

3.4 Basiswechsel

Sei V ein K -VR und $X = (x_1, \dots, x_n)$ und $Y = (y_1, \dots, y_n)$ seien Basen.

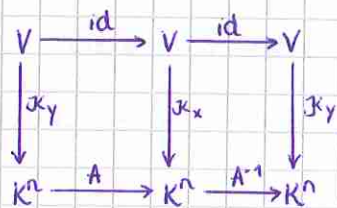
Schreibe Vektoren in Y als Linearkombination der x_i : $y_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i$

$$v \in V: v = \sum_{j=1}^n b_j y_j = \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_j \right) x_i$$

Satz 3.4.3: Seien X, Y Basen des VR V . Seien zu einem Vektor $v \in V$ $\alpha \in K^n$ und $\beta \in K^n$ die Koeffizientenvektoren der Basisdarstellung von v bzgl. X und Y . Sei ferner A die Matrix, deren Spalten die Koordinaten der Basisvektoren y_j bzgl. X sind. Dann gilt: $\alpha = A\beta$ $\beta = A^{-1}\alpha$

Bew.: $\alpha = A\beta$ schon bewiesen

A ist invertierbar, da Y Basis ist und damit $\text{rg } A = n = \dim V$



Bemerkung: Wir bezeichnen diese Matrix A mit $A_{\text{id}, Y, X}$. Es gilt

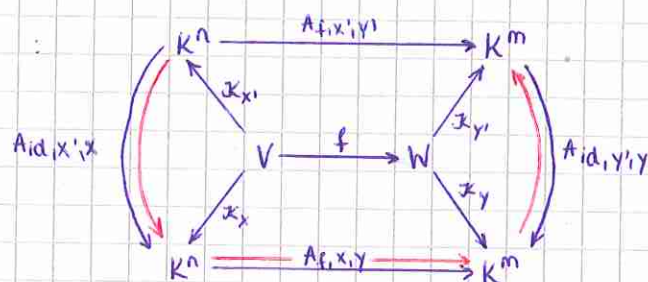
$$A_{\text{id}, X, Y} = A_{\text{id}, Y, X}^{-1}$$

Warnung: Intuitiv sind X und Y vertauscht.

Satz 3.4.4: Seien V, W K -Vektorräume, $f: V \rightarrow W$. Seien X, X' Basen von V und Y, Y' Basen von W , so gilt

$$A_{f, X', Y'} = (A_{\text{id}, Y', Y})^{-1} A_{f, X, Y} A_{\text{id}, X', X}$$

Beweis durch Bild:



Bem.: Basiswechsel in V hat immer die Form $A' = B^{-1}AB$ mit invertierbarer Matrix B . Matrizen A und A' , die einer solchen Beziehung genügen,

$A: K^n \rightarrow K^n$
 B : Basiswechsel in V

heißen ähnlich.

$$\text{Hom}(V, W) \begin{cases} \rightarrow \text{Hom}(V, V) = \text{End}(V) \\ \rightarrow \text{Hom}(V, K) = V^* \end{cases}$$

Definition 2.3.1: Der Vektorraum $\text{Hom}(V, K)$ ist der Raum der „Linearformen“ und wird als Dualraum V^* von V bezeichnet.

Beispiel: V ein K -Vektorraum, $X = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von V . Dann ist $\varphi: V \rightarrow K$

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \mapsto \alpha_i \text{ ist Linearform}$$

Bemerkung: Die Matrixdarstellung einer Linearform ist eine Matrix $A \in K^{1 \times n}$, wobei $n = \dim V$. Daher gilt auch $\dim V^* = \dim V$.

Definition 2.3.5: Sei V ein K -Vektorraum mit Basis $X = (x_1, \dots, x_n)$. Dann ist die duale Basis zu X eine Basis von V^* für die gilt $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$.

Lemma 2.3.5: $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ ist tatsächlich eine Basis.

Bew.: $\dim V^* = n \Rightarrow$ lin. unabh. $\Leftrightarrow$ Erzeugendensystem.

Wir zeigen $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ sind l.u.

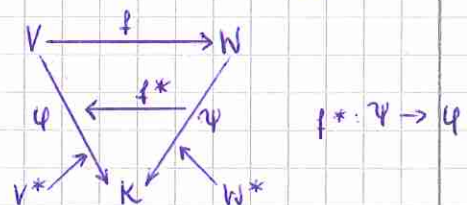
$$\text{Sei } \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^* = 0 \text{ also } \forall v \in V: \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^*(v) = 0$$

$$\text{Wähle } v = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^*(v) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^* \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \quad \text{da } x_i^*(x_j) = \delta_{ij} \Rightarrow \alpha_i^2 = 0$$

Definition 2.3.2: Seien V, W K -Vektorräume, $f: V \rightarrow W$ Lin. Abb. Dann ist die duale Abb. $f^*: W^* \rightarrow V^*$ die Abbildung mit

da das Diagramm:



Aus dem Diagramm lesen wir $\varphi = \psi \circ f$

Lemma 2.3.2: f^* ist linear

Beweis: Nachrechnen!

Definition 3.2.8: $X \subset Y$

zu einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ heißt $B \in K^{n \times m}$ zu A transponiert, wenn

$$b_{ji} = a_{ij} \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$$

Wir schreiben $B = A^T$

Satz 3.2.9: Seien V, W K -Vektorräume mit Basen X und Y . Dann ist

$$A_{f^*, Y^*, X^*} = A_{f, X, Y}^T$$

Bew.: $f(x_i) = \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j \Rightarrow y_i^*(f(x_i)) = y_i^*(\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j) = a_{ij}$

Sei $B = A_{f^*, Y^*, X^*}$ $f^*(y_j^*) = \sum_{i=1}^n b_{ij} x_i^*$

$$\Rightarrow [f^*(y_i^*)](x_j) = b_{ij}$$