- i) $v_1, \dots, v_n$ Basis von V
- ii) $v_1, \dots, v_n$ max. linear unabhängig.
- iii) $v_1, \dots, v_n$ minimales EZS.

Bew.: i) $\Rightarrow$ ii) $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle = \langle v, v_1, \dots, v_n \rangle \quad \forall v \in V$
 $\Rightarrow \{v, v_1, \dots, v_n\}$ l. abhängig.

ii) $\Rightarrow$ iii) $\forall v \in V \quad v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \Leftrightarrow v - \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$

$\Rightarrow v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle \Rightarrow \langle v_1, \dots, v_n \rangle \in \text{EZS}$ ~~min~~ Die Minimalität folgt aus Lemma 1.5.5.

iii) $\Rightarrow$ i) Lemma 1.5.5

Satz 1.5.8 Basisergänzungssatz

Seien $v_1, \dots, v_r \in V$, V K -VR, $v_1, \dots, v_r$ l. unabhängig

(Dann $\exists w_{r+1}, \dots, w_n$, so dass $v_1, \dots, v_r, w_{r+1}, \dots, w_n$ Basis von V bildet.

Bew.: Folgt aus der Bemerkung zu Lemma 1.5.5 &

Satz 1.5.7.