

Bemerkung: Die Darstellung bleibt voll mit Anmerkungen über den komplexen Fall.

Definition: Sei V ein $\mathbb{R}$ -VR und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine symmetrische Bilinearform.

7.2.1

Dann heißen zwei Vektoren $u, v \in V$ orthogonal, wenn $\langle u, v \rangle = 0$ gilt.

Eine Menge $M \subset V$ mit $0 \notin M$ heißt Orthogonalsystem, wenn

$\langle u, v \rangle = 0 \quad \forall u, v \in M, u \neq v$ und

Orthonormalsystem, wenn zusätzlich

$\langle u, u \rangle = 1 \quad \forall u \in M$. Schließlich heißt ein

Orthonormalsystem Orthonormalbasis (ONB),

wenn es zusätzlich Basis von V ist.

Lemma 7.2.2: Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}$ -VR V . Dann ist jedes Orthogonalsystem M linear unabhängig.

Beweis: Seien $x_1, \dots, x_n \in M$ und $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$.

$$\Rightarrow 0 = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \alpha_i x_i, x_j \rangle$$

$$= \alpha_j \underbrace{\langle x_j, x_j \rangle}_{>0} \Rightarrow \alpha_j = 0$$

Dies gilt für $j=1, \dots, n$ $\square$

Definition 7.2.3 a: Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ Skalarprodukt, $U \subset V$ sei $U \perp U^\perp$,
dann ist die orthogonale Projektion P_U
auf U definiert durch

$$1.) P_U(v) = v \quad \forall v \in U$$

$$2.) \langle v - P_U(v), u \rangle = 0 \quad \forall u \in U$$

Lemma 7.2.4: Die orthogonale Projektion ist wohldefiniert.

Sei ferner $e_1, \dots, e_k$ eine ONB von U .

$$\text{Dann ist } P_U(v) = \sum_{j=1}^k \langle v, e_j \rangle e_j$$

Beweis: 1.) Sei $f: V \rightarrow U$ eine lineare Abbildung mit den
Eigenschaften der Projektion,

also

$$f(v) = v \quad \forall v \in U$$

$$\langle v - f(v), u \rangle = 0 \quad \forall u \in U$$

$$\Rightarrow \langle P_U(v) - f(v), u \rangle = 0 \quad \forall u \in U$$

Wähle nun $u = P_U(v) - f(v) \in U$

$$\langle P_U(v) - f(v), P_U(v) - f(v) \rangle = 0 \quad \forall v \in V$$

$$\Rightarrow P_U(v) - f(v) = 0 \quad \text{wegen Definitheit}$$

$$P_U(v) = f(v)$$

Beweis:

Nachweis der Projektioneigenschaft

für die Abb. $g(v) = \sum_{j=1}^4 \langle v, e_j \rangle e_j$.Sei zunächst $v \in U$, also $v = \sum_{i=1}^4 \alpha_i e_i$

$$g(v) = \sum_{j=1}^4 \sum_{i=1}^4 \langle \alpha_i e_i, e_j \rangle e_j = \sum_{j=1}^4 \alpha_j \underbrace{\langle e_j, e_j \rangle}_{=1} e_j$$

Zu zeigen: $\langle v - g(v), u \rangle = 0 \quad \forall u \in U$ Es genügt: $\langle v - g(v), e_j \rangle = 0 \quad j=1, \dots, 4$

$$\begin{aligned} * \langle v - \sum_{i=1}^4 \langle v, e_i \rangle e_i, e_j \rangle &= \langle v, e_j \rangle - \sum_{i=1}^4 \langle v, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \langle v, e_j \rangle - \langle v, e_j \rangle = 0 \end{aligned}$$

Wegen Wohldefiniertkeit gilt also

$$g(v) = p_U(v)$$

Definition: Euklidischer Raum ist ein $\overline{V}$ -Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ $\overline{V} = \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C}$

Satz 7.2.6: Jeder euklidische $\overline{K}$ - V hat eine ONB.Satz 7.2.5: Jede Basis $x_1, \dots, x_n$ eines $\overline{K}$ - V kann in eine ONB $e_1, \dots, e_n$ transformiert werden, s.d.

$$\text{Span} \{e_1, \dots, e_k\} = \text{Span} \{x_1, \dots, x_k\} \quad k=1, \dots, n$$

Beweis: Orthogonalisierungsverfahren von E. Schmidt
Induktion nach k

$$1.) \quad k=1 \quad e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|} \quad \text{ist ONB}$$

2.) Sei $e_1, \dots, e_k$ ONB des Raums

$$U_k = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$$

$$\text{Setze } \tilde{e}_{k+1} = x_{k+1} - P_{U_k}(x_{k+1})$$

Dann gilt per Definition $\langle \tilde{e}_{k+1}, e_j \rangle = 0 \quad j=1, \dots, k$

$\tilde{e}_{k+1}$ ist nicht 0, da $x_1, \dots, x_{k+1}$ lin. unabh.

$$\text{Setze } e_{k+1} = \frac{\tilde{e}_{k+1}}{|\tilde{e}_{k+1}|}$$

$\Rightarrow e_1, \dots, e_{k+1}$ ist Orthonormalsystem

x_{k+1} ist Linearkombination von $e_1, \dots, e_{k+1}$

$$\Rightarrow \text{span}\{e_1, \dots, e_k, x_{k+1}\} = \text{span}\{e_1, \dots, e_{k+1}\} = U$$

Korollar 7.2.6a: Jede ONB eines UVR $U \subset V$ kann zu einer ONB von V ergänzt werden

Beweis: $\underbrace{e_1, \dots, e_k, x_{k+1}, \dots, x_n}_{U \cup \{x_{k+1}, \dots, x_n\}}$

Definition 7.2.7a: Zu einer Menge $M \subset V$. Zu M heißt

$$M^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in M\}$$

die zu M orthogonale Menge. Ist M ein UVR, so ist $M^\perp$ das orthogonale Komplement

Korollar 7.2.8: Sei V ein euklidischer Vektorraum und $W \subset V$ ein UVR. Dann gilt:

$$1.) V = W \oplus W^\perp$$

$$2.) (W^\perp)^\perp = W$$

Beweis: Sei $e_1, \dots, e_k$ eine ONB von W und
 $\underbrace{e_1, \dots, e_k}_W, \underbrace{e_{k+1}, \dots, e_n}_{W^\perp}$ eine ONB und

$$W^\perp = \text{span} \{e_{k+1}, \dots, e_n\} \quad \square$$

Definition 7.3.1: Sei $\Phi: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine Bilinearform auf V
 und $X = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis. Dann ist

$$A_{\Phi, X} = \left(\Phi(x_i, x_j) \right)_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}$$

„Matrix zu Φ bezüglich X “.

Satz 7.3.2: Jede Bilinearform Φ auf V ist nach Wahl
 einer Basis $X = (x_1, \dots, x_n)$ eindeutig durch ihre
 Matrix $A_{\Phi, X}$ charakterisiert.

Beweis: Sei $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, $v = \sum_{j=1}^n \beta_j x_j$

$$\begin{aligned} \Phi(u, v) &= \Phi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^n \beta_j x_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \Phi(x_i, x_j) \end{aligned}$$

$$\text{Sei } u_X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ und } v_X = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \Phi(u, v) = u_X^T A_{\Phi, X} v_X$$

Sei umgekehrt $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gegeben.

Durch Einsetzen der Basisvektoren $x_1, \dots, x_n$ für
 u und v erhalten wir

$$\Phi(x_i, x_j) = e_i^T A e_j = a_{ij}$$

e_i sind die
 Einheitsvektoren
 in $\mathbb{K}^n$

$$\Rightarrow A = A_{E, \lambda}$$