

① Def. ^{3.13c} Der VR der linearen Abb. eines K -VR V auf einen K -VR W wird als $\text{Hom}_K(V, W)$ bezeichnet der VR der linearen Selbstabb.

$f: V \rightarrow V$ heißt

$\text{End}_K(V)$ (Endomorphismen)

$\text{Hom}_K(V, W)$:

1) K -VR

2) Es gibt eine Bijektion zwischen $\text{Hom}_K(V, W)$ und $K^{m \times n}$, wenn $\dim_K V = n$ und $\dim_K W = m$

Satz 3.14

3) Die Bijektionen

$$\psi: \text{Hom}_K(V, W) \rightarrow K^{m \times n}$$

$$f \mapsto A_{f, V, W}$$

sind Isomorphismen der VR

Korollar 3.15

$$\dim \text{Hom}_K(V, W)$$

$$= \dim V \cdot \dim W$$

Komposition von Homomorphismen

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{g} & V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow k_U & & \downarrow k_V & & \downarrow k_W \\ K^m & \xrightarrow{B} & K^n & \xrightarrow{A} & K^r \end{array} \quad \begin{array}{l} g: U \rightarrow V \\ f: V \rightarrow W \\ h = f \circ g: U \rightarrow W \end{array}$$

„Spaltenvektoren sind die Koordinaten der Bilder der Basisvektoren“

A : Bilde einen Basisvektor in V auf eine Linearkomb. in W ab.

$$Bx \quad U = \sum_{i=1}^m x_i u_i$$

$$ABx \Leftrightarrow (g \circ f)(u)$$

Definiere: $C = A \cdot B$ als

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

②

Damit ist das Produkt von $A \in \mathbb{R}^{\overset{r \times n}{\cancel{m \times n}}}$ und $B \in \mathbb{R}^{\overset{n \times m}{\cancel{m \times n}}}$ eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{\overset{r \times m}{\cancel{m \times m}}}$. Insbesondere ist das Produkt $A \cdot B$ nur definiert, wenn die ^{Spalten}~~Zeilen~~zahl von A gleich der ^{Zeilen}~~Spalten~~zahl von B ist.

Das Element c_{ij} des Produktes $C = AB$ ist das Elementweise Produkt der Zeile i von A mit der Spalte j von B.

Zu zeigen bleibt:

$$A(Bx) = (AB)x$$

d.h., die ~~Abb~~ Matrix AB gehört zur Abb $f \circ g$

Diese Aussage ist wahr ist (Nachlesen!)

Definition 2.2.3

Eine Relation „ $\sim$ “ ~~ist eine~~ auf einer Menge M ist eine Teilmenge $R \subset M \times M$. Man schreibt

$$a \sim b \text{ für } (a, b) \in R$$

Eine Relation „ $\sim$ “ heißt Äquivalenzrelation, wenn gilt

- 1) $a \sim a \quad \forall a \in M$ (Reflexivität)
- 2) $a \sim b \Rightarrow b \sim a \quad \forall a, b \in M$ (Symmetrie)
- 3) $(a \sim b \wedge b \sim c) \Rightarrow a \sim c \quad \forall a, b, c \in M$ (Transitivität)

Wir sagen „ a ist äquivalent zu b “ ($a \sim b$)

Bsp: Das logische „ $\Leftrightarrow$ “ hat diese drei Eigenschaften

Bsp: Sei auf $M = \mathbb{Z}$

$$a \sim b \Leftrightarrow \text{mod}_m a = \text{mod}_m b$$

mit $m \in \mathbb{N}$ gegeben

Nachweis der Eigenschaften

$$1) \text{mod}_m a = \text{mod}_m b$$

$$a = k_1 m + r_1, b = k_2 m + r_2$$

$$a \sim b \Leftrightarrow r_1 = r_2$$

$$b \sim a \Leftrightarrow r_2 = r_1$$

③

$$3) c = k_3 m + r_3$$

$$b \sim c \Leftrightarrow r_2 = r_3$$

$$\Rightarrow r_1 = r_2 = r_3$$

Def: 2.2.3a Die Äquivalenzklasse zu $a \in M$ ist die Menge

$$[a] = \{b \in M \mid a \sim b\}$$

$$\text{Bsp.: } a \sim b \Leftrightarrow \text{mod } m a = \text{mod } m b$$

$$\text{z.B. } a=1 \quad [a] = \{k m + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{\dots, -2m+1, -m+1, 1, m+1, \dots\}$$

Bsp.: $f: V \rightarrow W$ ein VR-Homomorphismus und

$$u \sim v \Leftrightarrow f(u) = f(v)$$

Nachweis der Eigenschaften

$$1) f(u) = f(u) \quad \checkmark \quad 2) f(u) = f(v) \Rightarrow f(v) = f(u)$$

$$3) u \sim v \wedge v \sim w \Rightarrow u \sim w$$

$$f(u) = f(v) \wedge f(v) = f(w) \Rightarrow f(u) = f(w)$$

Satz 2.2.4 Sei " $\sim$ " eine ÄR auf M . Dann ist für $a, b \in M$ äquivalent:

$$1) a \sim b \quad 2) [a] = [b]$$

$$3) [a] \cap [b] \neq \emptyset$$

Insbesondere ist M disjunkte Vereinigung der Äquivalenzklassen.

Bew:

$$1 \Rightarrow 2: \text{ Sei } a \sim b \text{ und } c \in [a]$$

Dann gilt auch $a \sim c$ und aus der Transitivität

$b \sim c$, also $c \in [b]$. Umgekehrt, wenn $c \in [b]$ folgt

genauso wegen Symmetrie.

$$2 \Rightarrow 3: [a] = [b] \Rightarrow [a] \cap [b] \neq \emptyset$$

$$a \in [a] \Rightarrow a \in [b] \Rightarrow a \in [a] \cap [b]$$

und der Schnitt ist nicht leer.

④ $3 \Rightarrow 1: [a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow a \sim b$

Sei $c \in [a] \cap [b]$

$\Rightarrow c \sim a \wedge c \sim b$

$\Rightarrow a \sim b$

Definition 2.2.4a: Die Quotientenmenge von M

bezgl. „ $\sim$ “ ist $\{[a] \mid a \in M\}$ und wird z.B. $M/\sim$

Die kanonische Quotientenabb. ist

$$\varphi: M \rightarrow M/\sim$$

$$a \mapsto [a]$$