

Ankündigungen:

- Regelmäßig auf Webseite schauen
- Vorlesungsmitschriften finden sich auf der Webseite
- Klausurstoff: Alles was in der Vorlesung gemacht wurde und alle Übungsaufgaben und ihre Ergebnisse
- Wer vor April eine Note benötigt, muss sich ans Prüfungssekretariat wenden
- Matrikelnummern müssen im MüSli eingetragen sein
- Wer nicht zur Klausur zugelassen wird, kann zu Herrn Kanschätz in die Sprechstunde kommen
- Multiple-Choice-Anteil in der Klausur ist nun $\frac{1}{3}$

Vorlesung:Definition 4.1.4

Sei $\pi \in S_n$ und sei M die Menge aller (ungeordneten) Paare (i, j) mit $i, j \in \{1, \dots, n\}$, also die Menge aller zweielementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$. Dann heißt

$$\text{sgn } \pi = \prod_{(i, j) \in M} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j}$$

das Signum von π .

Lemma 4.1.5

②

$\text{sgn } \pi$ ist wohldefiniert.

Bew:

Die Paare (i, j) und (j, i) bezeichnen dasselbe Element von M . Es gilt aber

$$\frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j} = \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i} \quad \#$$

Alternative Definition:

$$\text{sgn } \pi = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i}$$

Satz 4.1.6

Sei $\pi \in S_n$. Dann gilt:

$$\text{sgn } \pi = (-1)^S,$$

wobei S die Anzahl der Paare (i, j) mit $i < j$ und $\pi(i) > \pi(j)$ ist.

Beispiel: $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

i	j	$\pi(i)$	$\pi(j)$
1	2	3	2
1	3	3	1
2	3	2	1

$$\Rightarrow S = 3 \text{ und } \text{sgn } \pi = -1$$

Beispiel 2: $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\pi(i)$	$\pi(j)$
2	3
2	1
3	1

$$\Rightarrow S = 2 \text{ und } \text{sgn } \pi = 1$$

Beweis:

Da π bijektiv von $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$

Ist die Abbildung

(3)

$$\varphi: M \rightarrow M$$

$$(i, j) \mapsto (\pi(i), \pi(j))$$

ebenfalls bijektiv.

$$\Rightarrow \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j-i) = \pm \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\pi(j) - \pi(i))$$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn} \pi = 1 \text{ oder } \operatorname{sgn} \pi = -1.$$

s ist aber genau die Anzahl der negativen Faktoren rechts. Das Vorzeichen links ist positiv.

#

Korollar 4.1.6a

Für jede Transposition τ gilt $\operatorname{sgn} \tau = -1$.

Beweis:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Wie oft ist $\pi(k) > \pi(l)$ wenn $k < l$?

$$\left. \begin{array}{l} 1) \ (i, i+1) \mapsto (j, i+1) \\ \vdots \\ (i, j-1) \mapsto (j, j-1) \end{array} \right\} j-i-1 \text{ Stück}$$

$$(i, j) \mapsto (j, i)$$

$$\Rightarrow (i, *) \quad j-i \text{ mit } \tau(k) > \tau(l)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2) \ (i, j) \mapsto (j, i) \\ (i+1, j) \mapsto (i+1, i) \\ \vdots \\ (j-1, j) \mapsto (j-1, i) \end{array} \right\} j-i \text{ Stück}$$

Da (i, j) doppelt gezählt wurde gilt:

$$s = 2(j-i) + 1 \text{ und } \operatorname{sgn} \tau = (-1)^{2(j-i)+1} = -1$$

#

[Nachtrag Ankündigungen

(4)

- Im SS 2015 wird ein Präseminar im Themenbereich Vektorraum (aufbauend auf LA) angeboten. Vorbesprechung ist nächsten Montag.]

Satz 4.1.7

Die Abbildung $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{-1, 1\}$ ist ein Gruppenhomomorphismus, wenn $\{-1, 1\}$ mit der üblichen Multiplikation ausgestattet wird.

Also

$$\text{sgn}(\sigma \circ \tau) = \text{sgn} \sigma \cdot \text{sgn} \tau$$

$$\text{sgn}(\text{id}) = 1$$

$$\text{sgn}(\sigma^{-1}) = (\text{sgn} \sigma)^{-1} = \text{sgn} \sigma$$

Beweis:

Es ist zu zeigen $\text{sgn}(\sigma \circ \tau) = \text{sgn} \sigma \cdot \text{sgn} \tau$.

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\sigma \circ \tau) &= \prod_{(i,j) \in M} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{j - i} \\ &= \prod_{(i,j) \in M} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)} \cdot \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} \\ &= \prod_{(i,j) \in M} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)} \cdot \text{sgn} \tau \\ &= \text{sgn} \sigma \cdot \text{sgn} \tau, \text{ da } \tau \text{ Bijektion.} \end{aligned}$$

#

Korollar 4.1.8

⑤

Ist $\pi \in S_n$ das Produkt von s Transpositionen, so gilt

$$\text{sgn } \pi = (-1)^s.$$

Beweis:

Folgt direkt aus 4.1.7.

#

Definition 4.1.8

Permutationen mit positivem Signum heißen gerade, die anderen ungerade.

Definition 4.1.8b

Ein Normalteiler ist eine Untergruppe $N \subset G$ mit der Eigenschaft

$$n \in N \Rightarrow g^{-1}ng \in N \quad \forall g \in G$$

Lemma 4.1.8c

Seien G, H Gruppen, $f: G \rightarrow H$ ein Homomorphismus. Dann ist $\ker f$ ein Normalteiler.

Beweis:

Sei $n \in \ker f$, $g \in G$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(g^{-1}ng) &= f(g^{-1}) \underbrace{f(n)}_{\text{neutrales Element}} f(g) \\ &= f(g^{-1}) f(g) \\ &= e_H \end{aligned}$$

#

Definition 4.1.8d

Die Gruppe der geraden Permutationen A_n heißt alternierende Gruppe zum Index n .

Lemma 4.1.9

⑥

A_n ist Normalteiler in S_n . Ferner gilt für $S_n - A_n = \{\pi \in S_n \mid \text{sgn } \pi = -1\}$, dass

$$S_n - A_n = \tau \cdot A_n = A_n \cdot \tau$$

für jede beliebige ungerade Permutation τ .

Beweis:

Zu zeigen ist nur $S_n - A_n = \tau A_n = A_n \tau$.

Mit Satz 4.1.7 folgt

$$\tau A_n \subseteq S_n - A_n$$

$$A_n \tau \subseteq S_n - A_n$$

Ist nun $\pi \in S_n - A_n$, so ist $\tau^{-1} \circ \pi$ und $\pi \circ \tau^{-1}$ gerade.

$$\Rightarrow \tau A_n \supseteq S_n - A_n$$

#

Definition 4.2.0a

~~Sei~~ Sei V ein VR der Dimension n . Eine Abbildung

$$\varphi: V^m \rightarrow K$$

heißt Multilinearform, wenn

$$\varphi(v_1, \dots, v_i + \alpha w_i, v_{i+1}, \dots, v_m)$$

$$= \varphi(v_1, \dots, v_m) + \alpha \varphi(v_1, \dots, v_{i-1}, w_i, v_{i+1}, \dots, v_m)$$

für $i=1, \dots, m$. φ heißt alternierend,

wenn aus $v_i = v_j$ $i \neq j$ folgt

$\varphi(v_1, \dots, v_m) = 0$. φ heißt trivial, wenn

$$\varphi(v_1, \dots, v_m) = 0 \quad \forall v_i \in V \quad i=1, \dots, m.$$

Definition 4.2.1

⑦

Sei $\dim V = n$. Eine Determinantenfunktion auf V ist eine alternierende Multilinearform

$$\Delta(v_1, \dots, v_n).$$

Lemma 4.2.2

Sei $\Delta: V^n \rightarrow K$ MLF. Dann ist äquivalent

1) Δ ist alternierend

2) $\Delta(v_1, \dots, v_n) = 0$ wenn $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig sind.

Beweis:

2) $\Rightarrow$ 1) ist offensichtlich.

1) $\Rightarrow$ 2) $\exists v_i$ mit $v_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j v_j$
O.B.d.A.: $i=1$

$$\Delta(v_1, \dots, v_n) = \Delta\left(\sum_{j \neq 1} \alpha_j v_j, v_2, \dots, v_n\right)$$

$$= \sum_{j \neq 1} \alpha_j \Delta(v_j, v_2, \dots, v_n)$$

$= 0$, da Δ alternierend

$$= \underline{\underline{0}}$$

#