

LINEARE ALGEBRA I - VORLESUNG 2 (16.10.2014)

Nachtrag: Fehlender Buchstabe in Aufgabe 0.2:

chi, χ , X

Die Sprache der Mathematik besteht aus Aussagen.
Diese sind Sätze, denen man eindeutig das
Prädikat „wahr“ oder „falsch“ zuordnen kann.

Aussagen sind entweder Axiome, die als wahr
gesetzt sind, oder Folgerungen und Verknüpfungen
von Aussagen.

Definition: Das logische „nicht“ $\neg A$

Wahrheitstabelle

A	$\neg A$
w	f
f	w

Definition: Das logische „und“ $A \wedge B$

$A \wedge B$		A	
		w	f
B	w	w	f
	f	f	f

Definition: Das logische „oder“ $A \vee B$

		A	
		w	f
B	w	w	w
	f	w	f

Student: Kann man das „oder“ nicht auch über „und“ und
„nicht“ definieren? BEANTWORTET ✓

Definition: Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$

"A ist äquivalent zu B" oder "A gilt genau dann wenn B gilt".

$A \Leftrightarrow B$		A	
		W	F
B	W	W	F
	F	F	W

$$x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2, \quad x^2 = 4 \not\Leftrightarrow x = 2$$

Definition: Implikation $A \Rightarrow B$

"Aus A folgt B"

$A \Rightarrow B$		A	
		W	F
B	W	W	W
	F	F	W

Beispiel: $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$

Benutzung von Äquivalenz und Implikation:

wenn wir $A \Leftrightarrow B$ oder $A \Rightarrow B$ schreiben, geschieht das in dem Sinne, dass die Aussage wahr ist.

Damit weisen wir nicht den gesamten Term einen Wert zu, sondern treffen eine Aussage über A und B.

Struktur mathematischer Texte:

- Aussagen
- Definitionen (Axiome)
- Sätze: Satz (theorem), Lemma (Hilfssatz), Korollar (corollary, Nachsatz), ...

Sätze haben die Struktur von Implikationen oder Äquivalenzen.

- Liste von Voraussetzungen (Annahmen, "wenn")
- Folgerungen ("dann")
- Beweis

Lemma 0.1 Für die logischen Operatoren "und" und "oder" gilt:

$$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$$

$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A \quad \text{für beliebige Aussagen } A, B$$



Beweis: Wahrheitstabelle

Bemerkung: Man nennt diese Eigenschaft Kommutativität oder Kommutativgesetz und man sagt der Operator sei kommutativ.

Lemma 0.2 Für beliebige Aussagen A, B, C gilt

$$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$$

Beweis:

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \wedge C$	$B \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$
W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	F	F	F
W	F	W	F		F	
W	F	F	F		F	
F	W	W	F		W	
F	F	W	F		F	
F	W	F	F		F	
F	F	F	F	F	F	F

✓

Bemerkung: Die Aussage heißt Assoziativität und man sagt der Operator sei assoziativ.

Bei assoziativen Operatoren werden die Klammern oft weggelassen.

Lemma 0.3 Für beliebige Aussagen A, B gilt:

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Bew:

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A) \wedge (\neg B)$
W	W	W	F	F
W	F	W	F	F
F	W	W	F	F
F	F	F	W	W

✓

Lemma 0.4 Für beliebige Aussagen A, B, C gilt das „Distributivgesetz“:

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Bew: Wahrheitstabelle

Wie versteht man $A \Rightarrow B$?

Lemma 0.5: Die Implikation $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zur Aussage $(\neg A) \vee B$

Bew: Wahrheitstabelle

$$\Rightarrow \neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg((\neg A) \vee B) \Leftrightarrow (\neg(\neg A)) \wedge (\neg B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$$

Satz 0.6 Die Äquivalenz und Implikation sind transitiv, das heißt

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow C$$

$$(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \Rightarrow A \Leftrightarrow C$$