



Ruprecht-Karls-Universität
Heidelberg

Mathematisches Institut

PROF. DR. MARKUS BANAGL

D-69120 Heidelberg

Im Neuenheimer Feld 288

Telefon: (06221) 54-5763

Telefax: (06221) 54-8312

email:
banagl@mathi.uni-heidelberg.de

HÖHERE ANALYSIS ÜBUNGSAUFGABEN 7

DEADLINE: Fr. 4. 12. 2015, 16:00. Abgabe in Paaren.

1. Zeigen Sie, dass $L^p(\mathbb{R}, \lambda) \not\subset L^q(\mathbb{R}, \lambda)$ für das Lebesgue-Maß λ auf $\mathbb{R}$ und $1 \leq p \neq q \leq \infty$.

Hinweis: Betrachten Sie z.B. die Funktionen $f_\alpha(x) = x^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. Untersuchen Sie die p -Normen dieser Funktionen in der Nähe von 0, also z.B. auf $(0, 1)$, und dann für x groß, also z.B. auf $(1, \infty)$.

2. Sei $(X, \mathcal{X}, \mu)$ ein Maßraum. Beweisen Sie, dass $L^q \subset L^p + L^r$ für $0 < p < q < r \leq \infty$; d.h. jede Funktion $f \in L^q$ ist die Summe einer Funktion in L^p und einer Funktion in L^r .

Hinweis: Betrachten Sie f auf $E = \{x : |f(x)| > 1\}$ und auf dem Komplement von E .

3. Sei $(X, \mathcal{X}, \mu)$ ein Maßraum. Beweisen Sie, dass $L^p \cap L^r \subset L^q$ für $0 < p < q < r \leq \infty$.

Hinweis: Für $r < \infty$, benutzen Sie Hölders Ungleichung mit geeigneten konjugierten Exponenten.

4. Für $1 \leq p < \infty$, definieren wir die p -Norm einer Folge $x = (x_k)$ reeller Zahlen durch

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

Für $p = \infty$ setzen wir

$$\|x\|_{\infty} := \sup_k |x_k|.$$

Zeigen Sie, dass die *Lebesgueschen Folgenräume* $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$,

$$\ell^p = \{x = (x_k) : \|x\|_p < \infty\}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

Banachräume sind.

Hinweis: Eine elegante Lösung bestünde darin, einen Maßraum $(X, \mathcal{X}, \mu)$ zu konstruieren mit $\ell^p = L^p(X, \mathcal{X}, \mu)$, und sich dann auf Resultate der Vorlesung zu beziehen.