

Satz 3.2.4.

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_r & \star \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

LA 1

11.12.14

Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ lässt sich durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen. Die ersten r Zeilen von B bilden eine Basis für den Unterraum, der von den Zeilen von A erzeugt wird. Es gilt $\text{rg } A = \text{rg } B = r$

Bew: 1. Konstruktion von B :

$A=0$ ist bereits ZSF. Sei nun $A \neq 0$. Dann gibt es eine Spalte j_1 mit einem Element $a_{ij_1} \neq 0$. Vertausche dann die Zeilen 1 und i und setze $\beta_1 = a_{ij_1}$

$$\leadsto A' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \beta_1 & \star & \dots & \star \\ 1 & & & & \star & & \star \\ 0 & & 0 & \star & & & \star \end{pmatrix}$$

2. Für alle Elemente a_{ij_1} in der Spalte j_1 von A' mit $i > 1$: Falls $a_{ij_1} \neq 0$ subtrahiere von Zeile i das $\frac{a_{ij_1}}{\beta_1}$ -fache der Zeile 1.

$$\leadsto A'' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \beta_1 & \star & \dots & \star \\ 1 & & & & 0 & & \star \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & & \star \end{pmatrix} \quad \leftarrow A''''$$

Wiederhole das Vorgehen mit der Matrix A'' und iteriere bis $A^{(r)} = 0$

Nach Lemma 2.2.3 sind die Zeilen von B ein Erzeugendensystem für $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$. Zu zeigen: Sie sind l.u.

Seien $\beta_1, \dots, \beta_r$ die Zeilen von B .

Annahme:

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i \beta_i = 0$$

$$\alpha_1 \beta_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

$$\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 \dots + \alpha_{r-1} \beta_r + \alpha_r \beta_r = 0 \Rightarrow \alpha_r = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_i = 0, i=1, \dots, r \Rightarrow (\beta_i) \text{ lin. unabh.}$$

Da $(\beta_i)_{i=1, \dots, r}$ Basis folgt $\dim \langle \beta_i \rangle_{i=1, \dots, r} = r = \dim \langle a_i \rangle_{i=1, \dots, m}$

□

Lemma 3.2.4a

$$\operatorname{rg}_S A = \operatorname{rg}_S B$$

Beweis: Seien $f_A: K^n \rightarrow K^m$ und $f_B: K^n \rightarrow K^m$ die zu A und B gehörenden Abb. Dann gilt:

$f_B = \varphi \circ f_A$ wobei φ die Abb. ist, die sich als Produkt der Zeilentransformationen ist, die A in B überführen.

Hausaufgabe: φ ist Isomorphismus $\Rightarrow \operatorname{rg} f_A = \operatorname{rg} f_B = \operatorname{rg}_S B$
 $\operatorname{rg}_S A$

Satz 3.2.10

Sei $A \in K^{m \times n}$, dann gilt $\operatorname{rg}_S A = \operatorname{rg}_Z A = \operatorname{rg} A$

Beweis:

Mit der ZSF B gilt bereits $\operatorname{rg}_Z A = \operatorname{rg}_Z B$ $\operatorname{rg}_S A = \operatorname{rg}_S B$

$$\operatorname{rg}_Z B = r$$

Bleibt zu zeigen: $\operatorname{rg}_S B = r$

Die Spaltenvektoren von B haben

von null verschiedene
Einträge nur

in den ersten r Zeilen. Damit gilt: $\langle b_i \rangle_{i=1, \dots, n} \subset K^r$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}_S B \leq r$$

Zeige: es gibt r lin. unabh. Vektoren in $\langle b_i \rangle_{i=1, \dots, n}$

$$\text{Wähle } (b_j)_{j=1, \dots, r} \quad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} \beta_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum \alpha_i \beta_i = 0 \Rightarrow \alpha_i \beta_i = 0 \Rightarrow \alpha_r = 0$$

$$\alpha_r \beta_r + \alpha_{r-1} \beta_{r-1} = 0 \Rightarrow \alpha_{r-1} = 0$$

$$\alpha_r = 0$$

□

3.3 Matrizenringe und invertierbare Matrizen

$K^{n \times n}$ ist additive Gruppe mit 0 als neutralem Element
hat eine Multiplikation $K^{n \times n} \times K^{n \times n} \rightarrow K^{n \times n}$

Ist $K^{n \times n}$ ein Körper?

Die 1 ist $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ Multiplikation ist nicht kommutativ

Man nennt dieses Phänomen „Nullteiler“ und wir haben bewiesen, dass Körper keine Nullteiler haben.

Definition 3.3.1

Ein Ring ist eine Menge R mit Verknüpfungen „+“ und „·“, so dass 1) R abelsche Gruppe bzgl. „+“ ist

2) die Multiplikation assoziativ

3) und beide Operationen distributiv sind

Ein Ring heißt kommutativ, wenn „·“ kommutativ ist.

Wenn ein multiplikativ neutrales Element existiert, spricht man von einem Ring mit 1.

Beispiele:

1) $\mathbb{Z}$ ist kommutativer Ring mit 1

2) alle Körper sind kommutative Ringe mit 1

3) $K^{n \times n}$ ist Ring mit 1

4) $\text{Hom}(V, V) = \text{End}(V)$ ist Ring mit 1

Satz 3.3.2

Sei V ein K -VR mit Basis $X = (x_1, \dots, x_n)$. Dann ist die

Abbildung $\varphi_X: \text{End}(V) \rightarrow K^{n \times n}$

$$f \mapsto A_{f, X, X}$$

ein Ring-Isomorphismus

Bew: Bij. wg. 3.1.4. Ring-hom. wegen 3.1.9

Definition 3.3. a

Sei R ein Ring mit 1

Dann heißt $R^\times = \{a \in R \mid \exists b \in R : ab = 1\}$

die Einheitsgruppe in R .

Bem: $R^\times$ ist kein Ring, aber multiplikativ. Gruppe

Lemma 3.3.4

Die Einheitsgruppe in $\text{End}(V)$ sind die Isomorphismen

Beweis: $\exists f^{-1} \iff f \text{ bij.}$