

Lineare GLS

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Beob: • die linke Seite ist von der Form Ax
 mit $A \in K^{m \times n}$ und $x \in K^n$ (typisch: $K = \mathbb{R}$)
 • die rechte Seite ist $b \in K^m$
 so kurz: $Ax = b$ in K^m

Lemma 3.2.0a Sei $f_A: K^n \rightarrow K^m$ die Abb $x \mapsto Ax$

Dann gilt für die Lösbarkeit der LGS $Ax = b$

- 1) $\forall b \in K^m \exists x \in K^n$ mit $Ax = b$ falls f_A surj
- 2) Eine Lösung x ist eindeutig falls f_A inj
- 3) Es gibt eine eind. Lsg zu jedem $b \in K^m$
wenn f_A bij

Bew: Für Lsg von $Ax = b$ gilt: $x \in f_A^{-1}(\{b\})$

Der Rest folgt aus den Definitionen $\square$

Satz 2.1.10 Seien V, W K -VR und $f: V \rightarrow W$ lin Abb.

Dann gilt

$$\dim V = \dim \ker(f) + \dim \operatorname{im}(f)$$

Bew: Sei $u_1, \dots, u_k$ Basis von $\ker(f)$. Ergänze zu Basis $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$ von V

Zu zeigen: $\dim \operatorname{im}(f) = n - k$. Dazu zeigen wir
 $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ bilden Basis von $\operatorname{im}(f)$

Da $f(v_1) = \dots = f(v_k) = 0$ bilden diese Vektoren
ein EZS von $\operatorname{im}(f)$.

lin unabh.: Widerspruchsannahme:

$$0 = \sum_{i=k+1}^n \alpha_i f(v_i) = f\left(\sum_{i=k+1}^n \alpha_i v_i\right)$$

Damit läge $\sum \alpha_i v_i$ in $\operatorname{Ker}(f)$ und damit
in $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ ∇

$$\Rightarrow \begin{matrix} \dim V = n \\ \dim \operatorname{Ker}(f) = k \end{matrix} \quad \dim \operatorname{im}(f) = n - k$$

□

Korollar 2.1.11 Sei $\dim V = \dim W = n$. Dann ist
 $f: V \rightarrow W$ inj genau dann wenn f surj.

Korollar 2.1.11a Zwei VR V und W sind isomorph
genau dann wenn $\dim V = \dim W$.

Beweis: $\dim W > \dim V \Rightarrow$ keine lin Abb $f: V \rightarrow W$ ist surj
 $\dim W < \dim V \Rightarrow f$ nicht inj wegen $\dim \operatorname{Ker}(f) > 0$
(dim-Formel)

Falls $\dim V = \dim W$ wähle Basis $v_1, \dots, v_n$ in V
und $w_1, \dots, w_n$ in W . Dann definiert man
 $f(v_i) = w_i$. Das ist ein Isom.

□

Lemma 2.1.1. b Seien U, V, W, Z K -VR
und f ein Homomorphismus, φ, ψ Isomorphismen

$$U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{\psi} Z$$

$$\begin{aligned}\text{Dann gilt: } \dim \operatorname{im}(f) &= \dim \operatorname{im}(f \circ \varphi) \\ &= \dim \operatorname{im}(\varphi \circ f) = \dim \operatorname{im}(\varphi \circ f \circ \varphi)\end{aligned}$$

Bew: Wähle Basis $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ in V mit $\operatorname{Ker}(f) = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. Wähle in V die Basis $\varphi^{-1}(v_1), \dots, \varphi^{-1}(v_n)$.

Bilde diese Basis ab mit $f \circ \varphi$ und wende den Beweis der Dim-Formel an.

Betrachte die Einschränkung von φ auf $\operatorname{im}(f)$

$$\psi: \operatorname{im}(f) \rightarrow Z' = \{z \in Z \mid \varphi^{-1}(z) \in \operatorname{im}(f)\}$$

Diese Abb ist isom, daher $\dim \operatorname{im}(f) = \dim Z'$

Es ist ~~aber~~ $Z' = \operatorname{im}(\varphi \circ f)$

□

Def 3.2.1 Der Rang $\operatorname{rg}(f)$ einer lin Abb f ist

$$\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{im}(f)$$

Der Spaltenrang einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ ist die Dimension des Erzeugnisses der Spaltenvektoren von A , genannt $\operatorname{rg}_S(A)$.

Der Zeilenrang $\operatorname{rg}_Z(A)$ analog für die Zeilenvektoren.

Lemma 3.2.2 Seien V, W K -VR und $f: V \rightarrow W$ lin Abb.

Seien X, Y Basen in V bzw W . Dann gilt

$$\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}_S(A_{f,X,Y})$$

Bew: Die Spalten von $A_{f,X,Y}$ sind die Bilder der Basisvektoren, daher erzeugen sie das Bild der Abbildung $x \mapsto Ax$

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{f} & W \\
 \uparrow \kappa_X & & \uparrow \kappa_Y \\
 K^n & \xrightarrow{A} & K^m
 \end{array}$$

Da κ_X, κ_Y Isomorphismen
sind gilt
 $\dim \operatorname{im}(f) = \dim \operatorname{im}(A)$

□

Def 3.2.1a (elem. Zeilenumformungen)

1) Skalierung einer Zeile

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha \cdot a_i \\ \vdots \end{pmatrix}, \alpha \neq 0$$

Schreibweise als Matrix-Produkt

$$A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \alpha & 1 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \cdot A$$

2) Addiere Vielfaches der Zeile j zur Zeile i

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + \alpha a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix}; \quad A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \alpha & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot A$$

3) Vertauschung von Zeilen

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}; \quad A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot A \quad \begin{matrix} -i \\ -j \end{matrix}$$

Satz 3.2.3 Seien $A, B \in K^{m \times n}$ und B entstehe aus A durch Anwendung endlich vieler elem. Zeilenumformungen. Dann erzeugen die Zeilenvektoren von A und B den selben Unterraum von K^n .

Bew: Die Zeilen (b_i) sind Lin-Kombi der Zeilen (a_i)

$$\langle a_1, \dots, a_i, \dots, a_n \rangle = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$$

$$\langle a_1, \dots, a_i + \alpha a_j, \dots, a_n \rangle //$$

$$\langle a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n \rangle$$

□

Def 3.2.3a (Die Zeilenstufenform) (echelon form)

Die Zeilen-st.-form einer Matrix hat die folgende Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \beta_1 * & \dots & \dots & \dots & \dots & x \\ & & 0 & \dots & 0 & \beta_2 * & \dots & \dots & x \\ & & & & 0 & \dots & \beta_3 * & \dots & x \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \beta_r * & \dots & x \\ & & & & & & & & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

oder

$$b_{ij} = 0 \quad \forall j < j_i$$

$$b_{ij} = \beta_i \quad i = 1, \dots, r$$

$$j_1 < j_2 < \dots < j_r$$