

Bemerkungen zur Klausur:

- Din A4 Formelblatt erlaubt
- keine Abgabe des Formelblatts
- überwiegender Teil Multiple-Choice

7. Euklidische Räume

7.1. Bilinearformen

Ab hier: V ist $\mathbb{R}$ -Vektorraum

Definition 7.1.1: Eine Bilinearform ist eine Abbildung

$\phi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

1) $\phi(\alpha x_1 + x_2, y) = \alpha \phi(x_1, y) + \phi(x_2, y)$

2) $\phi(x, \alpha y_1 + y_2) = \alpha \phi(x, y_1) + \phi(x, y_2)$

ϕ heißt „nicht entartet“, wenn gilt:

$$(\forall y \in V: \phi(x, y) = 0) \Rightarrow x = 0$$

$$(\forall x \in V: \phi(x, y) = 0) \Rightarrow y = 0$$

Bsp: Das euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$:

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Definition 7.1.2: Eine BLF heißt symmetrisch, wenn $\forall x, y \in V: \phi(x, y) = \phi(y, x)$

Definition 7.1.3: Eine BLF heißt positiv semidefinit, wenn $\forall x \in V: \phi(x, x) \geq 0$ und positiv definit, wenn zusätzlich gilt: $\phi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Eine symmetrische pos. def. BLF heißt Skalarprodukt (inner product).

Schreibweise für symm. pos. semidef. BLF

$$\langle x, y \rangle$$

Satz 7.1.4 (Scharzsche Ungleichung. Cauchy, Bunjakowski, Bunyakovsky)

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ symm. pos. semidefinite BLF. Dann gilt für $x, y \in V$:

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

Wenn $\langle \cdot, \cdot \rangle$ s.p.d. gilt Gleichheit genau dann, wenn y ein Vielfaches von x .

Bew: $0 \leq \langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle = \alpha^2 \langle x, x \rangle + \alpha \beta \langle x, y \rangle + \beta \alpha \langle y, x \rangle + \beta^2 \langle y, y \rangle$

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig $= \alpha^2 \langle x, x \rangle + 2\alpha\beta \langle x, y \rangle + \beta^2 \langle y, y \rangle$

Sei zunächst $\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle = 0$

Setze $\alpha = -1, \beta = \langle x, y \rangle$

$$0 \leq -2\langle x, y \rangle^2 \leq 0 \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

Sei nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.)

$$\langle x, x \rangle \neq 0$$

Setze $\alpha = -\langle x, y \rangle, \beta = \langle x, x \rangle$

$$0 \leq \langle x, y \rangle^2 \langle x, x \rangle - 2\langle x, y \rangle^2 \langle x, x \rangle + \langle x, x \rangle^2 \langle y, y \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle (\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2) \Rightarrow 0 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2$$

Sei $y = \gamma x, \gamma \in \mathbb{R}$

$$\langle x, y \rangle^2 = \gamma^2 \langle x, x \rangle^2 = \langle x, x \rangle \gamma \langle x, \gamma x \rangle = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pos. def. und

$$\langle x, y^2 \rangle = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$$

Daraus folgt für $\alpha = -\langle x, y \rangle$ und $\beta = \langle x, x \rangle$:

$$0 = \langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle \Rightarrow \alpha x + \beta y = 0$$

Da $\beta \neq 0$ sind x und y lin. abh. $\Rightarrow y$ ist Vielfaches von x .

Lemma 7.15: Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ symm. pos. semi-definit BLF. Dann ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pos. def. genau dann, wenn sie nicht entartet ist.

Bew: Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pos. def. und entartet.

Entartet: $\exists x \in V, x \neq 0: \forall y \in V: \langle x, y \rangle = 0$

Setze $y = x$ $\langle x, x \rangle \neq 0$

Wegen pos. def. $\searrow$

Sei nun $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nicht pos. def.

Dann gibt es $x \neq 0$ mit $\langle x, x \rangle = 0$

und $\forall y \in V: \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in V \Rightarrow$ entartet

Def. 7.1.5 a Sei V ein $\mathbb{R}$ -VR.

Eine Norm auf V ist eine Abbildung

$|\cdot|: V \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ mit den Eigenschaften

1) $|\alpha v| = |\alpha| |v| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, v \in V$

2) $|u+v| \leq |u| + |v|$

3) $|v| \geq 0$ und $|v| = 0 \Rightarrow v = 0$

Satz 7.1.6 Zu einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V definiert $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ eine Norm.

Bew: $|\alpha v| = \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle v, v \rangle} = \sqrt{\alpha^2} \sqrt{\langle v, v \rangle} =$
 $= |\alpha| |v|$

$$|u+v|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = u^2 + 2\langle u, v \rangle + |v|^2 \leq |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2 = (|u| + |v|)^2$$

Die dritte Eigenschaft folgt aus der Definitheit des Skalarproduktes.

Skalarprodukte und Winkel

$$v = \langle v, e \rangle e + (v - \langle v, e \rangle e)$$

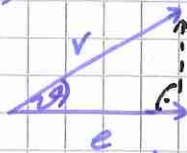
$$|v|^2 = \langle v, e \rangle^2 \langle e, e \rangle$$

$$+ 2 \langle \langle v, e \rangle e, v - \langle v, e \rangle e \rangle$$

$$+ |v - \langle v, e \rangle e|^2$$

$$= \langle v, e \rangle \langle e, v \rangle - \langle v, e \rangle^2 \langle e, e \rangle =$$

$$= \langle v, e \rangle^2 + |v - \langle v, e \rangle e|^2 = \langle v, e \rangle^2 - \langle v, e \rangle^2 = 0$$



Dies ist der Satz von Pythagoras für $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\cos(\alpha) = \left(\frac{|v|}{\langle v, e \rangle} \right)^{-1} \text{ Für beliebiges } y \in V, y \neq 0$$

$$\text{setze } e = \frac{y}{|y|}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle x, y \rangle}{|x| |y|}$$

⇒ Das Skalarprodukt misst den Winkel zwischen zwei Vektoren

$$\alpha \in \mathbb{R} : |\alpha| = \sqrt{\alpha^2}$$

$$z \in \mathbb{C} \quad z = i \Rightarrow z^2 = -1$$

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \text{ als } \mathbb{R}\text{-VR}$$

$$|a+ib| := \sqrt{a^2 + b^2}$$

Die Komplexe Konjugation ist

$$\text{Abb } \bar{\cdot} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}, a+ib \mapsto a-ib$$

$$\operatorname{Re} z = a = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

$$\operatorname{Im} z = b = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

Def. 7.1.1 Sesquilinearform (Sesqui = 1, 5)

$$1) \phi(\alpha x_1 + x_2, y) = \alpha \phi(x_1, y) + \phi(x_2, y)$$

$$2) \phi(x, \alpha y_1 + y_2) = \bar{\alpha} \phi(x, y_1) + \phi(x, y_2)$$

Def. 7.1.2 ϕ ist hermitisch wenn $\phi(x, y) = \overline{\phi(y, x)}$.