

Klausur: 8.00 st., bitte spätestens 8:50 ankommen

Drei Klassen spezieller Abbildungen

- 1) Isometrien $f^* = f^{-1}$, $A^* = A^{-1}$
- 2) Selbstadjungierte Abb. $f^* = f$, $A^* = A$
- 3) Normale Abb. $f^* \circ f = f \circ f^*$, $A^* A = A A^*$

7.5 Isometrien

Satz 7.5.1: Für $f \in \text{End}(V)$ ist äquivalent:

- 1) Es gilt $\forall x, y \in V: \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$
- 2) f ist Isomorphismus mit $f^* = f^{-1}$
- 3) Es gilt $|f(x)| = |x| \quad \forall x \in V$
- 4) Ist X eine beliebige ONB von V , so ist deren Bild $f(X)$ ebenfalls ONB
- 5) Es gibt eine ONB X von V , sodass $f(X)$ ONB ist

Def 7.5.1a: Eine Abb. die die Eigenschaften aus Satz 7.5.1 erfüllt heißt Isometrie

Bew: 1) $\Rightarrow$ 2): $\langle x, y \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, f^* \circ f(y) \rangle$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist nicht entartet, also folgt aus

$$0 = \langle x, y \rangle - \langle x, f^* \circ f(y) \rangle = \langle x, y - f^* \circ f(y) \rangle$$

$$y = f^* \circ f(y) \Rightarrow f^* \circ f = \text{id} \Rightarrow f^* = f^{-1}$$

Injektivität und damit Existenz von f^{-1} folgt aus $0 \neq \langle x, x \rangle = \langle f(x), f(x) \rangle \quad \forall x \neq 0$

$$2) \Rightarrow 3) \quad |f(x)|^2 = \langle f(x), f(x) \rangle = \langle x, f^* \circ f(x) \rangle = \langle x, x \rangle = |x|^2$$

3) $\Rightarrow$ 4): Sei $X = (x_1, \dots, x_n)$ ONB

Es gilt: $|x_i|^2 + |x_j|^2 = |x_i + x_j|^2$, $i \neq j$

$$\begin{aligned} \text{Daher: } 2 &= |x_i|^2 + |x_j|^2 = |x_i + x_j|^2 = |\varphi(x_i + x_j)|^2 \\ &= \langle \varphi(x_i) + \varphi(x_j), \varphi(x_i) + \varphi(x_j) \rangle \\ &= |\varphi(x_i)|^2 + 2 \langle \varphi(x_i), \varphi(x_j) \rangle + |\varphi(x_j)|^2 \\ &= 2 + 2 \langle \varphi(x_i), \varphi(x_j) \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi(x_i) \perp \varphi(x_j)$$

4) $\Rightarrow$ 5) klar

5) $\Rightarrow$ 1) Sei $X = (x_1, \dots, x_n)$ eine solche Basis, $u, v \in V$ beliebig,

$$\begin{aligned} \langle \varphi(u), \varphi(v) \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle \varphi(x_i), \varphi(x_j) \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle x_i, x_j \rangle = \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \\ v &= \sum_{j=1}^n \beta_j x_j \end{aligned}$$

□

Korollar 7.5.2: Die Isometrien bilden eine Untergruppe der $\text{Aut}(V)$

Bew: 1) $\text{id}: V \rightarrow V$ ist Isometrie, $\langle \text{id}(v), \text{id}(u) \rangle = \langle v, u \rangle$

2) Mit φ ist auch φ^{-1} Isometrie: $\varphi: X \rightarrow Y, x_i \mapsto y_i$ X, Y ONB
 $\varphi^{-1}: Y \rightarrow X, y_i \mapsto x_i$

3) Seien φ, ψ Isometrien, so auch $\varphi \circ \psi$:

$$\begin{aligned} \varphi: X &\rightarrow Y, \quad X, Y, Z \text{ ONB} \Rightarrow \varphi \circ \psi: Z \rightarrow X \\ \psi: Z &\rightarrow X \end{aligned}$$

Korollar 7.5.3: Sei $\varphi \in \text{End}(V)$, dann ist äquivalent:

1) φ ist Isometrie

2) Für jede ONB X gilt: $A_{\varphi, X, X}^* = A_{\varphi, X, X}^{-1}$

3) Es gibt eine ONB X mit: $A_{\varphi, X, X}^* = A_{\varphi, X, X}^{-1}$

Bew: Satz 7.4.4: $A_{\varphi, X, X}^* = A_{\varphi, X, X}^{-1}$

und Satz 7.5.1

Satz 7.5.4: Sei X ONB und Y eine weitere Basis

Dann ist äquivalent: 1) Y ist ONB

2) Die Basiswechselmatrix $A = A_{X,Y}$ erfüllt $A^* = A^{-1}$

Bew: Betrachte die Abb. $P: V \rightarrow V$ mit $P(x_i) = y_i$

Satz 7.5.1: P ist Isometrie $\Leftrightarrow Y$ ONB

Korollar 7.5.3: $A^* = A^{-1} \Leftrightarrow P$ ist Isometrie

Korollar 7.5.4a: Die Spaltenvektoren einer Matrix A mit $\mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A^* = A^{-1}$ bilden eine ONB des $\mathbb{R}^n$

Bew: Die Spalten sind die Bilder der ONB $e_1, \dots, e_n$

Beispiel: $\mathbb{R}^2$: Spalte 1: $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$ mit $c^2 + s^2 = 1$

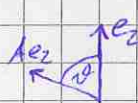
Spalte 2: $\begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow -cs + cs = 0$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$$

$$\text{, setze } \begin{matrix} c = \cos \varphi \\ s = \sin \varphi \end{matrix}, \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$$



Spiegelung: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ an e_1

Definition 7.5.4c: Die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A^* = A^{-1}$ bilden die

Untergruppe $O(n) \subset \text{Gal}(n, \mathbb{R})$, genannt orthogonale Gruppe

Im Komplexen ist dies die unitäre Gruppe $U(n) \subset \text{Gal}(n, \mathbb{C})$

└ Gilt zusätzlich $\det A = 1$, so spricht man von der speziellen

orthogonalen
unitären

Gruppe $\begin{pmatrix} SO(n) \\ SU(n) \end{pmatrix}$

└

└

7.6 Selbstadjungierte Abb

Definition 7.6.1 Ein Endom $\varphi \in \text{End}(V)$ heißt selbstadjungiert,
wenn $\varphi^* = \varphi$

Bem: Für die Matrix $A_{\varphi, x, x}$ eines selbstadjungierten Abb φ bzgl. einer ONB
gilt: $A^* = A$

Lemma 7.6.1a: Ist $\varphi \in \text{End}(V)$ selbstadjungiert, so gilt $\varphi^* \circ \varphi = \varphi \circ \varphi^*$

Satz (Hauptachsentransformation, Spektralsatz für symm. pos. def. Matrizen)