



**Ruprecht-Karls-Universität
Heidelberg**

Mathematisches Institut

PROF. DR. MARKUS BANAGL

D-69120 Heidelberg

Im Neuenheimer Feld 288

Telefon: (06221) 54-5763

Telefax: (06221) 54-8312

email:
banagl@mathi.uni-heidelberg.de

ANALYSIS I ÜBUNGSAUFGABEN 8

DEADLINE: Fr. 12. 12. 2014, 16:00.

1. Zeigen Sie für $k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^k - a^k}{x - a} = ka^{k-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

2. Für welche x sind folgende Funktionen stetig? (Beweisen Sie Ihre Antworten.)

(a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \\ x, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(b) $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \ x > 0 \\ 1/q, & x = p/q, \ p, q \in \mathbb{Z}, \ \text{ggT}(p, q) = 1, \ x > 0 \end{cases}$$

(c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{3} \sin^4(2x) + 8 \cos^4(5x + 1)}{1 + x^2 + e^{\sin x} |\cos x|}$$

3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die in allen rationalen Punkten von $[a, b]$ übereinstimmen. Zeigen Sie, dass dann $f = g$ gilt. Bleibt das richtig, wenn man das Intervall $[a, b]$ durch eine beliebige Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ ersetzt?

4. Die Funktion $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2},$$

ist stetig auf $\mathbb{R} - \{0\}$. A priori ist sie durch obigen Ausdruck nicht für $x = 0$ definiert. Kann man f stetig auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen? Mit anderen Worten: Existiert eine stetige Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \neq 0$? (Beweisen Sie Ihre Antwort.)