

Die BLF $\bar{\Phi}: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann nicht entartet, wenn die Matrix $A_{\bar{\Phi}, X}$ invertierbar ist.

Bew.: Betrachte die lin. Abb. $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $x \mapsto A_{\bar{\Phi}, X} x$

$$\bar{\Phi}(u, v) = u_x A_{\bar{\Phi}, X} v_x$$

$$\text{Sei } A \text{ invertierbar} \Rightarrow \ker \varphi = \{0\} \Rightarrow A_{\bar{\Phi}, X} v_x = 0 \Leftrightarrow v_x = 0$$

$$\text{Setze } u_x = v_x \Rightarrow v_x A_{\bar{\Phi}, X} v_x \neq 0 \Rightarrow \exists u \text{ sodass } \bar{\Phi}(u, v) \neq 0$$

$$\Rightarrow \bar{\Phi} \text{ nicht entartet}$$

Aus Kontraposition folgt: Ist $\bar{\Phi}$ entartet, so ist $A_{\bar{\Phi}, X}$ nicht invertierbar.
Umgekehrt mit denselben Argumenten und $\ker \varphi \neq \{0\}$

Korollar 7.3.4: Ist die BLF $\bar{\Phi}$ symmetrisch, so gilt $A = A^T$

$$\bar{\Phi}(u, v) = u_x^T A_{\bar{\Phi}, X} v_x$$

$$\bar{\Phi}(v, u) = v_x^T A_{\bar{\Phi}, X} u_x = u_x^T A_{\bar{\Phi}, X}^{(*)} v_x$$

Aus der Symmetrie von $\bar{\Phi}$ folgt somit:

$$u_x^T A_{\bar{\Phi}, X} v_x = u_x^T A_{\bar{\Phi}, X} v_x$$

und Einsetzen von $u_x = e_i, v_x = e_j, i, j = 1 \dots n$ ergibt

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Def.: Die adjungierte Matrix zu $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ist die Matrix $A^* \in \mathbb{C}^{n \times m}$ mit den Einträgen $(A^*)_{ij} = \overline{(A_{ji})}$

Korollar 4 gilt im Komplexen, wenn man A^T durch A^* ersetzt

Satz 7.3.5 (Basiswechsel)

Sei $\bar{\Phi}: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ BLF und seien X und Y Basen von V . Dann gilt:

$$A_{\bar{\Phi}, Y} = A_{Y, X}^T A_{\bar{\Phi}, X} A_{Y, X}$$

(*) Bem.: Für transponierte Matrizen gilt die Regel $(AB)^T = B^T A^T$

Bew.: Seien u_x, v_x die Koordinatenvektoren von $u, v \in V$ bzgl. x .

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}(u, v) &= u_x^T A_{\bar{\Phi}, x} v_x \\ &= (A_{y, x} u_y)^T A_{\bar{\Phi}, x} (A_{y, x} v_y) \\ &= u_y^T A_{y, x}^T A_{\bar{\Phi}, x} A_{y, x} v_y\end{aligned}$$

Korollar 7.3.6: Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V . Dann gibt es eine invertierbare Matrix S mit $S^T A_{\langle \cdot, \cdot \rangle, x} S = E_n$.

Bew.: Zu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gibt es eine ONB γ . Für γ gilt also $\langle y_i, y_j \rangle = \delta_{ij}$.
Wähle nun $S = A_{\gamma, x}$ und wende Satz 5 an.

Ab jetzt sei der Dualraum zu V mit V' bezeichnet (statt V^*).

Ebenso sei die duale Abb. zu φ mit φ' bezeichnet.

$$\varphi(y) = \bar{\Phi}(x, y) \text{ ist Linearform, ebenso } \psi(x) = \bar{\Phi}(x, y)$$

Lemma 7.4.1: Sei $\bar{\Phi}: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht entartete Bilinearform.

Dann wird durch $\tau: V \rightarrow V' \quad x \mapsto \bar{\Phi}(\cdot, x)$ ein Isomorphismus der VR V und V' erbärt.

Bew.: Linearität folgt aus der Linearität von $\bar{\Phi}$ im 2. Argument.

Es gilt $\dim V = \dim V'$ (Satz 2.3.6)

Da $\bar{\Phi}$ nicht entartet gilt: $\bar{\Phi}(y, x) \neq 0 \quad \forall y \in V \Rightarrow x \neq 0$

$$= \tau(x)(y) \Rightarrow \tau(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$\Rightarrow \tau$ inj. $\Rightarrow$ bijektiv

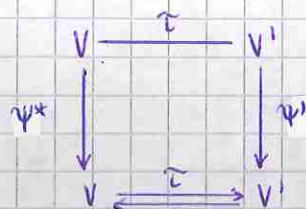
Definition 7.4.2: Die bzgl. der BLF $\bar{\Phi}$ zu Abb. $\psi: V \rightarrow V$ adjungierte

Abbildung ψ^* ist definiert durch die Gleichung

$$\forall x, y \in V: \bar{\Phi}(\psi(x), y) = \bar{\Phi}(x, \psi^*(y))$$

Satz 7.4.2: Der adjungierte Endomorphismus zu ψ existiert und ist wohldefiniert.

Bew.:



wobei ψ' die duale Abb. zu ψ ist

und τ der Isomorphismus nach Lemma 1.

$$\psi^* = \tau^{-1} \circ \psi' \circ \tau$$

□

Korollar 7.4.3: Sei $\Phi: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf V . Dann gilt:

1) Die Abb. $*$: $\text{End}(V) \rightarrow \text{End}(V)$

$\varphi \mapsto \varphi^*$ ist linear

1a) $\text{id}^* = \text{id}$ und $\varphi^{**} = \varphi \quad \forall \varphi \in \text{End}(V)$

2) Es gilt $\ker \varphi^* = (\text{im } \varphi)^\perp$

$$(\ker \varphi)^\perp = \text{im } \varphi^*$$

3) $\text{rg } \varphi = \text{rg } \varphi^*$

Bew.: 3) Da $\text{rg } \varphi' = \text{rg } \varphi$ und τ Isomorphismus, so gilt

$$\text{rg } \varphi^* = \text{rg } (\tau^{-1} \circ \varphi' \circ \tau) = \text{rg } \varphi' = \text{rg } \varphi$$

1) Linearität wg. Bilinearität von Φ

$$1a) \quad \Phi(\text{id}(x), y) = \Phi(x, y) = \Phi(x, \text{id}(y))$$

$$\Phi(\varphi^*(x), y) = \Phi(y, \varphi^*(x)) = \Phi(\varphi(y), x) = \Phi(x, \varphi(y))$$

$$\Rightarrow (\varphi^*)^* = \varphi$$

$$2) \quad x \in \ker \varphi^* \Rightarrow \forall v \in V : \Phi(v, \varphi^*(x)) = 0$$

$$\Rightarrow \forall v : \Phi(\varphi(v), x) = 0 \quad \text{Dies ist die Definition von } (\text{im } \varphi)^\perp$$

$$\ker \varphi = \ker \varphi^{**} = (\text{im } \varphi^*)^\perp$$

$$(\ker \varphi)^\perp = ((\text{im } \varphi^*)^\perp)^\perp = \text{im } \varphi^*$$

□

Lemma 7.4.4: Sei X eine ONB von V bzgl. des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\text{Dann gilt: } A_{\varphi^*, X, X} = A_{\varphi, X, X}^T$$

Bew.: Da X ONB ist $A_{\langle \cdot, \cdot \rangle, X} = E_n$. Für $u, v \in V$: u_x, v_x Koordinatenvektoren

$$\langle \varphi(u), v \rangle = (A_{\varphi} u_x)^T A_{\Phi, X} v_x = u_x^T A_{\varphi}^T v_x$$

$$A_{\varphi} = A_{\varphi, X, X}$$

$$\langle u, \varphi^*(v) \rangle = u_x^T A_{\Phi, X} (A_{\varphi^*} v_x) = u_x^T A_{\varphi^*} v_x$$

$$\forall u, v \in V$$