

1) Linearität der Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha w) &= f^{-1}(\alpha f(v)) \quad | \quad w = f(v) \\ &= f^{-1}(f(\alpha v)) \\ &= \alpha v = \alpha f^{-1}(w) \end{aligned}$$

Linearität von f definiert durch: $f(v_i) = w_i$

Gilt: $f(u+v) = f(u) + f(v)$

$$\text{Zunächst: } u+v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^n \beta_i v_i = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) v_i$$

$$\begin{aligned} 2.) \quad f(u+v) &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) \cdot f(v_i) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) w_i \\ &= \sum \alpha_i w_i + \sum \beta_i w_i \\ &= \sum \alpha_i f(v_i) + \sum \beta_i f(v_i) \\ &= f(u) + f(v) \end{aligned}$$

Definition 3.1.04:

Sei δ_{ij} das Kronecker-Symbol mit

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i=j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Im Vektorraum K^n sei die „kanonische Basis“

3.) oder Standardbasis die Familie $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ mit den Einträgen $(e_j)_i = \delta_{ij}$

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ - } i\text{-te Stelle}$$

Damit hat das n -Tupel $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ die Darstellung $\sum_{i=1}^n a_i e_i$.

Definition 3.1.1:

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $m \times n$ Matrix mit Koeffizienten im Körper K ist ein rechteckiges Schema von Elementen $a_{ij} \in K$, $i=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$.

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Der erste Index ist der Zeilenindex i , der zweite ist der Spaltenindex.

Definition 3.1.1.a:

Das Matrix-Vektor-Produkt Ax einer $m \times n$ Matrix A mit einem Vektor $x \in K^n$ definiert durch

$$y = Ax \quad y_i = (Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

definiert eine lineare Abbildung $f: K^n \rightarrow K^m$.

Definition 3.1.1.b:

Die Menge $K^{m \times n}$ der $m \times n$ -Matrizen ist bzgl. der komponentenweisen Addition

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \dots$$

und Skalarmultiplikation

$$\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$$

ein Vektorraum über K .

6) Definition 3.1.1.b:

... Das neutrale Element ist die Nullmatrix mit

$a_{ij} = 0 \quad i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$ das inverse zu $A = (a_{ij})$ ist $-A = (-a_{ij})$.

7) Die Standardbasis von $K^{m \times n}$ ist die Familie $(E_{\mu\nu})_{\substack{\mu=1, \dots, m \\ \nu=1, \dots, n}}$ mit $E_{\mu\nu} = (\delta_{ij} \mu \delta_{j\nu})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \mu$$

$\downarrow$
 ν

Die „Spaltenvektoren von A “ sind die Vektoren $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \in K^m$,
die Zeilenvektoren sind $(a_{11}, \dots, a_{1n}),$

8) $(a_{21}, \dots, a_{2n}), \dots, (a_{m1}, \dots, a_{mn}) \in K^n$.

Damit wird A geschrieben als $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ oder $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$.

Betrachten wir die Abbildung $f: K^n \rightarrow K^m, x \mapsto Ax$, dann sind die Spaltenvektoren von A die Bilder der Standardbasis (e_j) .

Also ist: $f(e_j) = a_j$.

Definition 3.1.3:

Zu gegebenen Vektorräumen V und W mit Basen

$\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{W} = (w_1, \dots, w_m)$ definieren wir Abb.

$$\begin{array}{ccc} \beta_V: V \rightarrow K^n & & \beta_W: W \rightarrow K^m \\ v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} & & w = \sum_{i=1}^m \beta_i w_i \mapsto \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \end{array}$$

Damit heißt die zur Abbildung $f: V \rightarrow W$ bzgl. der
 10.) Basen $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ zugeordnete Matrix $A_{f, \mathcal{V}, \mathcal{W}}$.
 Sie ist die Matrix, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow \mathcal{K}_V & & \downarrow \mathcal{K}_W \\ K^n & \xrightarrow{A_x} & K^m \end{array}$$

1.) Schritt: f sei bestimmt durch seine Werte auf der Basis $\mathcal{V}$
 $f(v_j) \in W, j=1, \dots, n$

2.) Schritt: Schreibe $f(v_j)$ als Linearkombination der
 Basis $\mathcal{W}$

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

Sei nun $v = \sum_{j=1}^n x_j v_j$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(v) &= \sum_{j=1}^n x_j f(v_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) w_i, \quad y_i = \sum_{j=1}^n (a_{ij} x_j). \end{aligned}$$

Damit gilt: Ist die Matrix $A_{f, \mathcal{V}, \mathcal{W}}$ so gewählt, dass
 ihre Spaltenvektoren die Koordinaten der Bilder der Basis $\mathcal{V}$
 bzgl. der Basis $\mathcal{W}$ sind, so sind für beliebiges $v \in V$
 die Koordinaten von $f(v)$ bzgl. $\mathcal{W}$ gegeben durch Ax ,
 wobei $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ die Koordinaten von v bzgl. $\mathcal{V}$ sind.

Beispiel: Sei $f: V \rightarrow V$ die Identität $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis.

$$\Rightarrow f(v_j) = v_j$$

$$\Rightarrow A_{f, \mathcal{V}, \mathcal{V}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$$

Diese Matrix heißt n -dimensionale Einheitsmatrix E_n .

Beispiel: P_n , reelle Polynome vom Grad $\leq n$.

Sei $\mathcal{V} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$ eine Basis von P_n .

Sei $f: P_n \rightarrow P_n$

$$p(x) \mapsto p'(x)$$

1. f ist linear

$$\text{Summenregel: } (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

$$\text{Faktorregel: } (\alpha \cdot f(x))' = \alpha \cdot f'(x)$$

2. Bilder der Basis: $(x^n)' = nx^{n-1}$

3.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$