

5. Übungsblatt

Ausgabe 17.11.2014 – Abgabe 24.11.2014 – Besprechung 01.12.2014

13. Aufgabe [3 Punkte]: Vektorprodukt, Kronecker-Delta und Levi-Civita Symbol

Zeigen Sie unter Verwendung des Kronecker-Deltas und des Levi-Civita-Symbols folgende Relationen für beliebige dreidimensionale Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, und $\vec{c}$:

- a) $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$,
- b) $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot [(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}] = 2\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$,
- b) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$.

14. Aufgabe [5 Punkte]: Bewegung entlang einer Kurve

Eine punktförmiges Objekt bewege sich auf der Kurve:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} R \cos(\omega t) \\ R \sin(\omega t) \\ v_z t \end{pmatrix}.$$

- a) Skizzieren Sie die Bahn und berechnen Sie den Tangentialvektor $\vec{\tau}(t)$, Hauptnormalenvektor $\vec{n}_H(t)$ und den Binormalenvektor $\vec{n}_B(t)$. Überprüfen Sie das Ergebnis im Grenzfall $v_z \rightarrow 0$.
- b) Berechnen Sie den lokalen Krümmungsradius $\rho(t)$ der Bahn und stellen Sie Geschwindigkeit und Beschleunigung in der durch Tangentialvektor, Hauptnormalenvektor und Binormalenvektor definierten (zeitabhängigen) Orthonormalbasis dar.

15. Aufgabe [5 Punkte]: Gradient und Richtungsableitung

Im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ seien folgende Potentiale gegeben

a) $V(\vec{x}) = -\frac{c}{|\vec{x}|^3}, \quad c > 0.$

b) $V(\vec{x}) = -\frac{k}{2}(\vec{x} \cdot \vec{x}) + \frac{\lambda}{4}(\vec{x} \cdot \vec{x})^2, \quad k > 0, \quad \lambda > 0,$

Berechnen Sie jeweils die zugehörige Kraft $\vec{F} = -\nabla V$ und skizzieren Sie das Kraftfeld. Geben Sie die Richtungsableitung der Potentiale am Punkt $(1, 1, 1)$ in die Richtungen $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (-1, -1, 2)$ und $\vec{c} = (-1, 1, 0)$ an.

16. Aufgabe [7 Punkte]: (Konservative) Kraftfelder

Gegeben seien zwei Kraftfelder

$$\vec{F}_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y^2 - z^2 \\ x(y - z) \\ xy - z^2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{F}_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -2z \\ 8z \\ 8y - 2x \end{pmatrix}$$

- Prüfen Sie, ob die Felder konservativ sind.
- Berechnen Sie die Arbeit $W_i, i = 1, 2$, die von außen am System verrichtet werden muss, um ein Teilchen im Kraftfeld $\vec{F}_i(\vec{x})$ entlang einer Geraden vom Punkt $(0, 0, 0)$ zum Punkt $(1, 1, 1)$ zu bringen.
- Berechnen Sie die Arbeit $\tilde{W}_i, i = 1, 2$, die von außen am System verrichtet werden muss, um ein Teilchen im Kraftfeld $\vec{F}_i(\vec{x})$ entlang der bzw. parallel zu den Koordinatenachsen vom Punkt $(0, 0, 0)$ zum Punkt $(1, 1, 1)$ zu bringen. D.h. bringen Sie das Teilchen jeweils entlang einer Geraden von $(0, 0, 0)$ nach $(1, 0, 0)$, dann von $(1, 0, 0)$ nach $(1, 1, 0)$ und zuletzt von $(1, 1, 0)$ nach $(1, 1, 1)$.
- Bestimmen Sie, falls möglich, die Potentiale der Kraftfelder und vergleichen Sie mit den Ergebnissen aus b) und c).