

Lemma 3.34: Die Einheiten im Ring der Endomorphismen $\text{End}(V)$ eines K -Vektorraumes V sind die Isomorphismen. (1)

Bew: f^{-1} existiert $\Leftrightarrow f$ bijektiv.

Def. 3.3.4a: Die Gruppe der bijektiven Endomorphismen in $\text{End}(V)$ wird als Automorphismengruppe $\text{Aut}(V)$ bezeichnet.

Warnung: $\text{Aut}(V)$ ist multiplikative Gruppe, aber kein Ring.

Def. 3.3.4b: Die Einheitsgruppe in $K^{n \times n}$ heißt $\text{GL}(n, K)$ und enthält die invertierbaren (auch reguläre oder nicht singuläre) Matrizen.

d.h. zu $A \in \text{GL}(n, K)$ gibt es $B \in \text{GL}(n, K)$ mit $AB = BA = E_n$.

Satz 3.3.5: Sei V ein K -VR mit Basis $X = (x_1, \dots, x_n)$.

Dann ist die Einschränkung des Ring-Isom.

$$\begin{aligned} \Psi: \text{End}(V) &\rightarrow K^{n \times n} \\ f &\mapsto A_{f, X, X} \end{aligned}$$

auf die Automorphismengruppe ein ~~Isom~~ Gruppenisomorphismus

$$\Psi: \text{Aut}(V) \rightarrow \text{GL}(n, K)$$

Bew: Verträglich mit Multiplikation, da Ring-Isom.

Zeige: $\text{GL}(n, K)$ liegt im Bild.

$$\text{Es gilt } \Psi(\text{id}) = E_n$$

$$E_n = \Psi(f^{-1} \circ f) = \Psi(f^{-1}) \cdot \Psi(f)$$

$\Rightarrow$ Zu $\Psi(f)$ ist die inverse $\Psi(f^{-1})$ ebenfalls im Bild.

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{f^{-1}} & V \\ \downarrow \text{K}_X & & \downarrow \text{K}_X & & \downarrow \text{K}_X \\ K^n & \xrightarrow{A} & K^n & \xrightarrow{B} & K^n \end{array}$$

$$A = A_{f, X, X}$$

$$B = A_{f^{-1}, X, X}$$

An dieser Stelle ist bewiesen, daß die Eigenschaften von Homomorphismen und Matrizen in algebraischer Sicht identisch sind.

In Zukunft werden wir daher die Matrix $A \in K^{m \times n}$ mit der Abb. $f_A: K^n \rightarrow K^m \quad x \mapsto A \cdot x$ identifizieren und z.B. sagen „ A ist surjektiv“ o.ä.

Korollar 3.3.6: Eine Matrix $A \in K^n$ ist invertierbar genau dann, wenn $f_A: K^n \rightarrow K^n$ ein Automorphismus ist, oder ebenfalls äquivalent $\operatorname{rg} A = n$.

Korollar 3.3.7a: Invertierbare Matrizen $A \in K^{n \times n}$ können durch elementare Zeilentransformationen auf die ZSF

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 & & & \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & * \\ & & & & \beta_n \end{pmatrix}$$

gebracht werden.

Bew: $\operatorname{rg} B = \operatorname{rg} A = n$.

Stünde β_i nicht in der Spalte i ,

so wäre die letzte Stufe $r < n$ und $\operatorname{rg}(B) < n$.

Def 3.3.7b Das Gauß-Jordan-Verfahren überführt die Matrix B durch weitere Zeilentransformationen auf die Einheitsmatrix und dient der Berechnung der Inversen.

Verfahren: $i = n \dots 1$

a) teile Zeile i durch b_{ii}

b) Subtrahiere von den Zeilen $j < i$

das $\frac{1}{b_{ji}}$ -fache des Ergebnisses von Schritt a.

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & * \\ 0 & \beta_n \end{pmatrix} \xrightarrow{a} \begin{pmatrix} \beta_1 & * \\ 0 & \beta_{n-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{b} \begin{pmatrix} \beta_1 & * & 0 \\ & & 0 \\ 0 & \beta_{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

(3)

Algebraisch

$$B = \left(\prod_{i=1}^{k_1} s_i \right) A$$

s_i sind Zeilentransformationen

$$E = \left(\prod_{i=1}^{k_2} s_{i+k_1} \right) B = \left(\prod_{i=1}^{k_1+k_2} s_i \right) A$$

Wobei k_1, k_2 die Anzahl der nötigen Trofs. sind.

Insbesondere ist $(\prod s_i) = A^{-1}$.

Korollar 3.3.7c: Durch Anwendung des Eliminationsverfahrens auf A und E werden überführt

$$\begin{aligned} A &\mapsto E \\ E &\mapsto A^{-1} \end{aligned}$$

3.5 Lineare Gleichungssysteme

Sei $\boxed{Ax=b}$ mit $A \in K^{m \times n}$, $b \in K^m$

und $x \in K^n$ ein lin. Gs.

Das zugehörige homogene System ist $\boxed{Ax=0}$.

Definition 3.5.1: Der Lösungsraum des Systems ist

$$\cancel{M} M_{A,b} = \{x \in K^n \mid Ax=b\}$$

Satz 3.5.3 Die Menge $M_{A,0}$ ist UVR von K^n und $\dim(M_{A,0}) = n - \text{rg } A$.

Bew: Dimensionsformel.

Lemma 3.5.4: Sei $A \in K^{m \times n}$ und $S \in GL(m, K)$. Dann gilt

$$M_{A,0} = M_{SA,0}.$$

Bew: Zeige:

1] ~~$Ax=0$~~ $\Rightarrow SAx=0$. ✓

2] $SAx=0 \Rightarrow Ax=0$

$\Leftrightarrow S^{-1}SAx = Ax=0$.

Frage: Wann ist $Ax=b$ lösbar?

Notwendig: $b \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ a_i : Spalten von A .

Def: $\text{rg}(A, b) = \text{rg}(a_1, \dots, a_n, b)$

Satz 3.5.5: Sei $A \in K^{m \times n}$, $b \in K^m$. Dann ist $Ax=b$ mit $x \in K^n$ ~~lösbar~~

1] lösbar genau dann, wenn $\text{rg}(A) = \text{rg}(A, b)$.

2] lösbar für alle $b \in K^m$ genau dann, wenn $\text{rg } A = m$.

3] Die Lösung ist eindeutig (sofern sie existiert) genau dann wenn $\text{rg } A = n$.

Bew: schon abgehandelt.

Korollar 3.5.6: Für $A \in K^{n \times n}$ ist äquivalent:

1] $Ax=b$ ist lösbar $\forall b \in K^n$

2] $Ax=0$ besitzt die eindeutige Lösung $x=0$.

3] A ist invertierbar.

Bew: Satz über Endomorphismen $\text{inj.} = \text{surj.}$

Lemma 3.5.8 Für $A \in K^{m \times n}$, $b \in K^m$ und

$S \in GL(m, K)$ haben die LGS

$Ax=b$ und $SAx= Sb$ dieselben Lösungen.