

25.11.14

Satz 1.5.9

Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis des K -VR V und sei $w_1, \dots, w_m$ ein ES.
Dann gilt $m \geq n$. $v_1, \dots, w_m$ ist genau dann auch eine Basis,
wenn $m = n$.

Bew:

Die Vektoren $v_2, \dots, v_n$ sind lin. unabh. und können zu einer Basis
ergänzt werden:

$$v_2, \dots, v_n, w_{i_1}, \dots, w_{i_{s_1}}.$$

Wiederhole diese Prozedur: $v_3, \dots, v_n, w_{i_1}, \dots, w_{i_{s_1}}$ ist lin. unabh.

Vervollständige zu Basis: $v_3, \dots, v_n, w_{i_1}, \dots, w_{i_{s_1}}, w_{i_{s_1+1}}, \dots, w_{i_{s_2}}.$

Führt man diesen Prozess immer weiter, d.h. ergänzt man alle v_i ,
so erhält man die Basis:

$$w_{i_1}, \dots, w_{i_{s_1}}, w_{i_{s_1+1}}, \dots, w_{i_{s_1+s_2}}, \dots, w_{i_{\sum_{k=1}^n s_k}}.$$

Anzahl der Elemente: $\sum_{k=1}^n s_k.$

In jedem Schritt wurde mindestens ein neuer Vektor hinzugefügt,
also $s_k \geq 1$ für $k=1, \dots, n \Rightarrow n \leq \sum_{k=1}^n s_k.$

Da $w_{i_1}, \dots, w_{i_{\sum_{k=1}^n s_k}}$ lin. unabh. sind, gilt aber $\sum_{k=1}^n s_k \leq m.$

Sei nun $w_1, \dots, w_m$ ebenfalls eine Basis. Dann gilt mit
demselben Argument $m \leq n$, also $m = n$.

Nun sei umgekehrt $m = n$ und $w_1, \dots, w_m$ ein ES. Dann gibt
es ein $m' \leq m$, sodass $w_1, \dots, w_{m'}$ eine Basis von V ist.

Nach dem letzten Schritt ist damit $m' = n$, also $m' = m$
nach Voraussetzung. Damit muss $w_1, \dots, w_n$ bereits die gesuchte
Basis sein. $\square$

Korollar 1.5.9 a

In einem endl. erg. VR haben alle Basen dieselbe Länge.

Def 1.5.10

Die Dimension $\dim_K V$ oder $\dim V$ eines VR ist die Länge einer (jeder) Basis in V , also die Anzahl ihrer Elemente.

Bsp:

1) $K^n \Rightarrow \{e_1, \dots, e_n\}$ ist Basis, also $\dim K^n = n$.

2) $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$ -VR: $\mathbb{C} = \langle 1 \rangle$, also $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$.

3) $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$ -VR: $\mathbb{C} = \langle 1, i \rangle$, also $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

4) $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$ -VR ist nicht endl. erg. Wir schreiben $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$.

Korollar 1.5.11/12

Für einen K -VR V sind äquivalent:

(i) $\dim V = n$.

(ii) Es gibt ein System von n linear unabh. Vektoren, aber ~~keine~~ nicht von $n+1$.

(iii) Es gibt ein ES von n Vektoren, aber nicht von $n-1$.

Bew:

Satz 1.5.7 und Basisergänzung. $\square$

Korollar 1.5.14

Sei V ein K -VR und $U \subseteq V$ ein UVR. Dann gilt:

(i) $\dim U \leq \dim V$.

(ii) Gilt $\dim U = \dim V$, so ist $U = V$.

Bew:

Sei $u_1, \dots, u_m$ eine Basis von U ($m = \dim U$) und $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V ($n = \dim V$). Basisergänzung:

Wir finden eine Basis $u_1, \dots, u_m, v_{i_{m+1}}, \dots, v_{i_n}$ von V
(mit $n-m$ Elementen aus $v_1, \dots, v_n$ ergänzt). $\square$

1.6 Direkte Summen

Def 1.6.1

Sei V ein K -VR und seien $U_i \subset V$ $i=1, \dots, n$ UVR von V .

Dann def. wir die Summe

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = \left\{ v = \sum_{i=1}^n v_i \mid v_i \in U_i \text{ für } i=1, \dots, n \right\} \\ = \langle \{U_i\}_{i=1, \dots, n} \rangle.$$

Satz 1.6.2

Für $U = \sum_{i=1}^n U_i$ wie in der Def. 1.6.1 sind äquivalent:

- (i) Für alle $v \in U$ gilt es genau eine Familie $\{v_1, \dots, v_n\}$ mit $v_i \in U_i$, sodass $v = \sum_{i=1}^n v_i$.
- (ii) $\sum_{i=1}^n v_i = 0 \Rightarrow v_i = 0$ für $i=1, \dots, n$.
- (iii) Für alle $p \in \{1, \dots, n\}$ gilt $U_p \cap \sum_{i \neq p} U_i = \{0\}$.

Bew:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Klar.

(ii) $\Rightarrow$ (iii):

Sei für $q \in \{1, \dots, n\}$ $v \in U_q \cap \sum_{i \neq q} U_i$. Dann ist $v = \sum_{i \neq q} v_i$ für $v_i \in U_i$,
also $-v + \sum_{i \neq q} v_i = 0$. Wegen $-v \in U_q$ folgt $v=0$ wegen (ii).

(iii) $\Rightarrow$ (i):

Es sei $v = \sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n w_i$ mit $v_i, w_i \in U_i$, also $\sum_{i=1}^n (v_i - w_i) = 0$. Dann:

$$\underbrace{v_p - w_p}_{\in U_p} = - \sum_{i \neq p} (v_i - w_i) \in U_p \cap \sum_{i \neq p} U_i = \{0\}.$$

Somit folgt $v_p = w_p$ und da $p \in \{1, \dots, n\}$ bel. gewählt waren, gilt $v_i = w_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. $\square$

Def 1.6.3

Die Summe $U = \sum_{i=1}^n U_i$ heißt direkt, wenn die U_i eine der Bedingungen aus Satz 1.6.2 erfüllt ist. Wir schreiben

$$U = \bigoplus_{i=1}^n U_i.$$

Lemma 1.6.3a

Ist $U = \bigoplus_{i=1}^n U_i$ und sind die Mengen $\{v_{i,1}, \dots, v_{i,m_i}\}$ Basen der U_i für $i=1, \dots, n$, dann ist

$$\{v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,m_1}, v_{2,1}, \dots, v_{n,m_n}\}$$

eine Basis von U . (=Vereinigung aller die Basen der U_i).

Bew:

$$U_i = \langle v_{i,1}, \dots, v_{i,m_i} \rangle, \text{ also}$$

$$\begin{aligned} U &= \langle \{U_i\} \rangle = \langle \langle U_1 \rangle, \langle U_2 \rangle, \dots \rangle = \langle U_1, \dots, U_n \rangle \\ &= \langle v_{1,1}, \dots, v_{1,m_1}, v_{2,1}, \dots, v_{n,m_n} \rangle, \end{aligned}$$

d.h. diese Vektoren bilden ein E.S. lineare Unabh.:

$$0 = \sum_{i=1}^n v_i \Rightarrow v_i = 0 \text{ und für } i=1, \dots, n: 0 = \sum_{k=1}^{m_i} v_{i,k} \Rightarrow v_{i,k} = 0 \text{ für } k=1, \dots, m_i. \quad \square$$

Bem:

$$\text{Sei } v_1, \dots, v_n \text{ Basis von } V. \text{ Dann gilt } V = \bigoplus_{i=1}^n \langle v_i \rangle = \bigoplus_{i=1}^n K \langle v_i \rangle.$$

Satz 1.6.4

Sei V ein K -VR und $U \subset V$ UVR. Dann gibt es einen UVR $W \subset V$, genannt das „Komplement von U in V “, sodass $V = U \oplus W$.

Bew:

Sei $v_1, \dots, v_n$ Basis von V und $u_1, \dots, u_m$ Basis von U . Basisausgangung liefert eine Basis $u_1, \dots, u_m, v_{i_{m+1}}, \dots, v_{i_n}$ von V . Setze $W = \langle v_{i_{m+1}}, \dots, v_{i_n} \rangle$. □