Übungen zur Linearen Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Universität Heidelberg - IWR
Prof. Dr. Guido Kanschat
Dr. Dörte Beigel
Philipp Siehr

Blatt 5
Abgabetermin: Freitag, 21.11.2014, 11 Uhr

Aufgabe 5.1 (**Modulorechnung** - *6 Punkte*)
Wir definieren auf $\mathbb{Z}$ die Modulo-Multiplikation

$$a \odot b = \mathrm{mod}_m(a \cdot b),$$

wobei „·" die übliche Multiplikation der ganzen Zahlen ist.

a) Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned} a \odot b &= \mathrm{mod}_m(a) \odot \mathrm{mod}_m(b) \\ &= \mathrm{mod}_m(a) \odot b \\ &= a \odot \mathrm{mod}_m(b), \end{aligned}$$

b) Sei p eine Primzahl und $t \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} = \{1, \dots, p-1\}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung λ_t definiert durch

$$\begin{aligned} \lambda_t : \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} &\to \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} \\ x &\mapsto t \odot x \end{aligned}$$

injektiv ist.

Hinweis: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Man sagt a teilt b, wenn es ein $n \in \mathbb{Z}$ gibt mit $b = an$.
Man schreibt: $a \mid b$. Sie dürfen die folgende Aussage verwenden:
Sei $p \in \mathbb{N}$ prim, mit $p \mid ab$. Dann gilt: $(p \mid a) \vee (p \mid b)$.

Bitte wenden

Aufgabe 5.2 (**Primzahlkörper** - *6 Punkte*)
Wir haben bereits gezeigt, dass die Menge $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ ausgestattet mit der Modulo-Addition $\oplus$ eine Gruppe bildet, die wir $(\mathbb{Z}_p, \oplus)$ nennen.

a) Zeigen Sie, dass diese Menge zusätzlich ausgestattet mit der Modulo-Multiplikation $\odot$ aus Aufgabe 5.1 einen Körper bildet, sofern p eine Primzahl ist. Dieser Körper wird als Primzahlkörper $\mathbb{F}_p$ bezeichnet.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}_m$ kein Körper ist, wenn m keine Primzahl ist. Untersuchen Sie zum Beispiel zunächst $\mathbb{F}_6$ und schließen Sie dann auf allgemeines m.

Hinweis: Sie dürfen die Resultate der vorherigen Aufgabe verwenden, auch wenn Sie die Aufgabe nicht gelöst haben.

Aufgabe 5.3 (**Homomorphismen** - *4 Punkte*)
Seien K, K' zwei Körper mit entsprechenden Verknüpfungen und $\varphi : K \to K'$ ein Körperhomomorphismus.

- Zeigen Sie: Wenn φ nicht injektiv ist, dann ist φ die Nullabbildung, d.h. $\varphi(x) = 0$ für jedes Element $x \in K$.
- Insbesondere bedeutet dies, dass jeder Körperhomomorphismus injektiv sein muss. Begründen Sie dies.