Übungen zur Linearen Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Universität Heidelberg - IWR
Prof. Dr. Guido Kanschat
Dr. Dörte Beigel
Philipp Siehr

Blatt 7
Abgabetermin: Freitag, 05.12.2014, 11 Uhr

Aufgabe 7.1 (**Vektorräume über endlichen Körpern** - *3 + 1* Punkte*)
Sei K ein Körper mit $\#K = q \in \mathbb{N}$ Elementen und sei V ein K-Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N}$.

a) Bestimmen Sie die Mächtigkeit von V in Abhängigkeit von q und n.

b) Wie viele Untervektorräume der Dimension 0 gibt es in V?

c) Wie viele Untervektorräume der Dimension 1 gibt es in V?

d) Zusatzaufgabe für alle, denen c) Spass gemacht hat: Wie viele Untervektorräume der Dimension $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m \geq n$ gibt es in V? Und wie viele mit $m < n$?

Aufgabe 7.2 (**Lineare Unabhängigkeit** - *3 Punkte*)
Zeigen Sie: $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ sind im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$ linear unabhängig.

Aufgabe 7.3 (**Erzeugnis** - *2 Punkte*)
Welche Dimension hat der von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ t+2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ t+1 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, wobei $t \in \mathbb{R}$ ist? Für welche Werte von t sind die Vektoren ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$?

Bitte wenden

Aufgabe 7.4 (**Untervektorraum** - *4 Punkte*)
Seien U und V Untervektorräume des K-Vektorraums W.

a) Wann ist die Vereinigung $U \cup V$ ein Untervektorraum von W?

b) Wann ist $U \cup V = \langle U, V \rangle$?

c) Wann ist $W \setminus U$ ein Untervektorraum?

Aufgabe 7.5 (**Direkte Summe** - *4 Punkte*)
Betrachten Sie folgende Mengen:

$$\begin{aligned} V &= \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \\ U &= \{f \in V : f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}, \\ G &= \{f \in V : f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass U und G Untervektorräume von V sind. Welche Bedeutung haben die Räume U und G ?

b) Zeigen Sie: $U \oplus G = V$. Was bedeutet dies für eine Funktion $f \in V$?

Hinweis: Es handelt sich hierbei um unendlich dimensionale Räume. Sie können daher keine Basis wählen, sondern müssen sich für ein beliebiges $f \in V$ ein geeignetes $u \in U$ und $g \in G$ konstruieren.