Übungen zur Linearen Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Universität Heidelberg - IWR
Prof. Dr. Guido Kanschat
Dr. Dörte Beigel
Philipp Siehr

Blatt 4
Abgabetermin: Freitag, 14.11.2014, 11 Uhr

Aufgabe 4.1 (**Gruppenhomomorphismus I** - *3 Punkte*)
Zeigen Sie, dass φ mit

$$\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to (m\mathbb{Z}, +), \qquad x \mapsto mx. \tag{4.1}$$

für $m \in \mathbb{N}$ ein bijektiver Gruppenhomomorphismus ist. Dabei ist:

$$m\mathbb{Z} = \{m \cdot a \mid a \in \mathbb{Z}\}. \tag{4.2}$$

Aufgabe 4.2 (**Gruppenhomomorphismus II** - *4 Punkte*)
Sei $\varphi : (G, \odot) \to (H, \otimes)$ ein Gruppenhomomorphismus. Die neutralen Elemente in G und H seien mit e_G bzw. e_H bezeichnet. Zeigen Sie:

$$\varphi \text{ ist injektiv} \Leftrightarrow \varphi^{-1}(\{e_H\}) = \{e_G\}.$$

Aufgabe 4.3 (**Gruppenhomomorphismus III** - *3 Punkte*)
Sei $m \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{Z}, +) &\to (\mathbb{Z}_m, \oplus), \\ x &\mapsto \mathrm{mod}_m(x), \end{aligned} \tag{4.3}$$

wobei $x \oplus y = \mathrm{mod}_m(x+y)$ die bereits auf dem letzten Zettel definierte Addition modulo m ist.

a) Zeigen Sie: φ ist ein Homomorphismus.

b) Bestimmen Sie den Kern von φ.

c) Ist φ ein Isomorphismus?

Aufgabe 4.4 (**Gruppenhomomorphismus IV** - *4 Punkte*)
Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und seien folgende Abbildungen mit $a \in G$ definiert:

$$\phi : G \to G, \qquad x \mapsto x \cdot x \tag{4.4}$$

$$\psi : G \to G, \qquad x \mapsto a^{-1} \cdot x \cdot a \tag{4.5}$$

Zeigen Sie:

a) ϕ ist genau dann ein Gruppenhomomorphismus, wenn $\cdot$ kommutativ ist.

b) ψ ist ein Gruppenisomorphismus.