

Lemma 7.6c

22.01.15

Sei die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch und positiv definit. Dann wird durch $\langle x, y \rangle_A = x^T A y$ ein Skalarprodukt definiert.

Beweis: $\langle x, y \rangle_A = \overline{\langle y, x \rangle_A}$, denn $x^T A y = \overline{y^T A^T x} = \overline{y^T A^* x} = \overline{y^T A x}$

Aus $\langle x, y \rangle_A = \overline{\langle y, x \rangle_A} \Rightarrow \langle x, x \rangle_A = \overline{\langle x, x \rangle_A}$ und damit

$\forall x \in \mathbb{C}^n: \langle x, x \rangle_A \in \mathbb{R} \Rightarrow x^T A x \in \mathbb{R}$

Nach Voraussetzung ist A positiv definit, also $x^T A x \geq 0$ und $x^T A x = 0$ impliziert $x = 0$ □

Satz 7.6.7 (Hauptachsentransformation, Spektralsatz für hermitesche positiv definite Matrizen)

Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch pos. definit, dann ex. in $\mathbb{C}^n$ eine ONB von Eigenvektoren von A und alle Eigenwerte λ_i von A sind reell und positiv.

Beweis: Sei $\langle x, y \rangle_E = x^T y$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$ und $\langle x, y \rangle_A = x^T A y$ das von A erzeugte Skp.

Es gilt: Ist x_i Eigenvektor von A , so gilt mit dem zugehörigen Eigenwert $\lambda_i: \langle y, A x_i \rangle_E = \overline{\lambda_i} \langle y, x_i \rangle_E \quad \forall y \in \mathbb{C}^n$

Es gibt in $\mathbb{C}^n$ eine ONB $(x_1, \dots, x_n)$ bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ (Satz 7.3.6)

Es gilt $\langle y, x_i \rangle_A = y^T A x_i = y^T (A x_i) = \langle y, A x_i \rangle_E$

Ab jetzt doch wieder reell: also A s.p.d.,

$\langle x, y \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle x, y \rangle = x^T y$

$\langle x, y \rangle_A = x^T A y$

Für $i \neq j$
 $0 = \langle x_i, x_j \rangle_A = \langle x_i, A x_j \rangle_E$

$\Rightarrow A x_j \perp x_i \quad \forall i \neq j$

$\Rightarrow A x_j$ ist Vielfaches von x_j

$\Rightarrow x_j$ ist Eigenvektor von A .

$\Rightarrow (x_1, \dots, x_n)$ ist Basis von Eigenvektoren

✓

$$0 = \langle x_i, Ax_j \rangle_E = \langle x_i, \lambda_j x_j \rangle_E = \lambda_j \langle x_i, x_j \rangle_E$$

Ist $\lambda_j \neq 0$ folgt $\langle x_i, x_j \rangle_E = 0$

Wäre $\lambda_j = 0$, so wäre $\langle x_j, x_j \rangle = 0$, was der Definitheit widerspricht.

Normiere $v_j = \frac{x_j}{\|x_j\|_E} \rightarrow (v_1, \dots, v_n)$ ist ONB bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$

Der Eigenwert λ_i ergibt sich aus dem Rayleigh-

Quotienten
$$\lambda_j = \frac{\langle x_j, x_j \rangle_A}{\langle x_j, x_j \rangle_E} = \frac{\langle v_j, v_j \rangle_A}{\langle v_j, v_j \rangle_E}$$

Korollar

Zu jeder selbstadjungierten Abbildung $\varphi \in \text{End}(V)$ mit

$\langle x, \varphi(x) \rangle > 0 \quad \forall x \in V$ gibt es eine ONB X von V , so dass

$$A_{\varphi, X, X} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Beweis: Starte mit beliebiger ONB Y . Dann ist $A_{\varphi, Y, Y}$

selbstadj. pos. def.

Nach dem Satz ^{7.67} gibt es dann eine zweite ONB X von Eigenvektoren. $A_{\varphi, X, X}$ hat bzgl. X die behauptete Diagonalgestalt.

Ende Klausur-relevantes Teil

Ausblick auf weitere Spektralsätze

1) A hermitesch, aber nicht notw. pos. def. $\Rightarrow \exists$ ONB von EV, die EW sind reell, aber nicht notw. positiv

2) A ist normal: $A^* A = A A^*$

$\exists$ ONB von $EV_{\substack{\text{in } \mathbb{C}^n \\ \text{in } \mathbb{R}^n}}$ die EW sind komplex

Bem. Die Existenz einer ONB von EV ist äquivalent zu A normal

4. Determinanten

4.1. Symmetriegruppen

Erinnerung:

S_n ist die Gruppe der bijektiven Abbildungen

$$\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

Schreibweise $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist die Permutation, die abbildet $1 \mapsto 3, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 1$

Definition 4.1.2

Eine Permutation heißt Transposition, wenn für zwei Zahlen

$$i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ gilt: } \tau(i) = j, \tau(j) = i, \tau(k) = k \quad \forall k \neq i, j$$

Beispiel $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ist Transposition

Satz 4.1.3

Jedes Element von S_n ist ein Produkt von Transpositionen.

Beweis: Sei $\sigma \in S_n$. Sei $r(\sigma)$ die maximale Zahl, so dass

$$\sigma(i) = i \quad \forall i \leq r(\sigma)$$

$$\rightarrow \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r(\sigma) & r(\sigma)+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & r(\sigma) & a & \dots & \sigma(r(\sigma)+1) \end{pmatrix}$$

$a \neq r(\sigma)+1$

Jetzt Induktion über $r = r(\sigma)$:

1) Der Satz gilt für alle Permutationen mit $r(\sigma) = n$

$$\text{Es gilt dann: } \sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & r(\sigma)=n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix} = \text{id}$$

Die Identität kann als leeres Produkt aufgefasst werden.

2) Der Satz sei bewiesen für $\sigma \in S_n$ mit $r(\sigma) = r+1$

zeige: σ mit $r(\sigma) = r$ ist Produkt von Transpositionen

Es gilt in der Darstellung oben insbesondere

$$a > r(\sigma)+1$$

Wir setzen

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 \dots r(\sigma) & r(\sigma)+1 \dots \sigma(r(\sigma)+1) \\ 1 \dots r(\sigma) & \sigma(r(\sigma)+1) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tau_1 \sigma = \begin{pmatrix} 1 \dots r(\sigma) & \sigma(r(\sigma)+1) \dots \sigma(r(\sigma)+1) \\ 1 \dots r(\sigma) & \sigma(r(\sigma)+1) \end{pmatrix}$$

$$r(\tau_1 \sigma) \geq r+1$$

$\rightarrow \tau_1 \sigma$ ist Produkt von Transpositionen

$$\text{z.B. } \tau_1 \sigma = \tau_2 \circ \tau_3 \circ \dots \circ \tau_k$$

Für Transpositionen gilt: $\tau^{-1} = \tau$

$$\rightarrow \sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_k$$

□