

Bsp: $f: (0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ist zwar stetig, aber nicht gleichm. stetig:
 Sei $\varepsilon := 1$. Ang. $\exists \delta > 0$. Für n groß genug ist $|\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}| < \delta$,
 aber $|f(x) - f(x')| = |\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}| = |n - 2n| = n > 1 = \varepsilon$.

Satz 1: Sei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Bew: Ang. f wäre nicht gleichm. stetig solmsagen δ
 $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad \forall n=1,2,\dots \exists x_n, x'_n \in K: |x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$ *
 K kompakt $\Rightarrow \exists$ konv. Teilfolge (x_{n_k}) , $\xi := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in K$
 $|x_{n_k} - x'_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \rightarrow 0 \Rightarrow x'_{n_k} \rightarrow \xi$ für $k \rightarrow \infty$
 f stetig $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})) = f(\xi) - f(\xi) = 0$. ∇ m *

Satz 2 Approximation durch Treppenfunktionen

$a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$

Sei $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann: $\forall \varepsilon > 0 \exists$ Treppenfunktionen $\phi, \psi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, sd $\phi \leq f \leq \psi$ auf $[a,b]$ und
 $\psi(x) - \phi(x) \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a,b]$



[14/01/15]

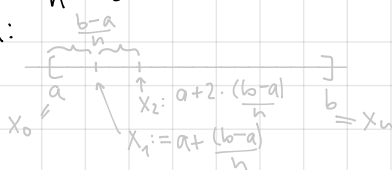
$f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist R-integrierbar $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists$ Treppenfunktionen $\phi, \psi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$
 mit $\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ und $\int_a^b \psi - \int_a^b \phi < \varepsilon$ $\forall x \in [a,b]$

Bew Satz 2 $K = [a,b]$ ist kompakt. Satz 1 $\Rightarrow f$ gleichmäßig stetig.

Sei $\varepsilon > 0 \rightarrow \exists \delta > 0: \forall x, x' \in [a,b]: |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Wähle $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{b-a}{n} < \delta$ durch Arch. Axiom geht das!

Äquidistante Partition:



$M_i := \max f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]$

$m_i := \min f(x), x \in [x_{i-1}, x_i]$

$\exists \mu_i, \mu'_i \in [x_{i-1}, x_i]$ mit $f(\mu_i) = M_i, f(\mu'_i) = m_i$

↳ weiter Bew Satz 2:

$$|\mu_i - \mu_i'| \leq |x_i - x_{i-1}| = \frac{b-a}{n} < \delta \Rightarrow |f(\mu_i) - f(\mu_i')| < \varepsilon$$

$$|M_i - m_i| < \varepsilon$$

$$\begin{cases} \phi(a) = f(a) \\ \phi(x) = m_i, x \in (x_{i-1}, x_i] \end{cases} \quad \begin{cases} \psi(a) = f(a) \\ \psi(x) = M_i, x \in (x_{i-1}, x_i] \end{cases}$$

Dann gilt: $\phi \leq f \leq \psi$, $\psi(x) - \phi(x) < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$ $\square$

Satz 3 Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f $\mathbb{R}$ -integrierbar.

Bew: Sei $\varepsilon > 0$. Satz 2 $\Rightarrow \exists$ Treppenfunktionen ϕ, ψ sd: $\phi \leq f \leq \psi$, $\psi(x) - \phi(x) < \frac{\varepsilon}{b-a}$

Prop. (Lin & Monotonie des $\mathbb{R}$ -Integrals von Treppenfunktionen)

$$\Rightarrow \int_a^b \psi - \int_a^b \phi \stackrel{\substack{\text{wg} \\ \text{Linearit} \\ \text{t} \ddot{\text{a}} \text{t}}}{=} \int_a^b (\psi - \phi) \stackrel{\substack{\text{wg} \\ \text{Monotonie} \\ \text{d. Integr.}}}{\leq} \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon \quad \square$$

Aus Prop. zur Linearität & Monotonie d. $\mathbb{R}$ -Integrals für Treppenfunktionen folgt sofort:

Prop Seien f und $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ -integrierbar und $c \in \mathbb{R}$, dann gilt:

- 1) $f + g$ ist $\mathbb{R}$ -integrierbar & $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
- 2) $c \cdot f$ ist $\mathbb{R}$ -integrierbar & $\int_a^b (c \cdot f) = c \cdot \int_a^b f$
- 3) Ist $f \leq g \quad \forall x \in [a, b]$, dann $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Konventionen bzgl Integralen

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

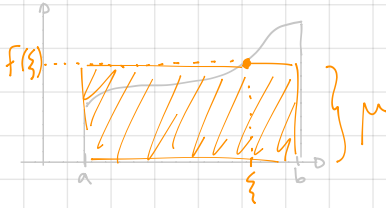
$$\text{Wenn } a > b: \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Mittelwertsatz d. Integralrechnung

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann $\exists \xi \in [a, b]$ mit $(b-a) \cdot f(\xi) = \int_a^b f$

Geometrische Interpretation: $\mu := \frac{1}{b-a} \int_a^b f = \underline{\text{Mittelwert}} \text{ von } f \text{ über } [a, b]$

$f \geq 0$



Bew: $m := \min f(x), x \in [a, b], M := \max f(x), x \in [a, b]$ ex. nach
Extreimalsatz
 $m \leq f \leq M$. Prop $\Rightarrow \underbrace{\int_a^b m}_{(b-a) \cdot m} \leq \int_a^b f \leq \underbrace{\int_a^b M}_{(b-a) \cdot M}$

$$m \leq \underbrace{\frac{1}{b-a} \int_a^b f}_{:= \mu} \leq M$$

Zwischenwertsatz $\Rightarrow \exists \xi : f(\xi) = \mu \quad \square$

Definition: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Eine differenzierbare Funktion $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man Stammfunktion von f wenn $F' = f$.

SATZ (Existenz von Stammfunktionen)



Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, stetig.

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt \quad x \in [a, b] \rightsquigarrow F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dann ist F eine Stammfunktion von f .

Bew: $h \neq 0$. $\frac{1}{h} (F(x+h) - F(x)) = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f \right) = \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f = \mu$

(Es gilt: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$)

Mittelwertsatz $\Rightarrow \exists \xi(h)$ zwischen x und $x+h$ mit $f(\xi(h)) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f$
 $\lim_{h \rightarrow 0} \xi(h) = x$. f stetig $\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi(h)) = f(x)$

 $F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (F(x+h) - F(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi(h)) = f(x) \quad \square$

FUNDAMENTALSATZ DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f . Dann gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b \quad F' = f \Leftrightarrow F(x)' = \int f(x) dx$$

Bew: $G(x) := \int_a^x f(t) dt$. $G' = f = F' \Rightarrow \exists \text{ Konstante } c: F(x) = G(x) + c \quad \forall x$

$$F(b) - F(a) = (G(b) + c) - (G(a) + c) = G(b) - \underbrace{G(a)}_{\substack{0 \text{ da } \int_a^a = 0}} = G(b) = \int_a^b f(x) dx$$

$\square$

16/01/15

Bsp: 1) $\frac{d}{dx} \frac{x^{r+1}}{r+1} = x^r \quad (r \neq -1) \quad \int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}$

2) $\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \log x$

$x < 0$ $\log(-x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{x} = \log |x| \quad (x \neq 0)$

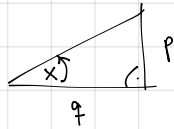
3) $\frac{d}{dx} e^x = e^x \Rightarrow \int e^x dx = e^x$

4) $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} \int \cos x dx = \sin(x) \\ \int \sin x dx = -\cos(x) \end{cases}$

5) Tangens u. Arcustangens

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

Geom:



$$\tan x = \frac{p}{q}$$

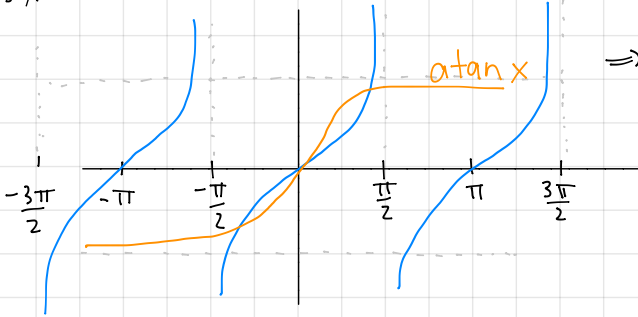
$$\tan: \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tan' x = \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{Quotientenregel} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$$

$\Rightarrow$ Monotoniesatz: $\tan x$ ist str. mon. wachsend auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

$\Rightarrow \exists$ Umkehrfunktion $\arctan x$
 $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



$$\arctan' x = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \cos^2(\underbrace{\arctan x}_{=: y}) = \frac{1}{1+x^2} \quad (\text{rational!})$$

Satz zur Ableitung von Umkehrf!

$$\tan y = x$$

$$\tan^2 y = x^2 = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1 - \cos^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y} - 1, \quad \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$$

Jeder Ableitungsregel entspricht eine Regel zur Auffindung von Stammfunktionen

Kettenregel $\longleftrightarrow$ "Substitutionsregel"
Produktregel $\longleftrightarrow$ "Partielle Integration"

$\phi: [a, b] \xrightarrow{\text{Intervall}} I \subset \mathbb{R}$, stetig diffbar.

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

Heuristik: $x = \phi(t)$. $\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx \stackrel{!}{=} \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt$
 $\frac{d\phi}{dt} = \phi'(t) \Rightarrow d\phi(t) = \phi'(t) dt$

Satz: Substitutionsregel

Sei $\phi: [a, b] \rightarrow I$ stetig diffbar. $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Dann gilt $\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\phi(t)) \phi'(t) dt$

Bew: Sei F eine Stammfunktion von f .

$$(F \circ \phi)'(t) = F'(\phi(t)) \cdot \phi'(t) = f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)$$

$$\int_a^b f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt = \int_a^b (F \circ \phi)'(t) dt = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx \quad \square$$

Bsp: 1) $\int_a^b \frac{\phi'(t)}{\phi(t)} dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} \frac{dx}{x} = \log|\phi(b)| - \log|\phi(a)|$

2) $\int \frac{1}{\sin^2(t) \cdot \cos^4(t)} dt = \int \frac{1}{\sin^2 t \cos^2 t} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} \xrightarrow{dx} \int \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}_{x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}} (x^2 + 1) dx = \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x} + C$

$$x = \tan t$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\frac{1}{\sin^2 t} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t} = 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{\cos^2 t} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t} = x^2 + 1$$

Partielle Integration $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, stetig diffbar.

$$F(x) = f(x) \cdot g(x), F'(x) = f'g + fg'$$

$$\underbrace{\int_a^b F'}_{F(x)|_a^b} = \int_a^b f'g + \underbrace{\int_a^b fg'}_{f \cdot g|_a^b - \int_a^b f'g}$$

$$\text{Bsp: } \int \log x \, dx = \int \log x \cdot 1 \, dx = x \log x - \underbrace{\int \frac{1}{x} \cdot x \, dx}_x = x(\log x - 1)$$

$\underbrace{\log x}_{f} \quad \underbrace{1}_{g' \rightarrow g(x)=x}$

GLEICHMÄßIGE KONVERGENZ V. FUNKTIONEN

Seien $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ bel., Funktionen, $n \in \mathbb{N}$. = Folge von Funktionen

Def: Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert Punktweise gegen eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn $\forall x \in D: \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$

(d.h.: $\forall x \in D \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(x, \varepsilon): |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$)

Wir schreiben auch: $f_n \xrightarrow{\text{punktweise}} f$

Problem: Sind alle f_n stetig und strebt f_n punktweise gegen f , dann ist i. A f nicht mehr stetig

Bsp: $D = [0, 1]$ $f_n(x) = x^n$

• $x \in [0, 1): \Rightarrow x^n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$

• $x = 1 \Rightarrow x^n = 1 \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{p} f$, mit $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

↓
unstetig!

konv. nicht gleichm.!
gl $\Rightarrow$ p $\checkmark$
p $\nRightarrow$ gl !

Def: $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$. (f_n) konvergiert gleichmäßig auf D , wenn $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon)$
sd: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \forall x \in D$

unabhängig von x !

Def: Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)|: x \in D\} \in \mathbb{R}$

↓
Supremumsnorm

Wenn f_n gleichmäßig gegen f konv., dann schreiben wir $f_n \xrightarrow{gl} f$

Es gilt: $f_n \xrightarrow{gl} f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$

(dann $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in D \Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$)

Satz: Sind alle f_n stetig und konv. $f_n \xrightarrow{gl} f$, dann ist auch f stetig.

Bew: Sei $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$. $f_n \xrightarrow{gl} f \Rightarrow \exists N: |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in D$

f_n stetig $\Rightarrow \exists \delta > 0: |f_n(x_0) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, sofern $|x_0 - x| < \delta$

$$|f(x_0) - f(x)| \leq \underbrace{|f(x_0) - f_N(x_0)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|f_N(x_0) - f_N(x)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|f_N(x) - f(x)|}_{< \varepsilon/3} < \varepsilon$$

Bsp: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n$ stetig

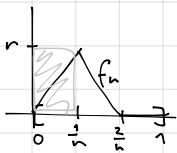
~~?~~

$$\int_a^b f = \int_a^b (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n)$$

$$f_n \xrightarrow{f} f$$

$$\xrightarrow{g'} g'$$

Bsp:



$$f_n \xrightarrow{f} f \equiv 0$$

$$\int_0^1 f_n = \frac{1}{n} \cdot n = 1 \quad \forall n$$

$$\int_0^1 f = \int_0^1 0 = 0$$