



**Ruprecht-Karls-Universität
Heidelberg**

Mathematisches Institut

PROF. DR. MARKUS BANAGL

D-69120 Heidelberg

Im Neuenheimer Feld 288

Telefon: (06221) 54-5763

Telefax: (06221) 54-8312

email:

banagl@mathi.uni-heidelberg.de

ANALYSIS I

PROBEKLAUSUR

Januar 2015

Instruktionen: Tragen Sie unten Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein. Sie dürfen eine Karte im Format A6 beidseitig, nur handschriftlich beschrieben, verwenden. Darüber hinaus sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt (insbesondere sind Taschenrechner, Computer, Handys, Mitschriften, Skripten, Literatur nicht zugelassen). Handys müssen abgeschaltet werden und während der Klausur abgeschaltet bleiben. Beantworten Sie jede Frage. Die Lösung jeder Aufgabe ist auf dem zugehörigen Blatt der Aufgabe auszuführen. Es darf kein eigenes Papier verwendet werden. Reicht der vorgesehene Platz nicht aus, stellen wir zusätzliche Blätter zur Verfügung, von denen jedes mit Ihrem Namen und der Aufgabennummer versehen werden muss. Es sind maximal 24 Punkte zu erreichen.
Arbeitszeit: 1 Stunde, 45 Minuten.

NAME, VORNAME:

MATRIKELNUMMER:

1. Eine Folge (a_n) reeller Zahlen sei rekursiv definiert durch $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{8 + 2a_n}$.

(a) Zeigen Sie, dass (a_n) konvergiert. [3 Punkte]

(b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. [1 Punkt]

2. (a) Konvergiert oder divergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^4 \left(2 + \frac{2}{n}\right)^{-n} \quad ?$$

(Beweisen Sie Ihre Antwort.)

[2 Punkte]

- (b) Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n)^n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}.$$

[1+1 Punkte]

3. Beweisen Sie ohne Zuhilfenahme des Fundamentalsatzes der Integral- und Differentialrechnung: Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$(b - a) \cdot f(\xi) = \int_a^b f(x) dx.$$

[4 Punkte]

4. (a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + 2x^3 + 5x + 1$, bijektiv ist.
[2 Punkte]
- (b) Berechnen Sie die Ableitung $g'(9)$, wobei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von f ist.
Hinweis: $f(1) = 9$.
[2 Punkte]

5. (a) Verwenden Sie die Theorie der Potenzreihen, um zu zeigen, dass die Funktion

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = \begin{cases} \frac{1-\cos t}{t}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0 \end{cases},$$

glatt im Punkt $t = 0$ ist.

[2 Punkte]

- (b) Geben Sie die Taylorreihe mit Mittelpunkt $x_0 = 0$ der Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x g(t) dt$$

an.

Hinweis: Gliedweise Integration.

[2 Punkte]

6. (a) Geben Sie die Definition des Begriffs *Kompaktheit* einer Menge $K \subset \mathbb{R}$ an. [1 Punkt]
- (b) Geben Sie ein Beispiel einer Menge $X \subset \mathbb{R}$ an, die abgeschlossen aber nicht kompakt ist. [1 Punkt]
- (c) Formulieren Sie das Majorantenkriterium von Weierstraß für Funktionenreihen. [1 Punkt]
- (d) Geben Sie eine Stammfunktion der Funktion $1/(1+x^2)$ an. [1 Punkt]

(Zusatzblatt.)