Übungen zur Linearen Algebra 1

Wintersemester 2014/2015

Universität Heidelberg - IWR
Prof. Dr. Guido Kanschat
Dr. Dörte Beigel
Philipp Siehr

Blatt 9
Abgabetermin: Freitag, 19.12.2014, 11 Uhr

Aufgabe 9.1 (**Quotientenraum III** - *4 Punkte*)
Sei V ein K-Vektorraum und $U, W \subset V$ Untervektorräume. Sei $\sim$ wie in Aufgabe 8.4.

a) Sei $V = U \oplus W$. Zeigen Sie, dass $\varphi : W \to V/U, w \mapsto [w]$ ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist.
Was ist die Dimension von V/U?

b) Sei nun $V = \mathbb{Q}^3$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Sei weiter $U = \langle (2,1,1)^\top \rangle$ und
$W = \langle (-1,2,1)^\top, (0,1,1)^\top \rangle$.
Zeigen Sie, dass $V = U \oplus W$ und bestimmen Sie für $v = (1,2,1)^\top \in V$ ein $w \in W$ mit $v \sim w$. Ist w eindeutig ?

c) Bestimmen Sie ein $w' \in \langle (1,0,0)^\top, (0,0,1)^\top \rangle$ mit $v \sim w'$.

Aufgabe 9.2 (**Keine Rechenaufgabe** - *2 Punkte*)
Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $a, b, c, d, e \in V$. Zeigen Sie, dass die folgenden Vektoren linear abhängig sind:

$$\begin{aligned}
v_1 &= a + b + c, \\
v_2 &= 2a + 2b + 2c - d, \\
v_3 &= a - b - e, \\
v_4 &= 5a + 6b - c + d + e, \\
v_5 &= a - c + 3e, \\
v_6 &= a + b + d + e.
\end{aligned}$$

Aufgabe 9.3 (**Kern** - *2 Punkte*)
Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U \subset V$ ein beliebiger Untervektorraum. Zeigen Sie: Es existiert ein Endomorphismus $f : V \to V$, so dass $U = \ker f$.

Bitte wenden

Aufgabe 9.4 (**Dreicksmatrizen** - *4 Punkte*)
Eine linke, untere Dreicksmatrix $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist eine Matrix mit $l_{ij} = 0$ für $j > i$. Analog heißt $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ rechte, obere Dreicksmatrix sofern $r_{ij} = 0$ für $i > j$. Seien die folgenden Mengen gegeben:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \{L \in \mathbb{R}^{n\times n} : L \text{ invertierbar, untere Dreicksmatrix mit } l_{ii} = 1 \text{ für } i = 1, \ldots, n\}, \\ \mathcal{R} &= \{R \in \mathbb{R}^{n\times n} : R \text{ invertierbar, obere Dreicksmatrix}\}. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}$ und $\mathcal{R}$ mit der üblichen Matrizenmultiplikation eine Gruppe bilden. Sind dies abelsche Gruppen ?

b) Sei nun $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $L \in \mathcal{L}$ und $R \in \mathcal{R}$ mit $A = LR$.
Zeigen Sie, dass diese Zerlegung eindeutig ist, sofern sie existiert.

Aufgabe 9.5 (**Elementare Zeilenumformungen** - *4 Punkte*)
Sei $A \in K^{m\times n}$, K ein Körper und $\alpha \in K \setminus \{0\}$.

a) Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden linearen Abbildungen:

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha a_i \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A \mapsto S_i(\alpha)A \text{ mit } S_i(\alpha) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & \underline{i} & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \mid i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

b) Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden linearen Abbildungen:

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + \alpha a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A \mapsto S_i^j(\alpha)A \text{ mit } S_i^j(\alpha) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & & \underline{j} & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & \alpha & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \mid i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

c) Zeigen Sie, dass $\varphi_1 : K^m \to K^m,\ x \mapsto S_i(\alpha)x$ und $\varphi_2 : K^m \to K^m,\ x \mapsto S_i^j(\alpha)x$ Isomorphismen sind.

Bemerkung: Die entsprechenden Eigenschaften gelten auch für die Zeilenvertauschung.
Die Argumentation verläuft dabei analog zu den obigen Beweisen.
Die Notation ist wie in Definition 3.2.1a der Vorlesung.