



**Ruprecht-Karls-Universität
Heidelberg**

Mathematisches Institut

PROF. DR. MARKUS BANAGL

D-69120 Heidelberg

Im Neuenheimer Feld 288

Telefon: (06221) 54-5763

Telefax: (06221) 54-8312

email:
banagl@mathi.uni-heidelberg.de

ANALYSIS I ÜBUNGSAUFGABEN 7

DEADLINE: Fr. 5. 12. 2014, 16:00.

1. Es sei s die Summe der konvergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Zeigen Sie, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4}s.$$

2. Beweisen Sie: Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen mit $a_n \neq 0$ für $n \geq N$. Gibt es eine Konstante $C > 1$, sodass $|a_{n+1}| \leq (1 - \frac{C}{n})|a_n|$ für alle $n \geq N$, dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Zeigen Sie weiters, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n}$$

absolut konvergiert. (Für eine reelle Zahl x ist $\binom{x}{n} := x(x-1) \cdot \dots \cdot (x-n+1)/n!$.)

3. Sei (a_n) eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Zeigen Sie: $\sum a_n$ konvergiert genau dann, wenn $\sum 2^n a_{2^n}$ konvergiert.
4. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$? Berechnen Sie für solche x den Grenzwert.
Hinweis: Cauchy-Produkt.