

Theoretische Physik I

Punktmechanik und mathematische Methoden

Version WS 2014/2015 — Tilman Plehn
Original von Matthias Bartelmann

19. Januar 2015

Zuerst ein paar organisatorische Informationen:

- **stellen Sie Fragen!**
- sollten Sie Werbung für die Fachschaft oder anderes studentisches Engagement machen wollen, dann melden Sie sich gerne bei mir.
- Informationen zum Beispiel zur Organisation der Vorlesung und der Übungen gibt es in der Vorlesung.
- die ersten beiden Übungen sind Präsenzübungen.
- Übungsblätter können gerne in Kleingruppen bearbeitet werden. Die Lösungen werden einzeln abgegeben, und müssen in der Übungsgruppe vorgerechnet werden können.
- die letzte Vorlesung findet am 22.1. statt.
- die Woche des 26.1. dient der Klausurvorbereitung (study week).
- 60% der Übungspunkte sind die Voraussetzung für die Klausurzulassung.
- die beste Vorbereitung für die Klausur sind die Übungsblätter.
- erste Klausur am Dienstag, 2.12. 11:00-13:00 (30% der Endnote).
- zweite Klausur am Dienstag 3.2. 10:00-13:00 (70% der Endnote).
- zur Klausur können Sie ein doppelseitig beschriebenes oder bedrucktes DIN-A4-Blatt mitnehmen, weitere Hilfsmittel werden nicht benötigt.

Herzlichen Dank an viele Studentinnen und Studenten, die das Skript kommentiert und korrigiert haben und damit sehr dazu beigetragen haben, es zu verbessern und verständlicher zu machen!

Inhaltsverzeichnis

1	Die Newtonschen Axiome	1
1.1	Einführung	1
1.2	Newtonsche Axiome	3
1.3	Differentialgleichungen I	4
1.3.1	Definition und Klassifikation	4
1.3.2	Lösungsmethoden: Trennung der Veränderlichen	5
1.3.3	Lösungsmethoden: Variation der Konstanten .	6
1.4	Fallbewegungen	8
1.4.1	Freier Fall aus geringer Höhe	8
1.4.2	Fall aus geringer Höhe mit Stokesscher Reibung	9
1.4.3	Fall aus geringer Höhe mit Luftwiderstand . .	11
1.4.4	Freier Fall aus großer Höhe	13
2	Mathematische Grundlagen	15
2.1	Differentialgleichungen II	15
2.1.1	Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen . . .	15
2.1.2	Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung	17
2.2	Taylor-Reihen	19
2.2.1	Der Taylorsche Satz	19
2.2.2	Einfache Beispiele	21
2.3	Vektoren I	23
2.3.1	Vektorräume	23
2.3.2	Lineare Abhängigkeit, Basis und Dimension .	25

2.3.3	Beispiele	25
3	Impuls, Drehimpuls und Energie	27
3.1	Vektoren II	27
3.1.1	Das Skalarprodukt	27
3.1.2	Einsteinsche Summenkonvention, Kronecker- und Levi-Civita-Symbole	28
3.1.3	Das Vektorprodukt	29
3.1.4	Koordinaten und Koordinatentransformationen	30
3.1.5	Inertialsysteme	32
3.2	Impuls, Drehimpuls und Energie	32
3.2.1	Impuls	33
3.2.2	Drehmoment und Drehimpuls	33
3.2.3	Energiesatz in einer Dimension	34
4	Bewegung in drei Dimensionen	37
4.1	Kinematik in drei Dimensionen	37
4.1.1	Bahnkurven	37
4.1.2	Bogenlänge, Tangential- und Normalvektoren .	38
4.1.3	Tangential- und Normalkomponenten	40
4.1.4	Kurvenintegrale	41
4.2	Differentialoperatoren	42
4.2.1	Felder, Partielle Ableitungen und der Gradient	42
4.2.2	Divergenz und Rotation	44
4.2.3	Rechenregeln	45
4.3	Energiesatz in drei Dimensionen	45
4.3.1	Energieerhaltung bei Potentialkräften	45
4.3.2	Beispiele für Potentialkräfte	46
4.4	Konservative Kraftfelder	47
4.4.1	Unabhängigkeit vom Weg	47
4.4.2	Der Satz von Stokes	49

5	Bewegung im Zentralfeld	52
5.1	Krummlinig-orthogonale Koordinaten	52
5.1.1	Allgemeines	52
5.1.2	Zylinderkoordinaten	53
5.1.3	Sphärische Polarkoordinaten	54
5.2	Das Keplerproblem (nicht in Vorlesung)	54
5.2.1	Allgemeine Behandlung der Bewegung im Zentralfeld	54
5.2.2	Arten der Bewegung	57
5.2.3	Form der Bahnen	58
5.2.4	Kreis- und Ellipsenbahnen	59
5.2.5	Parabel- und Hyperbelbahnen	60
5.2.6	Der Laplace-Lenz-Runge-Vektor	61
6	Stöße und Streuung	62
6.1	Systeme von Massenpunkten	62
6.1.1	Bewegung des Schwerpunkts	62
6.1.2	Drehimpuls	63
6.1.3	Energie	64
6.1.4	Reduzierte Masse	65
6.2	Stöße und Streuung	65
6.2.1	Elastischer Stoß zwischen zwei Teilchen . . .	65
6.2.2	Transformation der Streuwinkel	66
6.2.3	Energieübertrag bei elastischer Streuung . . .	67
6.3	Streuung (nicht in Vorlesung)	68
6.3.1	Streuwinkel	68
6.3.2	Streuquerschnitt	69
6.3.3	Streuung unter kleinen Winkeln	70
6.4	Mechanische Ähnlichkeit und der Virialsatz (nicht in Vorlesung)	71
6.4.1	Mechanische Ähnlichkeit	71

6.4.2	Beispiele	72
6.4.3	Der Virialsatz	72
7	Koordinatentransformationen	74
7.1	Darstellung durch Matrizen	74
7.1.1	Drehungen im dreidimensionalen Raum	74
7.1.2	Matrizen und Matrixoperationen	75
7.1.3	Beispiele	76
7.2	Determinanten und Matrixinversion	77
7.2.1	Determinanten	77
7.2.2	Eigentliche und uneigentliche orthonormale Transformationen	78
7.2.3	Inversion von Matrizen	79
7.3	Physikalische Bedeutung	81
7.3.1	Transformation des Drehimpulses	81
7.3.2	Transformation des Ortsvektors	83
8	Kräfte in beschleunigten Bezugssystemen	84
8.1	Zeitabhängige Transformationen	84
8.1.1	Winkelgeschwindigkeit	84
8.1.2	Infinitesimale Transformationen	86
8.2	Bewegung auf der rotierenden Erde	87
8.2.1	Scheinkräfte	87
8.2.2	Zur Corioliskraft	89
8.3	Reduziertes Dreikörperproblem (nicht in Vorlesung) . .	90
9	Bewegung starrer Körper	93
9.1	Die Euler-Winkel	93
9.2	Tensoren	96
9.2.1	Der Trägheitstensor	96
9.2.2	Tensoren als lineare Abbildungen	97
9.2.3	Transformationseigenschaften	97

9.2.4	Tensorprodukt	99
9.3	Diagonalisierung	100
9.3.1	Diagonalisierung von Matrizen	100
9.3.2	Diagonalisierung des Trägheitstensors	102
10	Trägheitstensor und Trägheitsmomente	103
10.1	Volumenintegrale	103
10.1.1	Vorbemerkung	103
10.1.2	Ausführung	104
10.1.3	Koordinatentransformationen und die Jacobi- determinante	105
10.1.4	Trägheitstensor einer Kugel	106
10.2	Drehimpuls und Trägheitsmomente starrer Körper (nicht in Vorlesung)	107
10.2.1	Drehimpuls	107
10.2.2	Trägheitsmomente	108
10.2.3	Homogenes Rotationsellipsoid	109
10.3	Der Gaußsche Satz	110
10.3.1	Herleitung	110
10.3.2	Transformation von Divergenz und Rotation . .	111
10.3.3	Beispiel	113
11	Harmonische Schwingungen	114
11.1	Der Harmonische Oszillator I	114
11.1.1	Bewegungsgleichung bei linearisierter Kraft . .	114
11.1.2	Freie Schwingungen	115
11.2	Komplexe Zahlen	116
11.2.1	Elementare Rechenregeln	116
11.2.2	Komplexe Exponentialfunktion	117
11.2.3	Komplexe Darstellung harmonischer Schwin- gungen	118
11.2.4	Hermiteische Matrizen	119

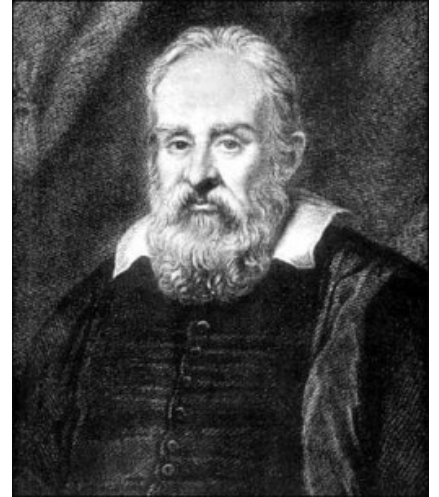
11.3	Der harmonische Oszillator II	120
11.3.1	Gedämpfte Schwingungen	120
11.3.2	Schwache, starke und kritische Dämpfung . . .	121
12	Pendelschwingung und Resonanz	123
12.1	Pendel	123
12.1.1	Mathematisches Pendel	123
12.1.2	Physikalisches Pendel	124
12.1.3	Das Foucaultsche Pendel	125
12.2	Erzwungene Schwingungen, Resonanz	126
12.2.1	Allgemeine Lösung bei periodischem Antrieb .	126
12.2.2	Resonanz und Halbwertsbreite	127
12.2.3	Grenzfall schwacher Dämpfung	128
12.2.4	Beispiel: Die natürliche Breite von Spektrallinien	129
12.2.5	Allgemeine Lösung für erzwungene Schwin- gungen	130
12.2.6	Beispiel: Schwingung nach einem Kraftstoß . .	131

Kapitel 1

Die Newtonschen Axiome

1.1 Einführung

- Physik ist eine Erfahrungswissenschaft, die Vorgänge in der (meist unbelebten) Natur zu quantifizieren und auf Gesetzmäßigkeiten zurückzuführen sucht. Theoretische Physik sucht die Einheit hinter der Vielfalt, die möglichst fundamentalen Gesetze, die der Vielfalt der Erfahrungstatsachen zugrunde liegen. Diese Gesetze nehmen die Form mathematischer Gleichungen an, in denen die mathematischen Symbole semantisch an die Stelle physikalischer Größen treten. Anders als mathematische Ergebnisse müssen die Gesetze der Physik prüfbare Vorhersagen erlauben.
- Physikalischen Gesetzen liegen notwendigerweise Idealisierungen zugrunde, weil wesentliche von unwesentlichen Eigenschaften physikalischer Systeme unterschieden werden müssen. Erst durch geeignete Näherungen wird theoretische Physik überhaupt möglich, weil erst durch Näherungen Abgrenzungen physikalischer Systeme von ihrer Umwelt eingeführt werden können. Die Beschränkung auf wenige Objekte kann, muss aber nicht die Grundlage solcher Näherungen sein.
- Theoretische Mechanik beschreibt die Gesetze, nach denen sich Körper im Raum unter dem Einfluss von Kräften mit der Zeit bewegen. Sie führt zu Begriffen und Methoden, die sich durch die gesamte theoretische Physik ziehen und vor allem für die Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie außerordentlich fruchtbar waren. Anwendungen von Quantenfeldtheorie als mathematischem Modell sind Elementarteilchenphysik oder Festkörperphysik.
- Meilensteine in der geschichtlichen Entwicklung der klassischen Mechanik (im Unterschied zur Quantenmechanik) waren Galileo Galileis Fallversuche, Tycho Brahes Messungen der Marsbahn



Galileo Galilei



Isaac Newton

und deren gesetzmäßige Zusammenfassung durch Johannes Kepler sowie Isaac Newtons Axiome und seiner Erklärung der Keplerschen Gesetze durch das Gravitationsgesetz. Weitere für die Entwicklung vor allem der analytischen Mechanik wichtige Personen waren Joseph Lagrange, Leonhard Euler, Jean Baptiste le Rond d'Alembert, William Hamilton und Emmy Noether.

- Die klassische Punktmechanik kennt eine „Vierheit“ von Objekten, nämlich *Körper*, *Kräfte*, *Raum* und *Zeit*.
- *Körper* werden idealisiert als Punkte bestimmter Masse. Ihre Ausdehnung ist sehr klein gegenüber den Dimensionen des gesamten betrachteten Systems, wobei „klein“ oder „groß“ höchst relative Begriffe sind. Zum Beispiel in der Elementarteilchenphysik haben wir es allgemein mit Teilchen zu tun, deren räumliche Ausdehnung wir nicht kennen. Solange wir nur eine obere Grenze zum Beispiel an die Ausdehnung von Elektronen kennen, betrachten wir sie als Punktteilchen. Ein fester Körper wird als System von Massenpunkten aufgefasst, deren Abstände untereinander konstant sind. Ein System aus vielen Massenpunkten bewegt sich im Ganzen so, als würden die äußeren Kräfte an seinem Schwerpunkt angreifen.
- *Kräfte* sind die Ursachen der Änderung einer Bewegung und mathematisch genauer zu definieren. In der klassischen Mechanik wird angenommen, dass Kräfte instantan wirken, d.h. mit unendlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit.
- Der *Raum* in der klassischen Mechanik hat drei Raumdimensionen und eine weitere Zeit-Dimension. Die Lage von Körpern in diesem dreidimensionalen Raum hat keinen absoluten Sinn, sondern muss relativ zu anderen Körpern, den Bezugssystemen, angegeben werden. Der physikalische Raum wird als ein reeller, dreidimensionaler Vektorraum aufgefasst. Die momentane Lage eines Massenpunkts im Raum wird durch einen Ortsvektor $\vec{x}$ angegeben. Der Ursprung des Bezugssystems kann beliebig gewählt werden (Homogenität), und seine Achsen können beliebig orientiert werden (Isotropie). Als Bezugssysteme werden wir zunächst kartesische Koordinatensysteme wählen.
- Die *Zeit* spielt in der klassischen Mechanik die Rolle eines unabhängigen Parameters. Ihr Nullpunkt ist im Allgemeinen frei wählbar (Homogenität der Zeit). Raum und Zeit sind in der klassischen Mechanik unabhängig von der Existenz von Körpern und ihrer Bewegung relativ zueinander, sie sind in diesem Sinne absolut. Die Bahnkurve $\vec{x}(t)$ beschreibt, wie sich sein Ort zeitlich ändert. Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist die Änderung des Ortes mit der

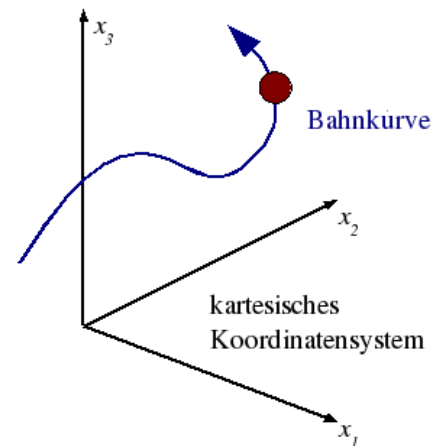
Zeit, dargestellt durch die Zeitableitung des Ortes:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt} =: \dot{\vec{x}}(t) . \quad (1.1)$$

Ein Punkt über einem Funktionssymbol bezeichnet die Zeitableitung dieser Funktion.

1.2 Newtonsche Axiome

Newtons Axiome sind die Grundlage aller Rechnungen in der klassischen Mechanik. Sie sind nicht die einzige Art, diese Grundlagen zu formulieren, wie wir später sehen werden, aber sie sind vergleichsweise sehr anschaulich.



Bahnkurve in einem kartesischen Koordinatensystem

1. Trägheitsgesetz, *Lex Prima*: Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern. ¹

Postuliert wird die Trägheit eines Körpers, sein Beharrungsvermögen. Als „Bewegungsgröße“ wird das Produkt aus Masse m und Geschwindigkeit $\vec{v}$ definiert, d.h. der *Impuls* $\vec{p} = m\vec{v}$. Der Begriff „Masse“ als Proportionalitätskonstante ist an dieser Stelle noch nicht definiert. Damit besagt das Trägheitsgesetz:

$$\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{\vec{x}} = \text{konstant} \quad (1.2)$$

in Abwesenheit von Kräften. In diesem Fall ist der Impuls erhalten, wobei auch „Kraft“ noch zu definieren ist.

2. Bewegungsgesetz, *Lex Secunda*: Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt. ²

Die Änderung der Bewegungsgröße ist die Zeitableitung des Impulses. Sei $\vec{F}$ die Kraft, besagt das Bewegungsgesetz

$$\dot{\vec{p}} = m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} \quad (1.3)$$

bei konstanter Masse m . Dieses Axiom besagt, dass Bewegungsgleichungen in der Regel zweite Ableitungen des Ortes nach der Zeit enthalten.

¹Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum nisi quatenus a viribus cogiter staturum illum mutare.

²Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur.

Kräfte werden definiert, indem man Messvorschriften angibt, die z.B. eine unbekannte Kraft mit der Gravitationskraft vergleichen. Kräfte addieren sich wie Vektoren. Wenn wir die Ortskoordinate kennen, dann ist die Masse m als Proportionalitätskonstante zur Kraft definiert. Sie bezeichnet hier die *träge* Masse, im Gegensatz zur *schweren* Masse, zu der die Gravitationskraft proportional ist.

3. Reaktionsgesetz, *Lex Tertia*: Die Wirkung ist stets der Gegenwirkung gleich, oder die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung.³
4. *Masse und Kräfte*: Offenbar setzen also die Newtonschen Axiome eine geeignete Wahl der Einheiten voraus. Die *Proportionalität* von Impulsänderung und Kraft wird erst durch die geeignete Wahl der Einheit der Masse zu einer Gleichheit. Die *Proportionalität* von schwerer und träger Masse wird zu einer Gleichheit durch die Definition der Gravitationskonstante G . Die träge Masse erweist sich aufgrund der speziellen Relativitätstheorie als geschwindigkeitsabhängig, ist aber in der klassischen Mechanik konstant.

Kräfte hängen im Allgemeinen vom Ort und von der Zeit ab. Einfache Beispiele für Kräfte sind etwa die Gravitations- und die Coulombkraft, die beide indirekt proportional zum Abstandsquadrat sind (das ist eine notwendige Folge der Masselosigkeit der Austauschteilchen). Die Federkraft ist proportional zur Auslenkung einer Feder. Kräfte können aber auch von der Geschwindigkeit abhängen wie etwa die Lorentzkraft auf ein geladenes Teilchen im Magnetfeld oder Reibungskräfte.

1.3 Differentialgleichungen I

1.3.1 Definition und Klassifikation

Gleichungen wie das zweite Newtonsche Bewegungsgesetz verknüpfen Funktionen wie die Bahnkurve $\vec{x}(t)$ mit ihren Ableitungen nach ihrer Variablen. Solche Differentialgleichungen kann man mathematisch beschreiben und oft mit Hilfe von Standardverfahren lösen. Lösungen von Differentialgleichungen sind das Kernproblem der Newtonschen Beschreibung der klassischen Mechanik.

- Differentialgleichungen sind Gleichungen, die Ableitungen einer oder mehrerer Funktionen nach einer oder mehreren Variablen enthalten. *Gewöhnliche* Differentialgleichungen beschrei-

³Actio = reactio.

ben Funktionen einer unabhängigen Variablen, während *partielle* Differentialgleichungen von mehreren unabhängigen Variablen abhängen. Die *Ordnung* einer Differentialgleichung ist der Grad der höchsten auftretenden Ableitung. Wegen Newtons zweitem Axiom führen die Bewegungsgesetze der klassischen Mechanik in der Regel auf gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung, in denen die unabhängige Variable die Zeit t ist.

- Wenn die unbekannte Funktion $y(x)$ und alle ihre Ableitungen $y'(x)$, $y''(x)$ usw. höchstens linear in einer Differentialgleichung vorkommen, heißt die Gleichung selbst linear. Zum Beispiel ist

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \quad (1.4)$$

in der $p(x)$ und $q(x)$ bekannte Funktionen sind, eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung in x . In der Newtonschen Mechanik ist der Parameter oft die Zeit t , und Ableitungen werden mit $\dot{y}(t)$ statt mit $y'(x)$ bezeichnet.

- Die Differentialgleichung in (1.4) enthält keine konstanten, von $y(x)$ und seinen Ableitungen unabhängige Terme. Sie heißt daher *homogen*. Inhomogene Differentialgleichungen enthalten solche Konstanten, wie zum Beispiel die Gleichung

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r, \quad (1.5)$$

- Das *Richtungsfeld* einer (gewöhnlichen) Differentialgleichung wird dadurch angegeben, dass in jedem Punkt der y - x -Ebene die Steigung $y'(x)$ angegeben wird.

1.3.2 Lösungsmethoden: Trennung der Veränderlichen

- Beginnen wir mit dem Beispiel des radioaktiven Zerfalls. Die Teilchenzahl $N(t)$ wird durch das Zerfallsgesetz

$$\dot{N}(t) = -\lambda N(t) \quad (1.6)$$

beschrieben, worin $\lambda > 0$ die Zerfallskonstante ist. Diese gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung lässt sich lösen, indem man die Variablen N und t voneinander trennt,

$$\dot{N} = \frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad \Rightarrow \quad \frac{dN}{N} = -\lambda dt. \quad (1.7)$$

Nach der Trennung der Variablen N und t ist es nicht sinnvoll oder hilfreich, N als Funktion der Zeit zu schreiben. Im Endergebnis wird diese Abhängigkeit automatisch wieder auftauchen.

In dieser Form kann die Gleichung auf beiden Seiten integriert werden,

$$\int_{N_0}^{N_1} \frac{dN}{N} = \ln N \Big|_{N_0}^{N_1} = \ln N_1 - \ln N_0$$

$$-\lambda \int_{t_0}^{t_1} dt = -\lambda (t_1 - t_0) \quad (1.8)$$

Wenn man $N_1(t_1)$ als physikalische Observable betrachtet, dann ist die Lösung dieser Gleichung mit bestimmten Integralen

$$\ln N_1(t_1) = -\lambda(t_1 - t_0) + \ln N_0 \quad (1.9)$$

Wenn man die Stammfunktion $N_1(t_1)$ als allgemeine Lösung $N(t)$ betrachtet, dann kann man sie als

$$\ln N(t) = -\lambda t + C \quad \Leftrightarrow \quad N(t) = e^{-\lambda t} e^C, \quad (1.10)$$

schreiben. Die Konstante C ist durch N_0 und t_0 gegeben. Wenn wir statt des bestimmten Integrals zwischen t_0 und t_1 die Stammfunktion des unbestimmten Integrals suchen, dann ist C eine freie Integrationskonstante. In beiden Fällen erlaubt sie uns, eine *Anfangsbedingung* zu stellen: Soll bei $t_0 = 0$ die Anzahl $N = N_0$ sein, so folgt $e^C = N_0$ oder das exponentielle Zerfallsgesetz

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (1.11)$$

Allgemein ist dieses Verfahren bei Gleichungen angebracht, die sich in die Form

$$g(y)y'(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad g(y)dy = f(x)dx \quad (1.12)$$

bringen lassen. Im Fall des Zerfallsgesetzes hatten wir $y \rightarrow N$, $g(y) \rightarrow 1/y \rightarrow 1/N$, $x \rightarrow t$, und $f(x) \rightarrow -\lambda$. Dann führt die Separation der Variablen und anschließende Integration über x auf

$$\int g(y)y'(x)dx = \int g(y)dy = \int f(x)dx + C, \quad (1.13)$$

woraus dann implizit die Funktion $y(x)$ bestimmt werden kann.

1.3.3 Lösungsmethoden: Variation der Konstanten

Das kommende Beispiel ist eine Variation des Zerfallsgesetzes, das mit klassischer Mechanik nichts zu tun hat. Aber es illustriert, wie man mithilfe der „Variation der Konstanten“ inhomogene Differentialgleichungen lösen kann.

- Betrachten wir nun den etwas schwierigeren Fall, in dem Kerne der Sorte A in Kerne der Sorte B und diese dann in stabile Kerne der Sorte C zerfallen. Nach dem einfachen Zerfallsgesetz ist die Anzahl N_A der A -Kerne durch

$$\dot{N}_A(t) = -\lambda_A N_A(t) \quad \Leftrightarrow \quad N_A(t) = N_{A0} e^{-\lambda_A t} \quad (1.14)$$

gegeben. Die Anzahl der Kerne B wird durch ihren Zerfall verringert, aber durch den Zerfall von A -Kernen erhöht,

$$\dot{N}_B(t) = -\lambda_B N_B(t) - \dot{N}_A(t) = -\lambda_B N_B(t) + \lambda_A N_{A0} e^{-\lambda_A t} . \quad (1.15)$$

Wir haben für $N_B(t)$ eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung, die Terme enthält, die nicht von N_B abhängen. Man nennt sie inhomogene Gleichungen und bringt gewöhnlich die homogenen und inhomogenen Teile auf verschiedene Seiten der Gleichung,

$$\dot{N}_B(t) + \lambda_B N_B(t) = \lambda_A N_{A0} e^{-\lambda_A t} . \quad (1.16)$$

- In so einem Fall verschafft man sich zunächst die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung, also der Gleichung, die man erhält, wenn man die Inhomogenität auf der rechten Seite gleich Null setzt. Im Fall von (1.16) ist die Lösung das einfache Zerfallsgesetz

$$\dot{N}_B(t) + \lambda_B N_B(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N_B(t) = N_{B0} e^{-\lambda_B t} . \quad (1.17)$$

- Eine Lösung der inhomogenen Gleichung kann man sich daraus verschaffen, indem man die Konstante N_{B0} als zeitabhängig auffasst, also $N_{B0} \rightarrow B(t)$ und

$$N_B(t) = B(t) e^{-\lambda_B t} \quad (1.18)$$

$$\dot{N}_B(t) = \dot{B}(t) e^{-\lambda_B t} - B(t) \lambda_B e^{-\lambda_B t} = \dot{B}(t) e^{-\lambda_B t} - \lambda_B N_B(t) . \quad (1.19)$$

Wenn wir annehmen, dass der Ansatz mit $B(t)$ die inhomogene Gleichung löst, dann können wir diese Form in (1.16) einsetzen und eine Differentialgleichung für $B(t)$ erhalten,

$$\left(\dot{B}(t) e^{-\lambda_B t} - \lambda_B N_B(t) \right) + \lambda_B N_B(t) = \lambda_A N_{A0} e^{-\lambda_A t} \quad (1.20)$$

$$\dot{B}(t) = \lambda_A N_{A0} e^{-(\lambda_A - \lambda_B)t} . \quad (1.21)$$

Wir können sie direkt integrieren,

$$B(t) = \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_{A0} e^{-(\lambda_A - \lambda_B)t} + C , \quad (1.22)$$

wobei wieder die Konstante C durch die Anfangsbedingungen festgelegt werden kann.

- Setzen wir das Ergebnis (1.22) in die Gleichung für N_B in (1.18) ein, so folgt

$$N_B(t) = C e^{-\lambda_B t} + \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_{A0} e^{-\lambda_A t} . \quad (1.23)$$

Um die Konstante C zu bestimmen, wählen wir die Anzahl der B -Kerne als $N_B(t=0) = N_{B0}$. Damit erhalten wir

$$N_{B0} = C + \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_{A0} \quad \Leftrightarrow \quad C = N_{B0} - \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_{A0} \quad (1.24)$$

und daraus die Lösung für die Differentialgleichung (1.15)

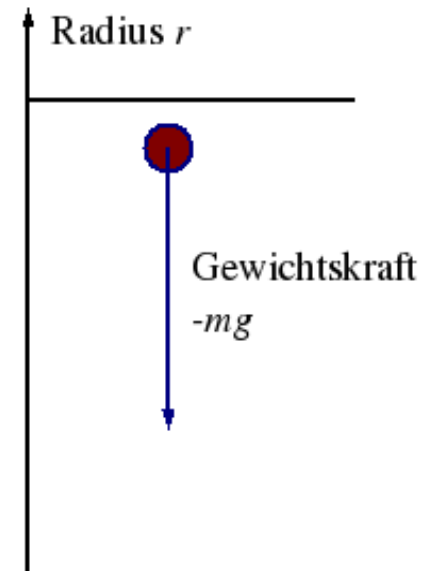
$$N_B(t) = N_{B0} e^{-\lambda_B t} + \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} N_{A0} (e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}) . \quad (1.25)$$

Sie ist, wie alle Lösungen inhomogener Differentialgleichungen, die Summe der allgemeinen homogenen Gleichung (1.17) und einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung. Man kann sie durch Einsetzen in (1.16) explizit überprüfen.

1.4 Fallbewegungen

1.4.1 Freier Fall aus geringer Höhe

Nach diesem kurzen Ausflug in die Mathematik der Differentialgleichungen können wir in die klassische Mechanik von Kräften und ihren Einfluss auf punktförmige Körper zurückkehren.



freier Fall aus geringer Höhe

- Wir stellen uns eine Punktmasse m vor, die aus einer Höhe r fällt. Wenn die Höhe sehr klein gegenüber dem Erdradius ist, $r \ll R_{\text{Erde}}$, dann ist die Schwerkraft $F_G = -mg$ durch die konstante Erdbeschleunigung $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ gegeben. Die Bewegungsgleichung lautet einfach

$$m\ddot{r}(t) = m\dot{v}(t) = -mg . \quad (1.26)$$

Das ist eine gewöhnliche, lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, in der allerdings nur die zweite Ableitung vorkommt. Indem wir die Geschwindigkeit $v = \dot{r}$ einführen, erhalten wir eine Differentialgleichung erster Ordnung,

$$\dot{v}(t) = -g , \quad (1.27)$$

deren Lösung sofort durch Integration folgt,

$$v(t) = \dot{r}(t) = -gt + C_1 . \quad (1.28)$$

Die Integrationskonstante C_1 ist die Anfangsgeschwindigkeit $C_1 = v(t = 0) = v_0$. Die Geschwindigkeit, die während des Falls aufgenommen wird, ist negativ, weil unser Koordinatensystem entgegen der Fallbewegung ausgerichtet ist.

- Eine weitere Integration nach der Zeit liefert

$$r(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0t + C_2, \quad (1.29)$$

wobei die weitere Integrationskonstante C_2 die Anfangshöhe ist, $C_2 = r(t = 0) = r_0$. Da die Bewegungsgleichung von zweiter Ordnung in der Zeit ist, werden zu ihrer vollständigen Lösung zwei Integrationskonstanten benötigt. Diese müssen als Anfangsbedingungen gewählt werden, die in diesem Fall die Bedeutung der Anfangshöhe und der Anfangsgeschwindigkeit haben.

- Wenn der Massenpunkt bei $t = 0$ in der Höhe h losgelassen wird, sind $v_0 = 0$ und $r_0 = h$, und die Lösung lautet

$$v(t) = -gt \quad \text{und} \quad r(t) = h - \frac{g}{2}t^2. \quad (1.30)$$

Die Fallzeit bis $r = 0$ beträgt

$$t_E = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad (1.31)$$

und die Endgeschwindigkeit ist

$$v_E = -gt_E = -g \sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}. \quad (1.32)$$

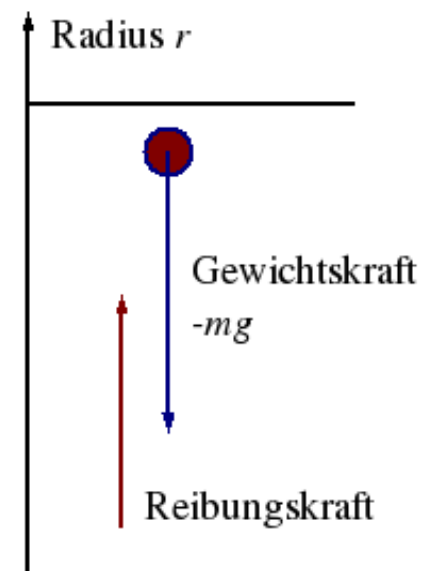
Beispiel: ein Sprung vom Zehnmeterturm dauert $t = 1.4$ s und endet mit einer Geschwindigkeit von $v = -14 \text{ m s}^{-1}$ (etwa -50 km h^{-1}).

1.4.2 Fall aus geringer Höhe mit Stokesscher Reibung

Eine realistischere Beschreibung eines fallenden Körpers beinhaltet mehr als eine Kraft. Zum Beispiel kann man den Luftwiderstand als zweite Kraft berücksichtigen. Wir beginnen erst einmal mit einer Stokesschen Reibungskraft.

- Bei Stokesscher Reibung ist die Reibungskraft proportional zur Geschwindigkeit, $F_R = -K_R v$; sie wirkt der Geschwindigkeit, die wir als positiv gegen die Fallrichtung definiert hatten, entgegen. Die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{r}(t) = m\dot{v}(t) = m\frac{dv}{dt} = -mg - K_R v(t) \quad (1.33)$$



gebremster Fall aus geringer Höhe

lässt sich durch Trennung der Variablen v und t lösen:

$$\begin{aligned} dv &= -g \left(1 + \frac{K_R v}{mg} \right) dt \\ \int \frac{dv}{1 + \frac{K_R v}{mg}} &= \frac{mg}{K_R} \int \frac{dK_R v/(mg)}{1 + K_R v/(mg)} = -g \int dt . \end{aligned} \quad (1.34)$$

Beide unbestimmte Integrale lassen sich integrieren,

$$\frac{mg}{K_R} \ln \left(1 + \frac{K_R v}{mg} \right) = -gt + C_1 , \quad (1.35)$$

wobei die beiden Integrationskonstanten gleich zu einer zusammengefasst wurden. Damit lautet die Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{K_R v(t)}{mg} \right) &= \frac{K_R(C_1 - gt)}{mg} \\ v(t) &= \frac{mg}{K_R} \left(\exp \frac{K_R(C_1 - gt)}{mg} - 1 \right) . \end{aligned} \quad (1.36)$$

- Nach sehr langer Zeit, d.h. für $t \rightarrow \infty$, nähert sich v der Endgeschwindigkeit

$$v_E = -\frac{mg}{K_R} , \quad (1.37)$$

an, so dass die Lösung in der Form

$$v(t) = v_E \left(1 - \exp \frac{-C_1 + gt}{v_E} \right) \quad (1.38)$$

geschrieben werden kann. Wählt man weiter die Anfangsgeschwindigkeit, $v(t=0) = v_0$, dann folgt

$$e^{-C_1/v_E} = 1 - \frac{v_0}{v_E} \quad (1.39)$$

und damit

$$v(t) = (v_0 - v_E) e^{gt/v_E} + v_E = (v_0 + |v_E|) e^{-gt/|v_E|} - |v_E| . \quad (1.40)$$

- Diese Lösung ist gleichzeitig eine Differentialgleichung erster Ordnung für die Höhe $r(t)$,

$$\dot{r}(t) = (v_0 + |v_E|) e^{-gt/|v_E|} - |v_E| . \quad (1.41)$$

Eine weitere Integration führt auf

$$r(t) = -(v_0 + |v_E|) \frac{|v_E|}{g} e^{-gt/|v_E|} - |v_E| t + C_2 . \quad (1.42)$$

Setzt man hier $r(t=0) = r_0$ ein, ergibt sich die Integrationskonstante C_2 zu

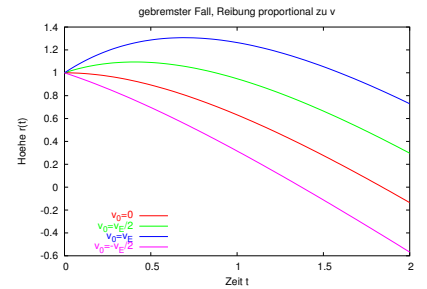
$$C_2 = r_0 + (v_0 + |v_E|) \frac{|v_E|}{g} , \quad (1.43)$$

und damit erhält man die Lösung

$$r(t) = r_0 + (v_0 + |v_E|) \frac{|v_E|}{g} \left(1 - e^{-gt/|v_E|}\right) - |v_E|t. \quad (1.44)$$

- Nach sehr langer Zeit, für $t \rightarrow \infty$, verschwindet der Exponentialterm, und r nimmt linear mit der Zeit ab:

$$r(t) \rightarrow r_0 + (v_0 + |v_E|) \frac{|v_E|}{g} - |v_E|t. \quad (1.45)$$



Gebremster Fall mit Stokescher Reibung aus jeweils derselben Höhe, aber mit vier verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten.

1.4.3 Fall aus geringer Höhe mit Luftwiderstand

Im nächsten Schritt ersetzen wir die Stokesche Reibung durch die korrekte Form für den Luftwiderstand.

- Bei Luftwiderstand ist der Betrag der Reibungskraft zum Quadrat der Geschwindigkeit proportional. Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$m\ddot{r}(t) = m\dot{v}(t) = m \frac{dv}{dt} = -mg - K_v v(t)|v(t)|. \quad (1.46)$$

Wieder ist die Reibungskraft der Bewegung entgegen gerichtet. Da wir von einem fallenden Körper reden, nehmen wir $v < 0$ oder $|v| = -v$ an. Mit der Definition $v_E^2 = mg/K_v$ folgt nach Trennung der Variablen

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -g \left(1 - \frac{K_v}{gm} v(t)^2\right) \\ \int \frac{dv}{1 - \left(\frac{v}{v_E}\right)^2} &= -g \int dt. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Bei dem Integral hilft die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right), \quad (1.48)$$

denn sie erlaubt uns zu schreiben

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{2} \left(\frac{1}{1 + \frac{v}{v_E}} + \frac{1}{1 - \frac{v}{v_E}} \right) &= \frac{v_E}{2} \int d\frac{v}{v_E} \left(\frac{1}{1 + \frac{v}{v_E}} + \frac{1}{1 - \frac{v}{v_E}} \right) \\ &= \frac{v_E}{2} \ln \frac{v_E + v}{v_E - v} = -gt + C_1, \end{aligned} \quad (1.49)$$

Die Integrationskonstante C_1 wird so bestimmt, dass $v = v_0$ bei $t = 0$ ist,

$$C_1 = \frac{v_E}{2} \ln \frac{v_E + v_0}{v_E - v_0} . \quad (1.50)$$

Damit lässt sich die Gleichung für die Geschwindigkeit umformen zu

$$\begin{aligned} \frac{v_E + v}{v_E - v} &= e^{-2gt/v_E} \frac{v_E + v_0}{v_E - v_0} \\ 1 + \frac{v}{v_E} &= e^{-2gt/v_E} \frac{v_E + v_0}{v_E - v_0} \left(1 - \frac{v}{v_E} \right) \\ \frac{v}{v_E} \left(1 + e^{-2gt/v_E} \frac{v_E + v_0}{v_E - v_0} \right) &= e^{-2gt/v_E} \frac{v_E + v_0}{v_E - v_0} - 1 \end{aligned} \quad (1.51)$$

oder

$$v(t) = -v_E \frac{v_E - v_0 - (v_E + v_0) e^{-2gt/v_E}}{v_E - v_0 + (v_E + v_0) e^{-2gt/v_E}} . \quad (1.52)$$

Weil wir nur v_E^2 wirklich definiert haben ist diese Form symmetrisch in $v_E \rightarrow -v_E$. Wenn wir $v_E > 0$ annehmen, dann fallen für $t \rightarrow \infty$ die Exponentialterme weg, und $v \rightarrow -v_E$, d.h. es wird die asymptotische Endgeschwindigkeit im Grenzfall $t \gg v_E/g$ erreicht.

- Eine weitere Integration führt auf die durchfallene Höhe r ,

$$r(t) - r_0 = \int_0^t v(t') dt' . \quad (1.53)$$

Zur Vereinfachung definieren wir

$$x(t) = \frac{2gt}{v_E} \quad a = \frac{v_E + v_0}{v_E - v_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{v(x(t))}{v_E} = -\frac{1 - a e^{-x}}{1 + a e^{-x}} \quad (1.54)$$

und erhalten

$$r(t) - r_0 = -\frac{v_E^2}{2g} \int_0^x dx' \frac{1 - a e^{-x'}}{1 + a e^{-x'}} . \quad (1.55)$$

Die Integration führt auf

$$r(t) - r_0 = -\frac{v_E^2}{2g} \left[x' + 2 \ln(1 + a e^{-x'}) \right]_0^x . \quad (1.56)$$

Mit den Definitionen von a und $x(t)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} r(t) &= r_0 - \frac{v_E^2}{2g} \left[\frac{2gt}{v_E} + 2 \ln \left(1 + \frac{v_E + v_0}{v_E - v_0} e^{-2gt/v_E} \right) + 2 \ln \left(1 + \frac{v_E + v_0}{v_E - v_0} \right) \right] \\ &= r_0 - v_E t - \frac{v_E^2}{g} \ln \frac{v_E - v_0 + (v_E + v_0) e^{-2gt/v_E}}{v_E - v_0 + v_E + v_0} \\ &= r_0 - v_E t - \frac{v_E^2}{g} \ln \left(\frac{1}{2} - \frac{v_0}{2v_E} + \frac{v_E + v_0}{2v_E} e^{-2gt/v_E} \right) \end{aligned} \quad (1.57)$$

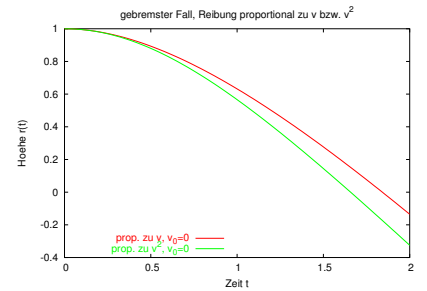
- Bei $v_0 = 0$ erhält man nach genügend langer Zeit, $t \gg v_E/g$, den asymptotischen Verlauf

$$r(t) \rightarrow r_0 + \frac{v_E^2}{g} \ln 2 - v_E t, \quad (1.58)$$

während in demselben Fall für Stokessche Reibung nach (1.45) gilt

$$r(t) \rightarrow r_0 + \frac{v_E^2}{g} - |v_E|t \quad (1.59)$$

Die beiden Endgeschwindigkeiten hängen von der jeweiligen Stärke der Kraft an. Für einen direkten Vergleich identifizieren wir daher die beiden Endgeschwindigkeiten und vergleichen den Einfluss der Reibung. Wegen $\ln 2 < 1$ liegt der Körper mit Stokesscher Reibung in $r(t)$ immer über dem Körper mit Luftwiderstand. Stokessche Reibung ist also effektiver und bremst den freien Fall stärker ab.



Vergleich der durchfallenen Höhen für gebremsten Fall mit Stokesscher Reibung (rot) und Luftwiderstand (grün).

1.4.4 Freier Fall aus großer Höhe

Die beiden diskutierten Beispiele nutzen eine Beschreibung der Gravitationskraft, die nur für Körper nahe der Erdoberfläche gilt. Für weiter entfernte Körper hat die Gravitationskraft eine kompliziertere Form als die bisher angenommene lineare Näherung.

- Bei freiem Fall aus großer Höhe, $h \gtrsim R_{\text{Erde}}$, muss berücksichtigt werden, dass sich die Erdbeschleunigung mit der Höhe ändert. Die Gravitationskraft im Abstand r vom Erdmittelpunkt ist

$$F_G = -\frac{GMm}{r^2} \neq -mg \quad (1.60)$$

Auf der Erdoberfläche sollten beide Formulierungen der Gravitationskraft dasselbe Ergebnis haben, daher gilt $GM/R_{\text{Erde}}^2 = g$. Die allgemeinen Bewegungsgleichung lautet entsprechend

$$m\ddot{r}(t) = -\frac{GMm}{r(t)^2}. \quad (1.61)$$

Diese lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung wandeln wir durch einen *integrierenden Faktor* in eine Differentialgleichung erster Ordnung um. Nach Multiplikation mit $\dot{r}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} m\dot{r}(t) \ddot{r}(t) &= -m \frac{GM\dot{r}(t)}{r(t)^2} \\ \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \dot{r}(t)^2 &= mGM \frac{d}{dt} \frac{1}{r(t)}. \end{aligned} \quad (1.62)$$

- Wenn wir die beiden Zeitableitungen auf eine Seite bringen, sehen wir, dass die Kombination

$$\frac{m}{2}\dot{r}(t)^2 - \frac{mGM}{r(t)} =: E \quad (1.63)$$

konstant ist, d.h. diese sogenannte „Energie“ E darf sich als Funktion der Zeit nicht ändern. Der erste Ausdruck in Klammern heißt „kinetische“, der zweite „potentielle“ Energie. Die Gleichung (1.63) ist daher die erste Verwendung des Energiesatzes bei der Lösung eines mechanischen Problems. Die konstante Energie $E = E_0$ ist durch die Anfangsbedingungen gegeben,

$$E_0 = \frac{m}{2}v_0^2 - \frac{mGM}{r_0} . \quad (1.64)$$

Wenn der Massenpunkt im Unendlichen ruht, $r_0 = \infty$ und $v_0 = 0$, ist $E_0 = 0$ und damit für alle Zeiten

$$\frac{1}{2}mv(t)^2 = \frac{mGM}{r(t)} = \frac{gR_{\text{Erde}}^2 m}{r(t)} . \quad (1.65)$$

Die Endgeschwindigkeit des freien Falls auf die Erdoberfläche ist

$$v_\infty = \sqrt{2gR_{\text{Erde}}} = 11.2 \text{ km s}^{-1} . \quad (1.66)$$

Das ist auch die Fluchtgeschwindigkeit von der Erde, definiert als die Geschwindigkeit, die auf der Erdoberfläche benötigt wird, um das Schwerkraftfeld der Erde zu verlassen.

- Setzt man für v_∞ die Lichtgeschwindigkeit c ein, erhält man den *Schwarzschildradius*

$$r =: R_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (1.67)$$

einer Masse M . Er ist für viele Aspekte der relativistischen Astrophysik als „Radius eines schwarzen Lochs“ sehr wichtig.

Kapitel 2

Mathematische Grundlagen

2.1 Differentialgleichungen II

2.1.1 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Bevor wir weiter Differentialgleichungen und ihre Lösungen diskutieren, können wir uns kurz der mathematischen Frage nach ihrer Lösbarkeit widmen. In der physikalischen Praxis ist diese Frage typischerweise nicht besonders relevant: Wenn wir ein physikalisches System sinnvoll durch eine Differentialgleichung beschreiben, dann hat diese offenbar eine Lösung, denn ansonsten wäre unser Ansatz unsinnig. Ob diese Lösung mathematisch eindeutig ist, ist in der Newtonschen Mechanik nicht relevant, wenn das entsprechende Experiment einen eindeutigen Ausgang hat. Welche Lösung auch immer das Experiment beschreibt ist die korrekte Lösung. Trotzdem schadet es nicht, wenn wir ein Gefühl für Lösungen von Differentialgleichungen bekommen.

- Zunächst ist die Frage sehr wichtig, unter welchen allgemeinen Bedingungen wir damit rechnen können, Differentialgleichungen überhaupt lösen zu können. Dazu erinnern wir uns zunächst, dass wir Newtons Gleichungen zweiter Ordnung in $r(t)$ in manchen Fällen dadurch gelöst haben, dass wir sie als Differentialgleichung erster Ordnung für $v(t) = \dot{r}(t)$ betrachtet haben. In diesem Sinne lassen sich allgemein Differentialgleichungen n -ter Ordnung als Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung darstellen. Wir fassen dazu die Ableitungen $y^{(i-1)}(x)$ der gesuchten Funktion $y(x)$ als eigene Funktionen $y_i(x)$ auf, also $y(x) = y_1(x)$, $y'(x) = y_2(x)$, $y''(x) = y_3(x)$ usw. Damit wird z.B. die Differentialgleichung zweiter Ordnung (1.4) zum Gleichungssystem

$$\begin{aligned}y_1'(x) - y_2(x) &= 0 \\ y_2'(x) + p(x)y_2(x) + q(x)y_1(x) &= 0 .\end{aligned}\tag{2.1}$$

Wir werden uns dementsprechend im Folgenden auf Differentialgleichungen erster Ordnung beschränken können.

- Für Differentialgleichungen erster Ordnung,

$$y'(x) = f(x, y) , \quad (2.2)$$

besagt nun die *Lipschitz-Bedingung*, dass eine eindeutige Lösung in einem Intervall I genau dann existiert, wenn für ein $x_0 \in I$ ein Anfangswert $y_0 = y(x_0)$ vorgegeben ist, sowie für jedes $x \in I$ und jedes betrachtete Paar von Funktionswerten $y, \bar{y}$ die *Sekantensteigung* durch eine endliche Konstante $k \in \mathbb{R}$ beschränkt ist,

$$\left| \frac{\Delta f}{\Delta y} \right| = \left| \frac{f(x, y) - f(x, \bar{y})}{y - \bar{y}} \right| \leq k . \quad (2.3)$$

Anschaulich bedeutet das, dass man durch endliche Schritte entlang des Richtungsfeldes der Differentialgleichung immer nur endlich weit kommt, also keine unendlichen Sprünge machen kann. Offensichtlich erfüllen alle Funktionen mit endlicher Sekantensteigung diese Bedingung. Entsprechend wird eine Differentialgleichung n -ter Ordnung erst durch n Anfangsbedingungen eindeutig festgelegt.

Betrachten wir als einfaches Beispiel die Differentialgleichung (1.6), das exponentielle Zerfallsgesetz $\dot{N} = -\lambda N$. Offenbar sind in (2.2) nun $y \rightarrow N$, $x \rightarrow t$ und $f(x, y) \rightarrow -\lambda N(t)$ zu ersetzen. Die Sekantensteigung, deren Beschränktheit überprüft werden muss, ist

$$\left| \frac{\Delta f}{\Delta y} \right| = \left| \frac{-\lambda N + \lambda \bar{N}}{N - \bar{N}} \right| = \lambda . \quad (2.4)$$

Die Lipschitz-Bedingung ist also erfüllt, wenn $\lambda \in \mathbb{R} < \infty$ ist.

Auf der anderen Seite können wir auch die nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$y'(x) = y^2(x) \quad (2.5)$$

untersuchen. Ihre Sekantensteigung ist durch

$$\left| \frac{\Delta f}{\Delta y} \right| = \left| \frac{y^2 - \bar{y}^2}{y - \bar{y}} \right| = y + \bar{y} \quad (2.6)$$

gegeben und daher für den Funktionen über den gesamten Raum der reellen Zahlen nicht beschränkt. Wenn $y(x)$ stetig differenzierbar und damit glatt ist, dann kann man durch eine Einschränkung des Parameterbereiches in x und damit in y die Lipschitz-Bedingung und damit eine eindeutige Lösung erzwingen.

- Für physikalische Vorgänge, die fast immer durch Differentialgleichungen zweiter Ordnung in der Zeit beschrieben werden,

bedeutet das, dass eine eindeutige Lösung der Bewegungsgleichung in der Nähe einer Zeit t_0 immer angegeben werden kann, wenn die Bewegung im Endlichen und mit endlicher Geschwindigkeit erfolgt und die auftretenden Kräfte stetig sind und sich nicht beliebig schnell ändern. Die Lösung wird durch zwei Anfangsbedingungen an den Ort und die Geschwindigkeit eindeutig bestimmt.

2.1.2 Lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung

Nachdem wir eine Vorstellung davon haben, welche Art von Differentialgleichungen physikalisch relevant sind, widmen wir uns kurz den Lösungen solcher Gleichungen. Insbesondere kommen wir noch einmal auf inhomogene Gleichungen zurück.

- Betrachten wir als Beispiel die lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y''(x) - y(x) = 1 . \quad (2.7)$$

Die dazugehörige homogene Gleichung kann zunächst durch den integrierenden Faktor $2y'$ und Berücksichtigung der Kettenregel einmal integriert werden,

$$\begin{aligned} y''(x) &= y(x) \\ 2y'y'' &= 2yy' \quad \Leftrightarrow \quad (y'^2)' = (y^2)' \quad \Leftrightarrow \quad y' = \pm y . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Da wir nur an einer Lösung der homogenen Gleichung interessiert sind, haben wir die Integrationskonstante im letzten Schritt vernachlässigt. Es folgt also zunächst, dass $y_1(x) = e^x$ eine Lösung der homogenen Gleichung ist. Wir sehen auch sofort, dass $y_2(x) = e^{-x}$ eine weitere Lösung sein muss.

Wenn man eine Lösung $y_1(x)$ einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung kennt, kann man sich eine zweite durch *d'Alembert-Reduktion* verschaffen. Man setzt den Ansatz $y_2(x) = y_1(x)f(x)$ mit einer unbekannten Funktion $f(x)$ in die Gleichung ein und berücksichtigt, dass $y_1(x)$ schon eine Lösung ist. Die bekannte zweiten Lösung der homogenen Version von (2.7) können wir also aus $y_2(x) = e^x f(x)$ herleiten,

$$\begin{aligned} 0 &= y_1'' f + 2y_1' f' + f'' - y_1 f \\ &= (y_1'' - y_1) f + 2y_1' f' + y_1 f'' = 2y_1' f' + y_1 f'' . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Es folgt

$$\frac{f''}{f'} = -2 \frac{y_1'}{y_1} = -2 \quad \Leftrightarrow \quad (\ln f')' = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \ln f' = -2x . \quad (2.10)$$

Man erhält direkt durch Integration, dass wegen $f'(x) = e^{-2x}$ und daher $f(x) = -e^{-2x}/2$ die Funktion $y_2 = y_1 f = -e^{-x}/2$ eine weitere Lösung sein muss. Im Fall einer linearen homogenen Differentialgleichung ist das gleichbedeutend mit $y_2(x) = e^{-x}$.

- Anhand der Beispiele zum Fallgesetz haben wir gesehen, dass Differentialgleichungen in der Newtonschen Mechanik oft, aber nicht immer linear sind. Zur Erinnerung, linear heißen Differentialgleichungen, deren Koeffizientenfunktionen der Form

$$p_n(x)y^{(n)}(x) + \dots + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = r(x) \quad (2.11)$$

nicht von y abhängen. Die linke Seite wird oft kurz als *linearer Differentialoperator* $L[y]$ bezeichnet, also $L[y] = r(x)$.

Allgemein gilt, dass falls $y_1(x)$ und $y_2(x)$ zwei Lösungen der linearen Differentialgleichung (2.11) sind, so ist auch eine beliebige Linearkombination der beiden eine Lösung, also

$$L[a_1 y_1 + a_2 y_2] = (a_1 + a_2)r(x) \quad \text{mit} \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

Eingesetzt in (2.11) sieht man sofort, dass dies richtig ist.

Für die allgemeine Lösung einer *homogenen* Differentialgleichung n -ter Ordnung braucht man ein so genanntes *Fundamentalsystem* aus n linear unabhängigen Funktionen $y_i(x)$, $1 \leq i \leq n$. Linear unabhängig ist eine Menge von Funktionen $y_i(x)$ genau dann, wenn jede beliebige Linearkombination aus ihnen nur dann verschwinden kann, wenn alle ihre Koeffizienten verschwinden,

$$\sum_{i=1}^n a_i y_i(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_i = 0 \quad \text{für alle} \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.13)$$

Es gibt ein einfaches Verfahren, um festzustellen, ob eine Menge von n Lösungen $y_i(x)$ einer linearen homogenen Differentialgleichung linear abhängig ist. Spezialisiert auf $n = 2$ besteht es darin zu prüfen, ob der Ausdruck

$$y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \quad (2.14)$$

für alle betrachteten $x \in I$ identisch verschwindet. In diesem Fall sind die $y_1(x)$ und $y_2(x)$ linear abhängig.

Eingesetzt in unser Beispiel (2.14) folgt

$$e^x(-e^{-x}) - e^{-x}e^x = -2 \neq 0, \quad (2.15)$$

was belegt, dass die beiden Funktionen $y_1 = e^x$ und $y_2 = e^{-x}$ linear unabhängig sind. Die vollständige Lösung der homogenen Gleichung lautet also

$$y(x) = a_1 e^x + a_2 e^{-x}. \quad (2.16)$$

- Die allgemeine Lösung einer *inhomogenen* linearen Differentialgleichung erhält man, indem man zur allgemeinen Lösung der dazugehörigen *homogenen* Gleichung eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung addiert. Lineare inhomogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung haben Lösungen der allgemeinen Form

$$y(x) = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + y_{\text{in}}(x) , \quad (2.17)$$

wobei $y_1(x)$ und $y_2(x)$ ein Fundamentalsystem bilden und $y_{\text{in}}(x)$ die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist. Die beiden reellen Zahlen a_1, a_2 werden dann durch die beiden Anfangsbedingungen bestimmt, die zur Eindeutigkeit der Lösung notwendig sind.

Während man sich eine Lösung der inhomogenen Gleichung (2.7) durch Variation der Konstanten verschaffen könnte, ist es einfacher zu bemerken, dass $y_{\text{in}} = -1$ eine solche Lösung ist. Damit erhält man die vollständige Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = a_1 e^x + a_2 e^{-x} - 1 . \quad (2.18)$$

Als Anfangsbedingungen wählen wir $y(x = 0) = 0$ und $y'(x = 0) = 0$. Wegen

$$y'(x) = a_1 e^x - a_2 e^{-x} \quad (2.19)$$

erfordert $y'(0) = 0$ die Bedingung $a_1 = a_2$. Demnach ist $y(x) = a_1 e^x + a_1 e^{-x} - 1$, so dass die Bedingung $y(0) = 0$ bedeutet $2a_1 = 1$ oder $a_1 = 1/2$. Also ist die vollständige Lösung der inhomogenen Gleichung mit Anfangsbedingungen

$$y(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1 . \quad (2.20)$$

2.2 Taylor-Reihen

Die Bedeutung von Taylor-Reihen in der Theoretischen Physik lässt sich kaum überschätzen. Der Grund ist, dass sie uns erlauben werden, jede funktionale Abhängigkeit in führende und weniger relevante Beiträge zu unterteilen. Man kann sich also in der mathematischen Beschreibung eines Problems zunächst den numerisch wichtigsten Effekten widmen, und dann Abweichungen vom führenden Verhalten Stück für Stück abarbeiten. Dieser Zugang beschreibt die sogenannte Störungstheorie.

2.2.1 Der Taylorsche Satz

- Wir beginnen zunächst mit einer allgemeinen mathematischen Betrachtung, die auf alle Funktionen anwendbar ist, die

„genügend glatt“, also genügend oft stetig differenzierbar sind. Sei zunächst ein Intervall der reellen Zahlen $I \in \mathbb{R}$ vorgegeben, und darauf eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, die mindestens $n + 1$ -mal stetig differenzierbar sei. Seien ferner $a, x \in I$ zwei beliebige reelle Zahlen aus dem Intervall. Dann besagt der *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt, \quad (2.21)$$

wobei $f'(x)$ die Ableitung der Funktion $f(x)$ nach x bezeichnet. Wir setzen diesen Satz hier als bekannt voraus.

- Wir behaupten, dass sich $f(x)$ in der folgenden Weise darstellen lasse:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a) \\ &= f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_{n+1}(x) \end{aligned} \quad (2.22)$$

wobei $R_{n+1}(x)$ das *Restglied*

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad (2.23)$$

ist. Dies ist die Aussage des *Taylorischen Satzes*, und (2.22) ist die *Taylorische Formel*.

- Der Taylorsche Satz lässt sich am besten durch vollständige Induktion beweisen. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt bereits, dass die Aussage (2.22) für $n = 0$ wahr ist, denn es gilt offenbar

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + R_1(x) \\ &= f(a) + \frac{1}{1!} \int_a^x (x-t)^0 f^{(1)}(t) dt = f(a) + \int_a^x f'(t) dt \end{aligned} \quad (2.24)$$

nach (2.21). Damit ist die Induktion bei $n = 0$ verankert.

Im zweiten Schritt nehmen wir an, die Taylorische Formel gelte für beliebiges $n - 1$ und zeigen, dass sie dann auch für n gilt. Wir setzen also voraus, dass

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i + R_n(x) \quad (2.25)$$

gilt und stellen das Restglied $R_n(x)$ durch partielle Integration anders dar. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 R_n(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t) dt \\
 &= - \int_a^x \frac{d}{dt} \left[\frac{(x-t)^n}{n!} \right] f^{(n)}(t) dt \\
 &= - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) \Big|_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\
 &= \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_{n+1}(x) .
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Setzt man dieses Ergebnis in (2.25) ein, folgt damit

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_{n+1}(x) \\
 &= f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i + R_{n+1}(x) .
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

und die Gültigkeit des Taylorschen Satzes auch für $n+1$. Damit ist die Induktion vollständig und der Taylorsche Satz bewiesen.

- Offenbar ist die Taylor-Entwicklung einer Funktion bis zur ersten Ordnung genau dann exakt, wenn $f(x)$ eine lineare Funktion ist, d.h. wenn sie eine Gerade darstellt. Dann ist $f(x) = \alpha + \beta x$ mit zwei beliebigen Konstanten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, und

$$f(x) = f(a) + \beta(x-a) = \alpha + \beta a + \beta x - \beta a = \alpha + \beta x . \tag{2.28}$$

Deshalb nennt man eine Taylor-Entwicklung bis zur ersten Ordnung auch *Linearisierung* der Funktion in der Umgebung von a . Wie weit diese Umgebung sein kann, hängt natürlich davon ab, bis wohin der Verlauf von $f(x)$ in der Nähe von a durch eine Gerade angenähert werden kann.

2.2.2 Einfache Beispiele

- Meistens wird der Taylorsche Satz dazu verwendet, das Verhalten von Funktionen in der Nähe bestimmter Punkte zu nähern. Man wählt dann einen Punkt a und betrachtet Punkte x in einer kleinen Umgebung von a , für die gewöhnlich $|x-a| \ll 1$ gilt. Auch komplizierte Funktionen lassen sich dann auf einfache Weise darstellen. Betrachten wir einige Beispiele.

- Sei

$$f(x) = \frac{1}{(1 \pm x)^b} \tag{2.29}$$

die Funktion, die in der Nähe von $x = 0$ betrachtet werden soll. Für $x \ll 1$ können wir den Taylorschen Satz bis zur ersten Ordnung verwenden und erhalten

$$f(x) \approx f(0) \mp \frac{b}{(1 \pm 0)^{(b+1)}} x = 1 \mp bx. \quad (2.30)$$

Insbesondere ist also zum Beispiel

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} \approx 1 \mp \frac{x}{2}. \quad (2.31)$$

- Ein weiteres häufig verwendetes Beispiel ist

$$f(x) = \ln(1 \pm x) \quad (2.32)$$

für $x \ll 1$. Dann ist $a = 0$ und damit

$$\ln(1 \pm x) \approx \ln(1 \pm 0) \pm \frac{x - 0}{1 \pm 0} = \pm x. \quad (2.33)$$

- Manchmal reicht eine Linearisierung nicht, um zu physikalisch brauchbaren Aussagen zu kommen. Während die Linearisierung der Sinusfunktion in der Nähe von $x = 0$

$$\sin x \approx \sin 0 + x \cos 0 = x \quad (2.34)$$

ergibt, erhält man durch Linearisierung des Cosinus

$$\cos x = \cos 0 - x \sin 0 = 1, \quad (2.35)$$

also eine Konstante, die den Verlauf der Cosinusfunktion in der Nähe von $x = 0$ nicht erkennen lässt. In diesem Fall muss man bis zur zweiten Ordnung Taylor-entwickeln:

$$\begin{aligned} \cos x &\approx \cos 0 - x \sin 0 - \frac{\cos 0}{2} x^2 = 1 - \frac{x^2}{2} \\ \sin x &\approx \sin 0 + x \cos 0 - \frac{\sin 0}{2} x^2 = x \end{aligned} \quad (2.36)$$

Wenn man beide Funktionen konsistent bis zur zweiten Ordnung entwickelt, dann kann man überprüfen dass

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^3)\right)^2 + \left(x + O(x^2)\right)^2 \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2 + x^2 + O(x^3) \\ &= 1 - x^2 + x^2 + O(x^3) = 1 + O(x^3), \end{aligned} \quad (2.37)$$

wobei der Term $O(x^3)$ mathematisch bedeutet, dass in unserer Taylor-Entwicklung Terme dritter und höherer Potenz vernachlässigt werden.

2.3 Vektoren I

Vektoren und ihre Eigenschaften sind in dieser Vorlesung schon zweimal vorgekommen, ohne dass wir sie mathematisch betrachtet haben. Daher ist es an der Zeit, mathematisch ein paar Grundlagen zu Vektoren und ihrer Verknüpfung zu sagen.

2.3.1 Vektorräume

- Zum Beispiel beim freien Fall haben wir uns auf die Analyse von Bewegungen in einer Dimension beschränkt. Wir kommen nun zur Darstellung von Bewegungen in drei Dimensionen. Da Positionen im dreidimensionalen Raum durch Vektoren $\vec{x}$ angegeben werden, besteht die Lösung mechanischer Probleme meistens darin, eine Bahnkurve anzugeben, d.h. eine vektorwertige Funktion $\vec{x}(t)$ der Zeit t , die zeigt, an welchem Ort sich der Massenpunkt zur Zeit t befindet.
- Natürlich ist Ihnen zumindest intuitiv bekannt, was ein Vektor im dreidimensionalen Raum ist. Er hat einen Betrag und eine Richtung und wird z.B. durch drei Komponenten angegeben, bei denen es sich um reelle Zahlen handelt. In der Mathematik und in vielen Bereichen der theoretischen Physik ist ein Vektor aber ein sehr viel allgemeiner definiertes Objekt. Da Vektoren in verschiedensten Bedeutungen und Darstellungen in der Physik vorkommen, lohnt es sich hier, diese allgemeine Definition zu Grunde zu legen.
- In der Mathematik sind Vektoren Objekte, die man addieren, strecken oder stauchen kann, ohne dass sie ihre Vektoreigenschaft verlieren. Präzise definiert wird dies durch die Eigenschaften eines Vektorraums. Ein *Vektorraum* V ist eine Menge von Objekten, für die eine *Addition* definiert ist, die zwei Vektoren v_1, v_2 zu einem neuen Vektor verknüpft,

$$+ : V \times V \rightarrow V, \quad (v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2, \quad (2.38)$$

und für die eine *Multiplikation* mit den Elementen eines *Körpers* K definiert ist, die wiederum einen Vektor ergibt,

$$\cdot : K \times V \rightarrow V, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v = \lambda v. \quad (2.39)$$

Wenn man diese beiden Verknüpfungen kombiniert, dann erfüllen die Addition und die Multiplikation in einem Vektorraum die linearen Rechenregeln

$$\begin{aligned} \lambda (v_1 + v_2) &= \lambda v_1 + \lambda v_2 \\ (\lambda_1 + \lambda_2) v &= \lambda_1 v + \lambda_2 v. \end{aligned} \quad (2.40)$$

- In diesen beiden Eigenschaften liegt die große Bedeutung von Vektorräumen in der Physik begründet. Offenbar kann alles durch Vektoren dargestellt werden, was überlagert werden kann, um dabei einen neuen Vektor zu ergeben. Aus (2.12) wissen wir, dass Lösungen linearer Differentialgleichungen durch Überlagerung konstruiert werden können. Ebenso werden Zustände quantenmechanischer Systeme durch Vektoren beschrieben, weil man experimentell fand, dass zwei Zustände ψ_1 und ψ_2 zu einem neuen Zustand ψ überlagert werden können,

$$\psi = \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 . \quad (2.41)$$

Der Quantenmechanik liegt demnach auch die mathematische Struktur eines Vektorraums zu Grunde. Alles, was nun über Vektorräume gesagt wird, gilt also gleichermaßen für so verschiedene Dinge wie Orte im Raum oder quantenmechanische Zustände.

- Oben wurde der Begriff eines Körpers eingeführt, ohne ihn genau zu definieren. Dazu müssen wir zunächst daran erinnern, was eine Gruppe ist. *Gruppen* G sind Mengen mathematischer Objekte, zwischen denen eine Verknüpfung $\circ$ definiert ist, die *assoziativ* ist,

$$a_1 \circ (a_2 \circ a_3) = (a_1 \circ a_2) \circ a_3 , \quad (2.42)$$

für die es ein *neutrales Element* e gibt,

$$a \circ e = a , \quad (2.43)$$

und die zu jedem Gruppenelement a ein *inverses Element* a^{-1} enthält,

$$a \circ a^{-1} = e . \quad (2.44)$$

Kommutativ oder *abelsch* heißt eine Gruppe dann, wenn

$$a_1 \circ a_2 = a_2 \circ a_1 \quad (2.45)$$

ist. Ein einfaches Beispiel sind die ganzen Zahlen bezüglich der Addition als Verknüpfung. Die Summe zweier ganzer Zahlen ist wieder eine, das neutrale Element ist die Null und das inverse Element zu einer ganzen Zahl z ist $-z$.

Ein *Körper* K ist nun eine Menge, die bezüglich einer Addition $+$ eine abelsche Gruppe ist und die außerdem bezüglich einer Multiplikation $\cdot$ eine abelsche Gruppe ist, wenn man das neutrale Element der Addition (in der Regel die Null) ausschließt. Außerdem gilt das Distributivgesetz in der Form

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c , \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c . \quad (2.46)$$

Im Unterschied zu den Vektoren heißen die Elemente des Körpers, auf dem ein Vektorraum definiert wird, *Skalare*. In der Regel unterliegt physikalischen Vektorräumen entweder der Körper der reellen Zahlen oder der der komplexen Zahlen.

2.3.2 Lineare Abhängigkeit, Basis und Dimension

Nachdem wir gesehen haben, dass wir formal Lösungen linearer Differentialgleichungen als Vektoren betrachten können, stellt sich die schon bekannte Frage, wie wir wissen dass wir alle Lösungen oder alle Elemente eines Vektorraumes identifiziert haben. In (2.13) haben wir ad hoc einen solchen Test angegeben, für den wir jetzt die notwendigen mathematischen Definitionen nachreichen.

- Mengen von Vektoren v_i mit $1 \leq i \leq n$ aus einem Vektorraum V können zu *Linearkombinationen* v verknüpft werden,

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n . \quad (2.47)$$

Die Menge aller Vektoren v , die auf diese Weise durch die Menge der v_i dargestellt werden können, bildet einen Untervektorraum U von V , $U \subseteq V$. Er wird auch als der von den v_i *aufgespannte* Untervektorraum bezeichnet,

$$U = \text{span}(v_i) . \quad (2.48)$$

- Eine Menge von Vektoren v_i heißt *linear unabhängig*, wenn die Gleichung

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \quad (2.49)$$

nur dann erfüllt werden kann, wenn alle Skalare verschwinden, $\lambda_i = 0$. Insbesondere bedeutet das, dass eine Menge von Vektoren v_i genau dann linear unabhängig ist, wenn sich jeder Vektor $v \in \text{span}(v_i)$ eindeutig aus den Elementen v_i linear kombinieren lässt.

- Eine Menge von Vektoren v_i heißt *Erzeugendensystem* eines Vektorraums V , wenn $V = \text{span}(v_i)$ ist. Ein Erzeugendensystem ist eine *Basis*, wenn seine Elemente linear unabhängig und daher ihre Anzahl minimal sind. Die Anzahl der Elemente einer Basis ist dann die *Dimension* N des Vektorraums. Da sich jeder Vektor v aus V als Linearkombination der Basisvektoren e_i schreiben lässt,

$$v = \sum_{i=1}^N \lambda_i e_i , \quad (2.50)$$

kann jeder Vektor durch das N -Tupel der Zahlen λ_i eindeutig angegeben werden, sobald die Basis bekannt ist.

2.3.3 Beispiele

- Der dreidimensionale Raum $\mathbb{R}^3$ oder die Menge $\mathbb{R}^3$ der 3-Tupel (x_1, x_2, x_3) bekommt die Struktur eines Vektorraums über dem

Körper der reellen Zahlen, indem man eine Addition von Vektoren und deren Multiplikation mit Skalaren komponentenweise definiert,

$$v+w = (v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3) = (v_1+w_1, v_2+w_2, v_3+w_3) \quad (2.51)$$

bzw.

$$\lambda(v_1, v_2, v_3) = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3) . \quad (2.52)$$

Eine geeignete Basis wird durch die Einheitsvektoren $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ und $e_3 = (0, 0, 1)$ dargestellt. Irgend zwei der Basisvektoren spannen einen Unterraum von $\mathbb{R}^3$ auf, so z.B. lässt sich die x_1 - x_2 -Ebene durch die e_1 und e_2 aufspannen.

- Ein vielleicht weniger nahe liegendes Beispiel sind die Polynome vom Grad $\leq N$ auf dem Intervall $[-1, 1]$,

$$p(x) = \sum_{j=0}^N a_j x^j, \quad a_j \in \mathbb{R} . \quad (2.53)$$

Sie bilden einen Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen, da durch die gewöhnliche Addition zweier solcher Polynome wieder eines entsteht, und weil auch die Multiplikation mit reellen Zahlen offensichtlich definiert ist.

Offenbar bilden verschiedene Potenzen x^j mit $0 \leq j \leq N$ Systeme linear unabhängiger Vektoren aus diesem Vektorraum, da die Gleichung

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_n x^n = 0 \quad (2.54)$$

nur dann für alle $x \in [-1, 1]$ erfüllt werden kann, wenn alle λ_j verschwinden. Zudem spannen die x^j mit $0 \leq j \leq N$ den gesamten Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq N$ auf, weil jedes Polynom vom Grad $\leq N$ durch Linearkombination der x^j dargestellt werden kann. Also bilden die x^j eine Basis dieses abstrakten Vektorraums.

Kapitel 3

Impuls, Drehimpuls und Energie

3.1 Vektoren II

In der linearen Algebra sieht man, dass die Addition und die Streckung von Vektoren nicht die einzigen hilfreichen Konzepte sind. Schon für Vektoren im dreidimensionalen Raum wissen wir, dass zum Beispiel der Öffnungswinkel durch eine weitere Verknüpfung algebraisch berechnet werden kann.

3.1.1 Das Skalarprodukt

- Ein *Skalarprodukt* oder *inneres Produkt* ist eine Abbildung, die zwei Vektoren aus einem Vektorraum eine Zahl aus dem zugrunde liegenden Körper K zuordnet,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K, \quad (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle, \quad (3.1)$$

und zwar so, dass sie in beiden ihrer Argumente linear ist,

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle &= \lambda_1 \langle v_1, w \rangle + \lambda_2 \langle v_2, w \rangle, \\ \langle v, \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 \rangle &= \mu_1 \langle v, w_1 \rangle + \mu_2 \langle v, w_2 \rangle. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Eine solche Abbildung heißt *bilinear*. Skalarprodukte sind positiv semidefinit, d.h. das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst ist nicht negativ, $\langle v, v \rangle \geq 0$ für alle $v \in V$. Mithilfe des Skalarprodukts kann einem Vektor $v \in V$ sein Betrag $|v|$ zugeordnet werden,

$$|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}. \quad (3.3)$$

Ist $|v| = 1$, heißt v *Einheitsvektor*.

- Zwei Vektoren $v, w \in V$ heißen *orthogonal*, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet, $\langle v, w \rangle = 0$. Besonders bequem sind Basen, deren Elemente e_i paarweise orthogonale Einheitsvektoren sind,

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} . \quad (3.4)$$

Hat man eine solche *Orthonormalbasis*, nimmt das Skalarprodukt eine sehr einfache Form an,

$$\langle a, b \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^N \beta_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \beta_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i \beta_i . \quad (3.5)$$

- Im dreidimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ gibt das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren a, b gerade den Cosinus des Winkels ϕ an, den die beiden Vektoren einschließen,

$$\langle a, b \rangle = |a| |b| \cos \phi . \quad (3.6)$$

Aus der Erweiterung dieser Beziehung auf beliebige Vektorräume leitet sich die Definition orthogonaler Vektoren ab, die oben eingeführt wurde.

- In unserem zweiten Beispiel des Vektorraums der Polynome vom Grad N auf dem Intervall $[-1, 1]$ kann ein Skalarprodukt zwischen zwei Polynomen $p(x)$ und $q(x)$ durch die Definition

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x) q(x) dx \quad (3.7)$$

eingeführt werden. Demnach wären z.B. die beiden Polynome $p(x) = x$ und $q(x) = x^2$ zueinander orthogonal, denn

$$\langle x, x^2 \rangle = \int_{-1}^1 x^3 dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_{-1}^1 = 0 . \quad (3.8)$$

Entsprechend lässt sich auf diesem Vektorraum eine orthonormale Basis einführen. Die Darstellung von Polynomen oder allgemein von genügend gutwilligen Funktionen durch Orthonormalbasen hat eine immense Bedeutung in der Physik. Ein Beispiel dafür ist die Fouriertransformation.

3.1.2 Einsteinsche Summenkonvention, Kronecker- und Levi-Civita-Symbole

- Oft ist es lästig und unnötig, Summen wie etwa in (3.5) auszu-schreiben. Zur Abkürzung verabreden wir die Einsteinsche Summenkonvention, nach der über doppelt auftretende Indizes summiert wird,

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \beta_i =: \alpha_i \beta_i . \quad (3.9)$$

In einer Gleichung kann also derselbe Index einmal auf jeder Seite der Gleichung erscheinen, dann ist es eine Gleichung für die einzelnen Komponenten eines Vektors, oder zweimal auf derselben Seite, dann nutzen wir die Einsteinsche Summenkonvention. Ein Index ohne Summenzeichen kann in einer Gleichung niemals mehr als zweimal erscheinen!

- Ebenso nützlich ist das Kronecker-Symbol δ_{ij} , das durch

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (3.10)$$

definiert wird. Die Vereinfachung, die aufgrund der Summenkonvention und mithilfe des Kronecker-Symbols erreicht wird, ist offensichtlich, wenn wir (3.4) und (3.5) entsprechend schreiben. (3.4) wird zu

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} , \quad (3.11)$$

und aus (3.5) wird

$$\langle \alpha_i e_i, \beta_j e_j \rangle = \alpha_i \beta_j \delta_{ij} = \alpha_i \beta_i . \quad (3.12)$$

- Weiterhin führen wir für dreidimensionale Vektorräume das vollkommen antisymmetrische Levi-Civita-Symbol ϵ_{ijk} ein, das wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} &= \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 \\ \epsilon_{132} &= \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1 \\ \epsilon_{ijk} &= 0 \quad \text{sonst} , \end{aligned} \quad (3.13)$$

d.h. $\epsilon_{ijk} = 1$ für alle geraden Permutationen von $\{1, 2, 3\}$, $\epsilon_{ijk} = -1$ für alle ungeraden Permutationen davon, und $\epsilon_{ijk} = 0$, wenn mindestens zwei der Indizes i, j, k gleich sind.

Zwischen dem Levi-Civita- und dem Kronecker-Symbol besteht der sehr nützliche Zusammenhang

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} , \quad (3.14)$$

mit dem sich viele Rechnungen erheblich abkürzen lassen.

3.1.3 Das Vektorprodukt

- Das *Vektorprodukt* oder äußere Produkt ordnet zwei Vektoren v, w aus V einen Vektor aus V zu,

$$\times : V \times V \rightarrow V , \quad (v, w) \mapsto v \times w , \quad (3.15)$$

und zwar wieder auf bilineare Weise,

$$(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \times w = \lambda_1 v_1 \times w + \lambda_2 v_2 \times w \quad (3.16)$$

und ebenso für das zweite Argument.

Wegen der Bilinearität reicht es zur Festlegung des Vektorprodukts wieder, die Vektorprodukte der Basisvektoren festzulegen. Mithilfe des Levi-Civita-Symbols definieren wir in drei Dimensionen

$$e_i \times e_j = \epsilon_{ijk} e_k . \quad (3.17)$$

Demzufolge ist das Vektorprodukt *antisymmetrisch*, z.B. $e_1 \times e_2 = e_3$ und $e_2 \times e_1 = -e_3$, und das Vektorprodukt zweier gleicher Basisvektoren verschwindet, $e_i \times e_i = 0$.

Mit dieser Festlegung lautet das Vektorprodukt zweier dreidimensionaler Vektoren a, b

$$a \times b = (\alpha_i e_i) \times (\beta_j e_j) = \alpha_i \beta_j (e_i \times e_j) = \epsilon_{ijk} \alpha_i \beta_j e_k . \quad (3.18)$$

- Aufgrund seiner Definition ist das Vektorprodukt zweier Vektoren a, b orthogonal zu beiden Vektoren,

$$\langle a, a \times b \rangle = \langle \alpha_i e_i, \epsilon_{jkl} \alpha_j \beta_k e_l \rangle = \alpha_i \alpha_j \beta_k \epsilon_{jkl} \delta_{il} = \epsilon_{ijk} \alpha_i \alpha_j \beta_k . \quad (3.19)$$

Da das Produkt $\alpha_i \alpha_j \beta_k$ symmetrisch gegen Vertauschung von i und j ist, ϵ_{ijk} aber antisymmetrisch, verschwindet das Ergebnis, ebenso wie für das Skalarprodukt $\langle b, a \times b \rangle$.

- Ebenso verschwindet das Vektorprodukt zwischen parallelen oder antiparallelen Vektoren a, b , denn dann ist $b = \lambda a$ mit $\lambda \in K$, und

$$a \times b = \lambda \alpha_i \alpha_j \epsilon_{ijk} e_k = 0 . \quad (3.20)$$

Entsprechend kann man dem Vektorprodukt zweier Vektoren den Sinus ihres Zwischenwinkels ϕ zuordnen,

$$|a \times b| = |a| |b| \sin \phi . \quad (3.21)$$

3.1.4 Koordinaten und Koordinatentransformationen

- Die abstrakte Definition von Vektoren und Vektorräumen im dritten Kapitel hat unter Anderem den Vorteil, dass völlig klar wird, dass Vektoren unabhängig von bestimmten Koordinatensystemen existieren. Zwar werden Vektoren im dreidimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ in der Regel durch reelle Zahlentripel (x_1, x_2, x_3) angegeben, aber diese Zahlentripel dürfen keinesfalls mit den Vektoren selbst verwechselt werden. Zum Beispiel bei den Fallgesetzen haben wir gelernt, dass die Physik nicht von der Wahl des Koordinatensystems abhängen darf, auch wenn wir für eine konkrete Rechnung zum Beispiel die z -Achse und den Nullpunkt auf dieser Achse sowie in der Zeit festlegen müssen.

- Die Wahl eines Koordinatensystems besteht darin, dass man eine geeignete Basis e_i für einen Vektorraum V festlegt. Dadurch werden Vektoren $v \in V$ eindeutig durch N -Tupel v_i von Zahlen aus dem Körper K darstellbar, $v = v_i e_i$. Die Eindeutigkeit folgt daraus, dass die Basis ein linear unabhängiges Erzeugendensystem des gesamten Vektorraums V ist. Hat man eine Orthonormalbasis gewählt, sind die Koordinaten v_i durch die Skalarprodukte $\langle v, e_i \rangle$ gegeben,

$$\langle v, e_i \rangle = \langle v_j e_j, e_i \rangle = v_j \langle e_j, e_i \rangle = v_j \delta_{ij} = v_i . \quad (3.22)$$

- Ebenso gut können wir durch eine andere Basis e'_i ein anderes Koordinatensystem einführen, in dem derselbe Vektor v nun durch andere Koordinaten v'_i dargestellt wird,

$$v = v_i e_i = v'_j e'_j . \quad (3.23)$$

Die offensichtliche Frage ist, wie sich die neuen Koordinaten v'_i durch die alten v_j ausdrücken lassen. Dazu genügt es zu wissen, wie die neuen Basisvektoren e'_i durch die alten ausgedrückt werden können, d.h. die Beziehungen

$$e'_i = a_{ij} e_j \quad (3.24)$$

müssen durch die Angabe der $N \times N$ Zahlen a_{ij} vollständig festgelegt sein. Um die Zahlen a_{ij} zu berechnen können wir (3.24) zum Beispiel skalar mit e_k multiplizieren,

$$\langle e'_i, e_k \rangle = a_{ij} \langle e_j, e_k \rangle = a_{ij} \delta_{jk} = a_{ik} . \quad (3.25)$$

Die Zahlen a_{ij} sind also die Skalarprodukte der neuen mit den alten Basisvektoren.

Entsprechend können wir auch die neuen Koordinaten v'_i erhalten, indem wir (3.23) skalar mit e'_k multiplizieren,

$$\langle v, e'_k \rangle = v'_k = v_i \langle e_i, e'_k \rangle = a_{ki} v_i . \quad (3.26)$$

Umgekehrt können wir die Koordinaten v_i im alten Bezugssystem durch die neuen v'_j ausdrücken, indem wir (3.23) skalar mit e_k multiplizieren,

$$\langle v, e_k \rangle = v_k = v'_j \langle e'_j, e_k \rangle = v'_j a_{jk} . \quad (3.27)$$

Beachten Sie den Unterschied zwischen (3.26) und (3.27): In (3.26) wird über den zweiten Index von a_{ij} summiert, in (3.27) über den ersten.

3.1.5 Inertialsysteme

- Wenn Koordinatensysteme aus mathematischer Sicht beliebig gewählt werden können, stellt sich die Frage, ob bestimmte Koordinatensysteme gegenüber anderen physikalisch ausgezeichnet sind. Offenbar macht es in der Betrachtung der wirkenden Kräfte einen Unterschied, ob die Bahnkurve eines Körpers in einem Bezugssystem betrachtet wird, das sich mit ihm bewegt, oder in einem Bezugssystem, das sich relativ dazu dreht. Dies führt uns auf den Begriff der *Inertialsysteme*. Ein Inertialsystem ist ein solches Bezugssystem, in dem das erste Newtonsche Axiom gilt, in dem sich also ein kräftefreier Körper geradlinig-gleichförmig bewegt.
- Eine sich drehende Scheibe ist ein Beispiel für ein Bezugssystem, in dem das erste Newtonsche Axiom nicht gilt, denn auf ihr kann ein Körper nur dann in Ruhe bleiben, wenn er durch eine Kraft festgehalten wird.
- Der Begriff des Inertialsystems verdeutlicht, dass die Definitionen der Kraft und des Inertialsystems in einer Weise zyklisch sind, die schon Newton als problematisch empfunden hat: Erst wenn man ein Inertialsystem eingeführt hat, kann man Kräfte sinnvoll definieren. Vorher ist nicht klar, ob eine nicht geradlinig-gleichförmige Bewegung auf eine Kraft zurückgeht oder darauf zurückzuführen ist, dass das Bezugssystem kein Inertialsystem ist. Andererseits kann man Inertialsysteme nicht definieren, ohne auf Kräfte Bezug zu nehmen, weil sie eben als Bezugssysteme definiert sind, in denen sich kräftefreie Körper geradlinig-gleichförmig bewegen.

Erst die Einführung von Näherungen hilft aus dieser zirkulären Situation heraus. Beispielsweise ist die Erde keineswegs ein Inertialsystem, weil sie etwa in Bezug auf ferne Fixsterne rotiert. Effekte, die aufgrund der Erdbewegung auftreten, spielen aber in unseren Labors meist keine Rolle, weil die dort untersuchten Kräfte größer sind. In seiner Allgemeinen Relativitätstheorie ist es Einstein gelungen, Inertialsysteme durch eine sehr viel befriedigendere Klasse von Bezugssystemen zu ersetzen.

3.2 Impuls, Drehimpuls und Energie

In der Einführung zur Newtonschen Mechanik haben wir die Bewegung eines Körpers durch die anliegenden Kräfte beschrieben. Das hat es uns erlaubt, die Bewegung dieses Körpers als Funktion der Zeit zu beschreiben. Bei der Beschreibung des freien Falls aus großer Höhe haben wir aber eine alternative Art der Beschreibung einer Bewegung gesehen,

nämlich unabhängig von der Zeit erhaltene Größen. Solche Größen sehen wir uns nun etwas systematischer an.

3.2.1 Impuls

- Den Impuls $\vec{p}$ haben wir schon als Produkt von Masse m und Geschwindigkeit $\vec{v}$ definiert, als wir das 1. Newtonsche Axiom (1.2) eingeführt haben. Es besagt, dass sich der Impuls eines Körpers dann nicht ändert, wenn keine Kräfte auf ihn wirken,

$$\vec{p} = \text{const.} \quad \text{in Abwesenheit von Kräften} \quad (3.28)$$

Nach den Bemerkungen über allgemeine Bezugs- und Inertialsysteme in Abschnitt 5.1 müssen wir hier präzisieren, dass die Aussage des Trägheitsgesetzes *in Inertialsystemen* gilt.

Das zweite Newtonsche Gesetz (1.3) lautet in Form des Impulses

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}. \quad (3.29)$$

Für zeitliche Veränderungen von Impulsen sind Kräfte verantwortlich. Umgekehrt muss der Impuls also erhalten sein, wenn keine Kräfte wirken.

Die letzte Aussage gilt wiederum in Inertialsystemen. Aus der Sicht von jemanden, der im Karussell fährt, bewegt sich die gesamte Umgebung, ohne dass Kräfte auf sie wirken!

3.2.2 Drehmoment und Drehimpuls

- Das *Moment* einer Kraft $\vec{F}$ bezüglich des Koordinatenursprungs wird durch

$$\vec{M} := \vec{r} \times \vec{F} \quad (3.30)$$

definiert. Wenn ϕ der Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{F}$ ist, hat es den Betrag $|\vec{M}| = rF \sin \phi$. Das Moment einer Kraft verschwindet, wenn sie in dieselbe Richtung zeigt wie der Ortsvektor $\vec{r}$ ihres Angriffspunkts.

Das Moment um eine Achse, deren Richtung durch den Einheitsvektor $\vec{e}$ beschrieben wird, ist entsprechend durch

$$M_e = \vec{e} \cdot \vec{M} = \vec{e} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) \quad (3.31)$$

definiert. Es ist offenbar ein Skalar.

- Ähnlich wird der *Drehimpuls* um den Koordinatenursprung durch

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (3.32)$$

definiert. Seine Zeitableitung ist durch

$$\frac{d\vec{L}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \quad (3.33)$$

gegeben, denn da $\dot{\vec{r}} = \vec{v} \parallel \vec{p}$ ist, verschwindet der Term $\dot{\vec{r}} \times \vec{p}$. Demnach gilt der *Drehimpulssatz*

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}. \quad (3.34)$$

In Abwesenheit von Drehmomenten, $\vec{M} = 0$, bleibt der Drehimpuls erhalten, $\dot{\vec{L}} = 0$. Der Vergleich mit (3.29) zeigt, dass Drehmoment und Drehimpuls sich genauso verhalten wie Kraft und Impuls bei einer linearen Bewegung.

3.2.3 Energiesatz in einer Dimension

- Bei der Diskussion der Energie beschränken wir uns zunächst auf eine Dimension. Wie vorher (Abschnitt 1.4.4) bei der Diskussion des freien Falls aus großer Höhe verwenden wir $\dot{x}$ als integrierenden Faktor der Bewegungsgleichung,

$$m\ddot{x} = F(x) \Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} = \dot{x}F(x) \Rightarrow \frac{m}{2} \frac{d(\dot{x}^2)}{dt} = -\frac{d}{dt}V(x), \quad (3.35)$$

wobei

$$V(x) := - \int_{x_0}^x F(x') dx' \quad (3.36)$$

definiert wurde. Der Anfangspunkt x_0 kann frei gewählt werden. Damit ist

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}; \quad -\frac{d}{dt}V(x) = -\frac{dV}{dx}\dot{x} = -F(x)\dot{x} \quad (3.37)$$

und die Zeitableitung

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) \right] = 0 \quad (3.38)$$

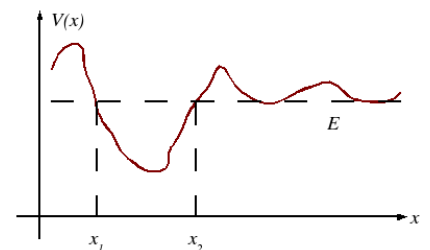
verschwindet.

- Demnach ist die *Energie*

$$E := \frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) \quad (3.39)$$

konstant. Die Größe $V(x)$ wird als *potentielle Energie* oder als *Potential* bezeichnet.

In einer Dimension kann zu einer Kraft $F(x)$, die nicht von $\dot{x}$ abhängt, immer ein Potential angegeben werden. Wegen der freien Wahl von x_0 ist $V(x)$ nur bis auf eine Konstante bestimmt.



Einschränkung der Bewegung und Umkehrpunkte

- Aus dem Energiesatz in einer Dimension (3.39) lässt sich die Trajektorie des Körpers implizit durch Trennung der Variablen ausdrücken

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - V)} \\ \Rightarrow \quad \pm \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V)}} &= t - t_0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Offenbar ist Bewegung nur dort möglich, wo $E - V \geq 0$ ist. Die kinetische Energie $T = (m/2)\dot{x}^2$ ist positiv-semidefinit, $T \geq 0$.

Dadurch werden *Umkehrpunkte* $x_{1,2}$ definiert, die die Bewegung begrenzen. Bei $x = x_1$ und $x = x_2$ wird die kinetische Energie minimal ($T = 0$) und daher $V = E$. Das ist die Bedeutung des $\pm$ -Zeichens oben: an den Umkehrpunkten ändert sich die Richtung der Bewegung. Dadurch tritt eine (möglicherweise nicht harmonische) Schwingung zwischen x_1 und x_2 auf. Sie hat die Schwingungsperiode

$$\Delta t = 2(t_1 - t_0) = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V)}} = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - V}} \quad (3.41)$$

- Als Beispiel kann uns der harmonischer Oszillator dienen, für den die Kraft linear von der Auslenkung abhängt,

$$F(x) = -kx \quad \Rightarrow \quad V(x) = - \int_0^x F(x') dx' = \frac{k}{2} x^2, \quad (3.42)$$

wenn man x_0 so wählt, dass bei $x = 0$ auch $V = 0$ gilt. Also ist die Energie

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2 = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2), \quad (3.43)$$

mit $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Die Umkehrpunkte werden erreicht, wenn

$$E = \frac{m}{2} \omega_0^2 x^2 \quad (3.44)$$

ist, also bei

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m\omega_0^2}}. \quad (3.45)$$

- Die allgemeine Lösung des harmonischen Oszillators ist ebenfalls durch die Bedingung gegeben, dass seine Energie konstant ist. Mit Hilfe der Umkehrpunkte $x_{1,2} = \pm A_0$ schreiben wir dies als

$$E = \frac{m}{2} A_0^2 \omega_0^2 = \text{konst.} \quad (3.46)$$

Aus der allgemeinen Formel kann man die Schwingungsperiode berechnen und erhält

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_0} . \quad (3.47)$$

- Die Bewegungsgleichung für den durch einen quadratischen Reibunsterm gedämpften harmonischen Oszillator lassen sich in der Form

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2 \right] = -b \dot{x}^2 , \quad (3.48)$$

also mit $V(x) = (k/2)x^2$ schreiben; die Energie nimmt also ab, denn $-b\dot{x}^2 \leq 0$. Es handelt sich um ein *dissipatives* System.

Kapitel 4

Bewegung in drei Dimensionen

4.1 Kinematik in drei Dimensionen

Bislang haben wir für die Bewegung eines Probekörpers mit und ohne Kräfte zwar immer einen dreidimensionalen Raum angenommen, diesen Raum aber in der eigentlichen Berechnung durch eine geeignete Wahl der Koordinaten immer auf eine Dimension reduziert. Mit Hilfe der Rechenregeln in einem Vektorraum können wir diese Rechnungen aber auch allgemein in drei Dimensionen durchführen.

4.1.1 Bahnkurven

- Nach der allgemeinen Einführung in die Grundlagen der Vektorräume verabreden wir, Vektoren im dreidimensionalen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit Pfeilen zu kennzeichnen. In der Regel stellen wir Vektoren als *Spaltenvektoren* dar,

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

und kennzeichnen die entsprechenden *Zeilenvektoren* als *transponiert*, $\vec{x}^T = (x_1, x_2, x_3)$. Weiterhin notieren wir das Skalarprodukt durch einen Punkt, $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle =: \vec{v} \cdot \vec{w}$.

- Der Ortsvektor $\vec{x}$ eines Massenpunkts ändert sich im Allgemeinen mit der Zeit t , $\vec{x} = \vec{x}(t)$. Die zwischen zwei Zeiten t_1 und $t_2 > t_1$ durchlaufenen Punkte $\vec{x}(t)$ bilden die *Bahnkurve* des Massenpunkts. In drei Dimensionen wird sie dargestellt durch die drei zeitabhängigen Komponenten

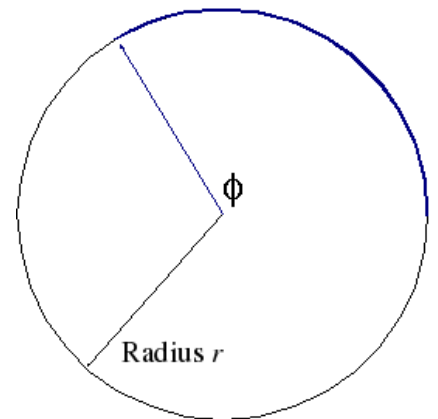
$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Beispiele sind eine Kreisbahn in der x_1 - x_2 -Ebene mit Radius R ,

$$\vec{x}_K(t) = R \begin{pmatrix} \cos \phi(t) \\ \sin \phi(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

oder eine Schraubenbahn längs der x_3 -Achse mit Radius R ,

$$\vec{x}_S(t) = \begin{pmatrix} R \cos \phi(t) \\ R \sin \phi(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$



Bewegung auf einer Kreisbahn

- Die *Geschwindigkeit* ist wie gewohnt die Ableitung des Ortes nach der Zeit, wobei die Zeitableitung eines Vektors Komponente für Komponente definiert ist

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}. \quad (4.5)$$

Die Geschwindigkeiten in den obigen Beispielen sind

$$\vec{v}_K(t) = R \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \sin \phi(t) \\ \dot{\phi} \cos \phi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_S(t) = \begin{pmatrix} -R\dot{\phi} \sin \phi(t) \\ R\dot{\phi} \cos \phi(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

- Die *Beschleunigung* ist ebenfalls wie gewohnt die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit oder die zweite Ableitung der Ortskoordinate nach der Zeit,

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \ddot{\vec{x}}(t) = \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2}. \quad (4.7)$$

Die Beschleunigungen in den obigen Beispielen sind also

$$\begin{aligned} \vec{a}_K(t) &= R \begin{pmatrix} -\ddot{\phi} \sin \phi(t) - \dot{\phi}^2 \cos \phi(t) \\ \ddot{\phi} \cos \phi(t) - \dot{\phi}^2 \sin \phi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \\ \vec{a}_S(t) &= \begin{pmatrix} -R\ddot{\phi} \sin \phi(t) - R\dot{\phi}^2 \cos \phi(t) \\ R\ddot{\phi} \cos \phi(t) - R\dot{\phi}^2 \sin \phi(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

4.1.2 Bogenlänge, Tangential- und Normalvektoren

- Ein beliebig kleines, aber endlich großes (infinitesimales) Element der *Bogenlänge* längs der Bahnkurve ist durch

$$ds = |d\vec{x}(t)| = \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| dt = |\vec{v}(t)| dt \quad (4.9)$$

gegeben. Die integrierte Bogenlänge endlicher Länge ist daher

$$s = \int_0^t |\vec{v}(t')| dt' . \quad (4.10)$$

Sie entspricht der zwischen den Zeiten 0 und t zurückgelegten Strecke.

Für viele Zwecke ist eine Umparametrisierung günstig, die statt der Zeit t die Bogenlänge s verwendet. Das ist möglich, weil s mit der Zeit monoton wächst; $\vec{x}(t) \rightarrow \vec{x}(s)$. Die Jacobi-Determinanten dieser Substitution lässt sich aus dem Geschwindigkeitsfeld berechnen.

- Der *Tangentialvektor* an die Bahnkurve ist die Ableitung der Bahnkurve nach der Bogenlänge,

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{x}}{ds} \quad \Leftrightarrow \quad d\vec{x} = \vec{\tau} ds . \quad (4.11)$$

In der zweiten Form sieht man umgekehrt, dass man einen infinitesimalen Vektor einer Bahnkurve in eine Richtung und in infinitesimales Stück Bogenlänge aufspalten kann. Aufgrund der Definition der Bogenlänge s ist $\vec{\tau}$ ein Einheitsvektor, $|\vec{\tau}| = 1$. Der Vektor

$$\vec{n}_H = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right|^{-1} \quad (4.12)$$

heißt *Hauptnormalenvektor*. Er steht senkrecht auf $\vec{\tau}$,

$$\vec{\tau}^2 = 1 \Rightarrow \frac{d(\vec{\tau}^2)}{ds} = 2\vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = 0 , \quad (4.13)$$

also $\vec{n}_H \perp \vec{\tau}$. Es gibt einen weiteren, von $\vec{n}_H$ linear unabhängigen Normalenvektor zu $\vec{\tau}$, den *Binormalenvektor*

$$\vec{n}_B = \vec{\tau} \times \vec{n}_H . \quad (4.14)$$

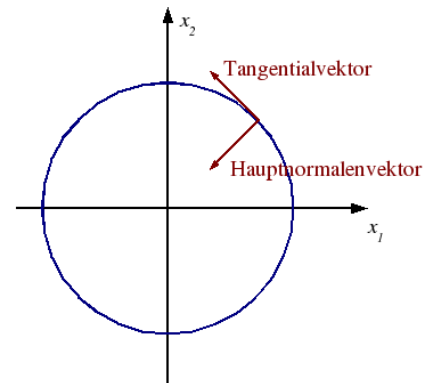
Damit bilden τ , n_H und n_B eine orthogonale Basis unseres dreidimensionalen Raumes.

- Als einfaches Beispiel dient die Kreisbewegung mit konstanter Geschwindigkeit. Wegen $|\vec{v}(t)| = R\dot{\phi}$ ist die *Winkelgeschwindigkeit* $\dot{\phi} = \omega$ konstant. Daraus ergibt sich die Bogenlänge

$$s = \int_0^t R\omega dt' = R\omega t . \quad (4.15)$$

Die Umparametrisierung $t \rightarrow s/(R\omega)$ ergibt die Bahnkurve ausgedrückt durch s ,

$$\vec{x}(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos(s/R) \\ \sin(s/R) \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x}(s) . \quad (4.16)$$



Tangential- und Hauptnormalenvektor bei der Kreisbewegung

Der Tangentialvektor ist

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{x}(s)}{ds} = \begin{pmatrix} -\sin(s/R) \\ \cos(s/R) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Den Hauptnormalenvektor berechnen wir aus (4.12) als

$$\vec{n}_H = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -\cos(s/R) \\ -\sin(s/R) \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{R} \right)^{-1} = - \begin{pmatrix} \cos(s/R) \\ \sin(s/R) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Der Binormalenvektor ist entsprechend

$$\vec{n}_B = \begin{pmatrix} -\sin(s/R) \\ \cos(s/R) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos(s/R) \\ -\sin(s/R) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

also senkrecht zur Kreisebene.

4.1.3 Tangential- und Normalkomponenten

- Allgemein definiert man den lokalen Krümmungsradius in Analogie zum Radius des Kreises als die Länge des nicht normierten Hauptnormalenvektors

$$\rho := \left| \frac{d\vec{\tau}}{ds} \right|^{-1} \quad (4.20)$$

Je stärker der Tangentialvektor sich entlang der Bogenlänge ändert, desto größer ist die Krümmung und desto kleiner ist der Radius ρ .

- Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung können in ihre tangentialen und normalen Komponenten zerlegt werden,

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \frac{d\vec{x}}{ds} \frac{ds}{dt} = |\vec{v}(t)| \cdot \vec{\tau}, \quad (4.21)$$

die Geschwindigkeit ist also tangential zur Bahnkurve. Für die Beschleunigung ergibt sich

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = \dot{v}\vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \dot{v}\vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{v}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}_H. \quad (4.22)$$

Den Betrag des Geschwindigkeitsvektors schreiben wir hier kurz als $|\vec{v}| = v$. Die Beschleunigung hat also eine tangentiale Komponente und eine Komponente in Richtung der Hauptnormalen, die mit zunehmendem Krümmungsradius abnimmt.

4.1.4 Kurvenintegrale

- Die Einführung des Energiesatzes durch einen integrierenden Faktor hat ergeben, dass die Energie in einer Dimension erhalten ist, wenn die Kraft als negative Ableitung eines Potentials nach dem Ort dargestellt werden kann,

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}, \quad V(x) = -\int_{x_0}^x F(x')dx', \quad (4.23)$$

Die Frage ist, welche der beiden Formulierungen wir am besten in drei Dimensionen verallgemeinern können. Während wir mit der differentiellen Form schon mer gearbeitet haben, ist das Integral jedoch einfacher auf ein Integral entlang einer Bahnkurve in drei Dimensionen zu verallgemeinern. Der Anfangspunkt x_0 der Integration war beliebig. Wenn wir dieses Ergebnis auf drei Dimensionen verallgemeinern wollen, müssen wir nicht nur den Anfangspunkt, sondern auch den Integrationsweg festlegen. Die erste Frage ist dann, wann man ein Potential $V(\vec{x})$ einführen kann, das vom Integrationsweg unabhängig wird. Für diese Betrachtung lohnt sich ein Umweg über eine Diskussion der Kurvenintegrale.

- Eine endlich lange Kurve C lässt sich durch eine Funktion darstellen, die einem Kurvenparameter t einen Punkt $\vec{x}(t)$ im Raum zuordnet, wobei der Kurvenparameter einem bestimmten endlichen oder unendlichen Intervall $I = [t_a, t_b]$ entnommen ist,

$$C : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \vec{x}(t). \quad (4.24)$$

Die Endpunkte der Kurve sind $\vec{x}_a = \vec{x}(t_a)$ und $\vec{x}_b = \vec{x}(t_b)$. Betrachten wir nun eine vektorwertige Funktion $\vec{A}(\vec{x})$ im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$, die wir entlang der Kurve integrieren wollen. Einer kleinen Verschiebung vom Punkt $\vec{x}$ zum Punkt $\vec{x} + \delta\vec{x}$ können wir den Skalar

$$\delta\Phi = \vec{A}(\vec{x}) \cdot \delta\vec{x} \quad (4.25)$$

zuordnen. Um nun das *Kurvenintegral* über $\vec{A}(\vec{x})$ zu berechnen, beginnen wir am Ort $\vec{x}_a$ und gehen in beliebig kleinen Schritten $d\vec{x}$ längs der Kurve nach $\vec{x}_b$. In jedem Schritt berechnen wir $\vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}$ und summieren alle Ergebnisse auf. Damit erhalten wir das Kurvenintegral

$$\Phi = \int_{\vec{x}_a}^{\vec{x}_b} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}. \quad (4.26)$$

Das Kurvenintegral heißt geschlossen, wenn Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen, $\vec{x}_a = \vec{x}_b$. Es wird dann durch

$$\int_{\vec{x}_a}^{\vec{x}_b} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \oint_C \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \quad (4.27)$$

gekennzeichnet.

- Bei der praktischen Berechnung geht man entsprechend vor: Man stellt das gerichtete Wegelement $d\vec{x}$ mithilfe des Kurvenparameters t dar,

$$d\vec{x} = \frac{d\vec{x}}{dt} dt, \quad (4.28)$$

so dass das Kurvenintegral in das gewöhnliche, eindimensionale Integral

$$\int_{\vec{x}_a}^{\vec{x}_b} \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \int_{t_a}^{t_b} \vec{A}(\vec{x}) \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} dt \quad (4.29)$$

übergeht, das dann wie gewohnt ausgeführt werden kann.

4.2 Differentialoperatoren

In einem weiteren Schritt der Abstraktion können wir nun vektorwertige Funktionen in einem n -dimensionalen Raum mit Ableitungen betrachten.

4.2.1 Felder, Partielle Ableitungen und der Gradient

- Ein *Feld* f ist eine Funktion des Raumes, d.h. eine Funktion, die jedem Raumpunkt $\vec{x}$ einen Wert $f(\vec{x})$ zuordnet. Wenn das Feld jedem Raumpunkt einen Vektor zuordnet $\vec{f}(\vec{x})$, also vektorwertig ist, heißt es *Vektorfeld*.
- Für Funktionen $f(x)$ einer Variablen x ist die Ableitung nach x eindeutig als der Grenzwert

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon) - f(x)}{\epsilon} \quad (4.30)$$

definiert. Für Funktionen mehrerer Variabler definiert man eine *partielle Ableitung*, bei der nur die Änderung längs einer Koordinatenrichtung untersucht wird,

$$\frac{\partial f(x_1, \dots, x_N)}{\partial x_i} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \epsilon, \dots, x_N) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_N)}{\epsilon}, \quad (4.31)$$

während jeweils alle anderen Koordinaten konstant gehalten werden. Die partielle Ableitung nach der Koordinate x_i wird oft durch andere Schreibweisen abgekürzt, von denen

$$\frac{\partial f(x_1, \dots, x_N)}{\partial x_i} = \partial_i f(x_1, \dots, x_N) = f_{,i}(x_1, \dots, x_N) \quad (4.32)$$

die gebräuchlichsten sind.

- Zum Beispiel hat die Funktion

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{\sin(x_1) \cos(x_2)}{x_3} \quad (4.33)$$

die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{\cos(x_1) \cos(x_2)}{x_3}, \\ \partial_2 f(x_1, x_2, x_3) &= -\frac{\sin(x_1) \sin(x_2)}{x_3}, \\ \partial_3 f(x_1, x_2, x_3) &= -\frac{\cos(x_1) \sin(x_2)}{x_3^2}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

- Für die partielle Ableitung gelten dieselben Regeln wie für die gewöhnliche Ableitung, nämlich die Produktregel

$$\partial_i(fg) = (\partial_i f)g + f(\partial_i g) \quad (4.35)$$

und die Kettenregel

$$\partial_i(f(g)) = \frac{df}{dg} \partial_i g, \quad (4.36)$$

wobei f eine Funktion einer skalaren Größe und g eine Funktion der Koordinaten $\vec{x}_i$ ist.

- Längs einer Kurve $\vec{x}(t)$ definieren wir die *totale Ableitung* einer Feldfunktion $f(\vec{x})$ als

$$\frac{df(\vec{x}(t))}{dt} = \frac{\partial f(\vec{x}(t))}{\partial x_i} \frac{dx_i(t)}{dt} = \partial_i f(\vec{x}(t)) v_i(t). \quad (4.37)$$

Alle partiellen Änderungen der Funktion werden mit der Bahngeschwindigkeit multipliziert und summiert. Beispielsweise ist die totale Ableitung der Funktion $f(\vec{x})$ aus (4.33) längs der Kurve $\vec{x}(t) = (v_1 t, v_2 t, 1)$ durch

$$\frac{df}{dt} = v_1 \partial_1 f + v_2 \partial_2 f = v_1 \cos(v_1 t) \cos(v_2 t) - \sin(v_1 t) \sin(v_2 t) \quad (4.38)$$

gegeben.

- Der *Gradient* $\vec{\nabla} f$ einer skalaren Funktion $f(\vec{x})$ ist als der N -dimensionale Vektor definiert, dessen Komponenten

$$\vec{\nabla} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \vdots \\ \partial_N f \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad (\vec{\nabla} f)_i = \partial_i f \quad (4.39)$$

betragen. Das Zeichen ∇ wird „Nabla“ ausgesprochen. Einem stetig differenzierbaren, skalaren Feld $f(\vec{x})$ ordnet der Gradient in

jedem Punkt einen Vektor $\vec{\nabla}f$ zu. Der Gradient eines skalaren Feldes ist also ein Vektorfeld

$$\vec{g}(\vec{x}) = \vec{\nabla}f(\vec{x}) . \quad (4.40)$$

Der vektorwertige Operator

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \vec{e}_N \frac{\partial}{\partial x_N} = \vec{e}_i \partial_i \quad (4.41)$$

heißt Nabla-Operator. Ausgedrückt durch den Nabla-Operator lautet die totale Ableitung (4.37) einer Funktion $f(\vec{x})$

$$\frac{df(\vec{x}(t))}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla}f(\vec{x}(t)) . \quad (4.42)$$

Die *Richtungsableitung* eines skalaren Feldes längs einer Richtung, die durch den Einheitsvektor $\vec{e}$ gegeben ist, ist das Skalarprodukt aus dem Gradienten und dem Vektor $\vec{e}$,

$$\vec{e} \cdot \vec{\nabla}f(\vec{x}) . \quad (4.43)$$

Liegt $\vec{e}$ in einer Fläche, in der die Funktion f konstant ist, muss die Richtungsableitung verschwinden. Wegen $\vec{\nabla}f \cdot \vec{e} = 0$ steht der Gradient also senkrecht auf Flächen konstanter Funktionswerte. Der Gradient zeigt demnach die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion $f(\vec{x})$ an.

4.2.2 Divergenz und Rotation

- Man kann den Nabla-Operator auch auf ein Vektorfeld anwenden. Die *Divergenz* $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{x})$ eines Vektorfeldes $\vec{f}(\vec{x})$ kann als das Skalarprodukt des Nabla-Operators mit dem Vektorfeld $\vec{f}(\vec{x})$ aufgefasst werden. Sie ist durch die Summe der partiellen Ableitungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \partial_i f_i \quad (4.44)$$

definiert. Wenn $\vec{f}$ überall differenzierbar ist, ordnet die Divergenz jedem Punkt des Raumes einen Skalar zu. Die Divergenz eines Vektorfeldes ist also ein Skalarfeld.

- Alternativ kann man den Nabla-Operator auf ein Vektorfeld durch das Vektorprodukt anwenden. Die *Rotation* $\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{x})$ eines Vektorfeldes $\vec{f}(\vec{x})$ ist

$$\vec{\nabla} \times \vec{f}(\vec{x}) = \epsilon_{ijk} \partial_i f_j(\vec{x}) \vec{e}_k . \quad (4.45)$$

Sie ordnet einem differenzierbaren Vektorfeld ein Vektorfeld zu.

- Ein ganz einfaches Beispiel bietet das Vektorfeld $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{x}$. Seine Divergenz beträgt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{x} = \partial_i x_i = 3 \quad (4.46)$$

in drei Dimensionen, während seine Rotation verschwindet,

$$\vec{\nabla} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} \partial_2 x_3 - \partial_3 x_2 \\ \partial_3 x_1 - \partial_1 x_3 \\ \partial_1 x_2 - \partial_2 x_1 \end{pmatrix} = \vec{0}. \quad (4.47)$$

4.2.3 Rechenregeln

- Zahlreiche wichtige Rechenregeln für den Umgang mit dem Nabla-Operator lassen sich mithilfe der Produkt- und der Kettenregel sowie der Beziehung (3.14) zwischen dem Levi-Civita- und dem Kronecker-Symbol herleiten. Wir geben hier einige Beispiele an.
- Seien f und g skalare Felder sowie $\vec{v}$ und $\vec{w}$ Vektorfelder, dann gelten die Formeln:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(fg) &= f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f \\ \vec{\nabla} \cdot (f\vec{v}) &= \vec{\nabla}f \cdot \vec{v} + f\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \\ \vec{\nabla} \times (f\vec{v}) &= \vec{\nabla}f \times \vec{v} + f\vec{\nabla} \times \vec{v} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{w}) &= (\vec{w} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{w}) - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{w} + \vec{w}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Der Operator

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2 = \partial_i \partial_i = \Delta \quad (4.49)$$

heißt auch Laplace-Operator und spielt eine herausragende Rolle in vielen Zweigen der Physik.

4.3 Energiesatz in drei Dimensionen

Nachdem wir nun in mehreren Dimensionen differenzieren und integrieren können, sollten wir unseren eindimensionalen Energiesatz verallgemeinern können.

4.3.1 Energieerhaltung bei Potentialkräften

- Aus der nun vektorwertigen Bewegungsgleichung folgt nach Multiplikation mit $\dot{\vec{x}}$ als integrierendem Faktor

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 \right) = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}. \quad (4.50)$$

Analog zum eindimensionalen Fall ist

$$T = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 = \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad (4.51)$$

die *kinetische Energie*. Die infinitesimale Änderung der kinetischen Energie ist die von der Kraft $\vec{F}$ längs des Wegelements $d\vec{x}$ verrichtete *Arbeit* dA ,

$$d\left(\frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2\right) = \vec{F} \cdot d\vec{x} = dA. \quad (4.52)$$

Die *Leistung* ist die pro Zeiteinheit verrichtete Arbeit,

$$\text{Leistung} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeiteinheit}} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}. \quad (4.53)$$

- Um aus der Bewegungsgleichung auf eine Erhaltungsgröße zu schließen, müsste sich die rechte Seite in (4.50) als Zeitableitung einer anderen Funktion schreiben lassen, es müsste also eine Funktion A geben so, dass

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{dA}{dt} \quad (4.54)$$

gilt. Das ist zwar im Allgemeinen nicht der Fall, gilt aber für die wichtige Klasse der Potentialkräfte, die durch

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{x}) \quad (4.55)$$

gegeben sind. Für solche Kräfte gilt offenbar

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = -\vec{\nabla} V \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = -\frac{dV(\vec{x})}{dt}. \quad (4.56)$$

Damit ist dann wieder

$$\frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 + V(\vec{x}) = T + V = E = \text{konst.}, \quad (4.57)$$

und die Energie ist erhalten. Potentialkräfte $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ heißen daher *konservativ*, andere *dissipativ*.

4.3.2 Beispiele für Potentialkräfte

- Ein einfaches Beispiel liefert der harmonische Oszillator in drei Dimensionen mit dem Potential

$$V = \frac{k}{2} \vec{x}^2, \quad \vec{F} = -\vec{\nabla} V = -k\vec{x}. \quad (4.58)$$

- Ein zweites Beispiel sind Zentralkräfte, die zu einem festen Zentrum hin oder davon weg zeigen. Der Betrag der Kraft hängt nur vom Abstand von diesem Zentrum ab. Wenn man das Zentrum in den Ursprung legt, ist

$$\vec{F} = F(r)\vec{e}_r = F(r)\frac{\vec{x}}{r}. \quad (4.59)$$

Wir können zeigen, dass solche Kräfte immer ein Potential haben, indem wir das Potential ausrechnen. Entlang der radialen Richtung können wir wieder unser dreidimensionales Problem auf eine Dimension reduzieren. Mit dem Ansatz

$$V(r) = - \int_{r_0}^r F(r') dr'. \quad (4.60)$$

erhalten wir für die Kraft in drei Dimensionen

$$\begin{aligned} F_i &= -\frac{\partial}{\partial x_i} V(r) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{r_0}^r F(r') dr' = \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{d}{dr} \int_{r_0}^r F(r') dr' = F(r) \frac{x_i}{r}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Das ist genau die Kraft in (4.59).

4.4 Konservative Kraftfelder

4.4.1 Unabhängigkeit vom Weg

Schon bei der Herleitung des dreidimensionalen Energiesatzes haben wir zwei Dinge gesehen: Erstens ergibt die Integraldarstellung des Potentials in (4.23) nur einen Sinn, wenn das Kurvenintegral im dreidimensionalen Raum unabhängig vom Weg ist, wobei wir bisher keine mathematische Verknüpfung dieser beiden Aspekte haben. Zweitens gibt es offenbar Klassen von Kräften, die sich mit Hilfe eines solchen Potentials schreiben lassen. Eine Bedingung für diese Fälle würde es uns ersparen, konservative Kräfte immer wieder durch das Berechnen des Potentials zu erkennen.

- Nehmen wir zunächst an, das Kurvenintegral

$$\Phi(\vec{x}) = \int_{\vec{x}_a}^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{x}') \cdot d\vec{x}' \quad (4.62)$$

sei unabhängig vom Weg. Wir betrachten es hier als Funktion des Endpunkts der Kurve. Wir verlängern sie um ein kleines Stück $\delta\vec{x}$

und betrachten die Differenz für beliebig kleine Verschiebungen $\delta\vec{x}$ analog zu einer totalen Ableitung

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{x} + \delta\vec{x}) - \Phi(\vec{x}) &= \vec{\nabla}\Phi(\vec{x}) \cdot d\vec{x} \\ &= \int_{\vec{x}}^{\vec{x}+\delta\vec{x}} \vec{A}(\vec{x}') \cdot d\vec{x}' = \vec{A}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}.\end{aligned}\quad (4.63)$$

Der letzte Schritt ist nichts anderes als der Hauptsatz der Integralrechnung. Wir haben also gezeigt, dass für ein vom Weg unabhängiges Kurvenintegral ein Integral über ein Gradientenfeld $\vec{A} = \vec{\nabla}\Phi$ sein muss.

- Wenn wir umgekehrt $\vec{A} = \vec{\nabla}\Phi$ annehmen, dann ist das Kurvenintegral über $\vec{A}$ vom Weg unabhängig, denn

$$\int_{\vec{x}_a}^{\vec{x}_b} \vec{A} \cdot d\vec{x} = \int_{\vec{x}_a}^{\vec{x}_b} \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{x} = \int_{\Phi(\vec{x}_a)}^{\Phi(\vec{x}_b)} d\Phi = \Phi(\vec{x}_b) - \Phi(\vec{x}_a), \quad (4.64)$$

unabhängig vom Verlauf. Kombiniert haben wir also in zwei Schritten gezeigt, dass ein Kurvenintegral über ein Vektorfeld $\vec{A}$ dann und nur dann vom Weg unabhängig ist, wenn es ein Skalarfeld Φ gibt, dessen Gradient $\vec{A}$ ist, $\vec{A} = \vec{\nabla}\Phi$.

- Nach welchem Kriterium können wir entscheiden, ob $\vec{A}$ ein Gradientenfeld ist? Da die Rotation eines Gradienten identisch verschwindet,

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\Phi = \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j \Phi \vec{e}_k \equiv 0, \quad (4.65)$$

ist offenbar $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ ein notwendiges Kriterium. In eine Richtung haben wir also gezeigt, dass für ein Gradientenfeld immer die Rotation verschwindet, $\vec{\nabla} \times \vec{A} \neq 0$.

- Um in die andere Richtung zu zeigen dass es auch hinreichend ist nehmen wir $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ an. Wir schreiben das Kurvenintegral über $\vec{A}$ längs eines speziellen Weges, der stückweise parallel zu den drei Koordinatenachsen führt und definieren uns dadurch ein mögliches Potential Φ ,

$$\Phi(\vec{x}) = \int_{x_a}^x A_x(x', y_a, z_a) dx' + \int_{y_a}^y A_y(x, y', z_a) dy' + \int_{z_a}^z A_z(x, y, z') dz' \quad (4.66)$$

Diese Konstruktion von Φ entlang eines speziellen Weges ist kein Problem, weil wir nur die Existenz eines skalaren Potentials mit $\vec{A} = \vec{\nabla}\Phi$ zeigen müssen und nicht dass diese Lösung eindeutig ist. Die drei partiellen Ableitungen des Feldes Φ sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\partial_z \Phi &= A_z(x, y, z) \\ \partial_y \Phi &= A_y(x, y, z_a) + \int_{z_a}^z \partial_y A_z(x, y, z') dz' \\ \partial_x \Phi &= A_x(x, y_a, z_a) + \int_{y_a}^y \partial_x A_y(x, y', z_a) dy' + \int_{z_a}^z \partial_x A_z(x, y, z') dz'.\end{aligned}\quad (4.67)$$

In Komponenten geschrieben gibt uns $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ die drei Bedingungen $\partial_y A_z = \partial_z A_y$, $\partial_x A_y = \partial_y A_x$ und $\partial_x A_z = \partial_z A_x$. Damit folgt

$$\partial_y \Phi = A_y(x, y, z_a) + \int_{z_a}^z \partial_{z'} A_y(x, y, z') dz' = A_y(x, y, z) \quad (4.68)$$

und entsprechend $\partial_x \Phi = A_x(x, y, z)$. Nach der Definition in (4.67) haben wir damit $\vec{\nabla} \Phi = \vec{A}$ für alle drei Komponenten bewiesen. Damit haben wir in zwei Schritten gezeigt, dass $\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$ äquivalent dazu ist, dass $\vec{A}$ ein Gradientenfeld ist.

- Diese Schlussfolgerung gilt aber nur dann, wenn $\vec{A}$ überall längs des Integrationsweges definiert ist. Deswegen muss man die Einschränkung anbringen, dass die obige Aussage nur in einem Raumbereich gilt, der „keine Löcher hat“, so dass kein möglicher Integrationsweg durch einen Bereich läuft, in dem $\vec{A}$ nicht definiert ist. Dies wird präzise durch die Definition eines *einfach zusammenhängenden Gebiets* formuliert: Ein Gebiet G heißt einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve in G stetig zu einem Punkt zusammengezogen werden kann, ohne das Gebiet zu verlassen.
- Wir haben also gezeigt, dass Kraftfelder $\vec{F}$, die auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet G definiert sind, dann und nur dann ein Potential haben, wenn sie in G wirbelfrei sind, $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$. Und genau unter dieser Bedingung ist die Darstellung des Potentials als Kurvenintegral auch unabhängig vom Weg.

4.4.2 Der Satz von Stokes

- Es bietet sich an dieser Stelle an, einen der beiden Integralsätze zu besprechen, die in der Physik sehr wichtig sind. Der Satz von Stokes ersetzt Integrale über Vektorfelder durch Integrale über Differentialoperatoren dieser Vektorfelder.
- Wir betrachten zunächst ein Vektorfeld $\vec{A}$ und ein geschlossenes Kurvenintegral über $\vec{A}$ längs eines infinitesimal kleinen Weges in der x - y -Ebene. Ausgehend vom Punkt (x_0, y_0) gehen wir jeweils parallel zu den Achsen zu den Punkten $(x_0 + dx, y_0)$, $(x_0 + dx, y_0 + dy)$, $(x_0, y_0 + dy)$ und zurück zu (x_0, y_0) . Dann lässt sich das geschlossene Kurvenintegral in der Form

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{x} &= \int_1 A_x(x_0, y_0) dx + \int_2 A_y(x_0 + dx, y_0) dy \\ &\quad - \int_3 A_x(x_0 + dx, y_0 + dy) dx - \int_4 A_y(x_0, y_0 + dy) dy \end{aligned} \quad (4.69)$$

schreiben, worin die Minuszeichen daher kommen, dass man längs des 3. und des 4. Wegstücks gegen die Achsenrichtung läuft. Mit Hilfe von Taylor-Näherungen der Art

$$A_y(x_0 + dx, y_0) = A_y(x_0, y_0) + \partial_x A_y(x_0, y_0) dx, \quad (4.70)$$

bestimmen wir die Komponenten des Feldes $\vec{A}$ an den Eckpunkten des Weges. Das Integral in (4.70) nähern wir auf diese Weise durch Flächeninhalte kleiner Rechtecke an,

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{x} &= \int_1 A_x(x_0, y_0) dx + \int_2 [A_y(x_0, y_0) + \partial_x A_y(x_0, y_0) dx] dy \\ &\quad - \int_3 [A_x(x_0, y_0) + \partial_y A_x(x_0, y_0) dy] dx - \int_4 A_y(x_0, y_0) dy \\ &= \int (\partial_x A_y - \partial_y A_x) dx dy = \int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{e}_z dx dy. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Das Kurvenintegral über die infinitesimal kleine, geschlossene Kurve erweist sich also identisch zur Rotation des Feldes $\vec{A}$ in Richtung der Senkrechten zur Fläche, multipliziert mit dem Flächeninhalt.

- Wir können dieses Ergebnis auf beliebige Flächen S und ihre (geschlossenen) Randkurven ∂S erweitern, indem wir Flächen in infinitesimale, benachbarte Zellen ds zerlegen und die Zirkulation um ihre Randkurven aufsummieren. Dabei fallen die Beiträge aller Wege heraus, die nicht Teile der Randkurve sind, und wir müssen berücksichtigen, dass wir jeder Zelle eine Richtung geben müssen, die auf ihr senkrecht steht und so orientiert ist, dass sie mit der Orientierung ihrer Randkurve ein Rechtssystem bildet. Das Ergebnis ist der *Stokes'sche Satz*

$$\oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{x} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{s}, \quad (4.72)$$

der besagt, dass das Flächenintegral über die Rotation eines Vektorfeldes gleich seiner Zirkulation über die Randkurve der Fläche ist. Wieder gilt die Einschränkung, dass die Fläche S ein einfach zusammenhängendes Gebiet darstellt, weil sich anderenfalls nicht alle Beiträge der Wegelemente im Inneren der Fläche herausheben.

Der Stokes'sche Satz zeigt dann, dass das Kurvenintegral eines Vektorfeldes längs eines geschlossenen Weges genau dann verschwindet, wenn das Integral über seine Rotation innerhalb der eingeschlossenen Fläche verschwindet.

- Dass die Einschränkung auf zusammenhängende Gebiete sehr wesentlich ist, zeigt das folgende Beispiel. Gegeben sei das Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{x}) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.73)$$

dessen Rotation verschwindet,

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix} = 0. \quad (4.74)$$

Das Integral über $\vec{F}$ längs der geschlossenen Kreiskurve

$$\vec{x}(\phi) = R \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \phi < 2\pi \quad (4.75)$$

beträgt aber

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_0^{2\pi} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{x}}{d\phi} d\phi = \int_0^{2\pi} (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) d\phi = 2\pi \neq 0. \quad (4.76)$$

Die Kraft ist *nicht* konservativ, denn wegen der Unstetigkeit des Kraftfeldes für $x_1 = 0 = x_2$ ist das von der Kurve eingeschlossene Gebiet nicht einfach zusammenhängend.

Kapitel 5

Bewegung im Zentralfeld

5.1 Krummlinig-orthogonale Koordinaten

5.1.1 Allgemeines

- Wir haben bisher vor allem kartesische Koordinaten verwendet. Man kann sie dadurch kennzeichnen, dass man drei raumfeste Koordinatenebenen einführt, in denen jeweils eine Koordinate konstant ist, nämlich x_1 in der x_2 - x_3 -, x_2 in der x_1 - x_3 - und x_3 in der x_1 - x_2 -Ebene. Wir haben aber auch schon gesehen, dass sie für die Beschreibung physikalischer Systeme manchmal ungeeignet sind, weil die physikalischen Größen auf Flächen konstant sind, die nicht mit den Koordinatenflächen zusammenfallen. Ein Beispiel sind kugelsymmetrische Systeme, deren physikalische Eigenschaften auf Flächen mit konstantem Radius, also Kugeln, konstant sind.
- Zur Verallgemeinerung denken wir uns im dreidimensionalen Raum drei Koordinatenflächen, die dadurch definiert sind, dass auf ihnen jeweils ein Parameter q_i konstant ist. Punkte im Raum werden dann dadurch angegeben, dass man drei Koordinatenflächen angibt, die sich in $\vec{r}$ schneiden. Die zu ihnen gehörenden Parameter (q_1, q_2, q_3) verwenden wir als Koordinaten. Die Einheitsnormalenvektoren der Koordinatenflächen werden als neue Basisvektoren $\vec{e}_i$ verwendet.
- Abstände im Raum dürfen nicht von den Koordinaten abhängen. Wegen des Satzes von Pythagoras ist der Abstand ds zweier infinitesimal benachbarter Punkte (im euklidischen Raum) durch die Summe der quadratischen Abstände dx_i^2 gegeben,

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 . \quad (5.1)$$

Die x_i müssen jetzt als Funktionen der neuen Parameter q_j aufgefasst werden, $x_i = x_i(q_1, q_2, q_3)$. Wenn die neue Koordinatenbasis

orthonormal ist, $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$, lässt sich der quadratische Abstand ds^2 in der Form

$$ds^2 = (h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2 \quad (5.2)$$

schreiben, wobei die h_i durch

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i} \right)^2 \quad (5.3)$$

gegeben sind.

- Die Abstände längs der neuen Koordinatenrichtungen sind $ds_i = h_i dq_i$. Dem entsprechend nimmt der Gradient einer Funktion $f(q_1, q_2, q_3)$ in den neuen Koordinaten die Form

$$\vec{\nabla} f = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \right) \frac{\vec{e}_i}{h_i} \quad (5.4)$$

an.

5.1.2 Zylinderkoordinaten

- Betrachten wir zunächst ein System mit Zylindersymmetrie. Wir bezeichnen die Zylinderachse willkürlich als $\vec{e}_3$. Eine zweite Schar von Koordinatenflächen erhalten wir, indem wir die x_1 - x_3 -Ebene um den Winkel ϕ um die $\vec{e}_3$ -Achse drehen. Als dritte Schar von Koordinatenflächen führen wir Flächen ein, die den Zylinder senkrecht im Abstand z von der x_1 - x_2 -Ebene schneiden. Diese drei Koordinatenflächen sind jeweils durch die Konstanz der drei Parameter $\rho = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \in [0, \infty)$, $\phi \in [0, 2\pi)$ und $z \in (-\infty, \infty)$ definiert.
- Ihre Einheitsnormalenvektoren bilden die Basis $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\phi$ und $\vec{e}_z$. Aufgrund ihrer Konstruktion hängen sie mit den kartesischen Einheitsvektoren durch

$$\vec{e}_\rho = \cos \phi \vec{e}_1 + \sin \phi \vec{e}_2, \quad \vec{e}_\phi = \cos \phi \vec{e}_2 - \sin \phi \vec{e}_1, \quad \vec{e}_z = \vec{e}_3 \quad (5.5)$$

zusammen. Wegen $x_1 = \rho \cos \phi$, $x_2 = \rho \sin \phi$ und $x_3 = z$ gilt aufgrund von (5.3)

$$h_\rho^2 = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1, \quad h_\phi^2 = \rho^2 \sin^2 \phi + \rho^2 \cos^2 \phi = \rho^2, \quad h_z^2 = 1. \quad (5.6)$$

Demnach ist der infinitesimale quadratische Abstand

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2, \quad (5.7)$$

und nach (5.4) lautet der Gradient einer Funktion $f(\rho, \phi, z)$ in Zylinderkoordinaten

$$\vec{\nabla} f = \vec{e}_\rho \partial_\rho f + \frac{\vec{e}_\phi}{\rho} \partial_\phi f + \vec{e}_z \partial_z f. \quad (5.8)$$

5.1.3 Sphärische Polarkoordinaten

- Sphärische Polarkoordinaten sind dann angemessen, wenn das betrachtete System Kugelsymmetrie hat. Entsprechend führt man zunächst Kugelflächen als eine Schar von Koordinatenflächen ein. Dann wählt man $\vec{e}_3$ als (beliebige) Polachse und führt als zweite Schar von Koordinatenflächen solche ein, die durch Drehung der x_1 - x_3 -Ebene um den Winkel ϕ um die $\vec{e}_3$ -Achse entstehen. Als dritte Schar von Koordinatenflächen wählt man Kegelflächen um die $\vec{e}_3$ -Achse mit Öffnungswinkel θ . Auf diesen drei Koordinatenflächen sind also jeweils $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \in [0, \infty)$, $\phi \in [0, 2\pi)$ und $\theta \in [0, \pi]$ konstant.
- Wegen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

sind

$$\begin{aligned} h_r^2 &= \cos^2 \phi \sin^2 \theta + \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \\ h_\phi^2 &= r^2 \sin^2 \theta (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = r^2 \sin^2 \theta, \\ h_\theta^2 &= r^2 \cos^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + r^2 \sin^2 \theta = r^2. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Aus dem infinitesimalen quadratischen Wegelement wird

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi + r^2 d\theta^2, \quad (5.11)$$

und der Gradient in sphärischen Polarkoordinaten lässt sich in der Form

$$\vec{\nabla} f = \vec{e}_r \partial_r f + \frac{\vec{e}_\phi}{r \sin \theta} \partial_\phi f + \frac{\vec{e}_\theta}{r} \partial_\theta f \quad (5.12)$$

darstellen. Für eine radialsymmetrische Funktion $f(r)$, die also nur vom Radius r abhängt, aber nicht von den Winkeln θ und ϕ , erhalten wir daraus das bekannte Ergebnis

$$\vec{\nabla} f(r) = \frac{df(r)}{dr} \vec{e}_r = f'(r) \vec{e}_r \quad (5.13)$$

auf sehr einfache Weise.

5.2 Das Keplerproblem (nicht in Vorlesung)

5.2.1 Allgemeine Behandlung der Bewegung im Zentralfeld

- Wie in (4.59) erwähnt, haben Zentralkräfte die Form

$$\vec{F}(\vec{x}) = F(r) \frac{\vec{x}}{r} = F(r) \vec{e}_r. \quad (5.14)$$

Wir legen den Ursprung des Koordinatensystems in das Kraftzentrum. In Kapitel 6 wurde gezeigt, dass Zentralkräfte immer ein Potential haben, das wir explizit konstruieren konnten (4.60).

- Unter dem Einfluss einer Zentralkraft bleibt der Drehimpuls erhalten, denn das Drehmoment

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{x} \times \vec{F} = 0 \quad (5.15)$$

verschwindet wegen der radialen Orientierung der Kraft, $\vec{F} \parallel \vec{x}$. Außerdem ist

$$\vec{x} \cdot \vec{L} = \vec{x} \cdot (\vec{x} \times \vec{p}) = \vec{p} \cdot (\vec{x} \times \vec{x}) = 0, \quad (5.16)$$

d.h. die Bewegung verläuft vollständig in einer Ebene senkrecht zu $\vec{L}$, der *Bahnebene*. Wir wählen als Bahnebene die x_1 - x_2 -Ebene, dann sind $L_3 = |\vec{L}|$ und $\vec{L} = L_3 \vec{e}_3$.

- Im infinitesimalen Zeitintervall dt überstreicht der Ortsvektor $\vec{x}$ das Flächenelement

$$d\vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{x} \times (\dot{\vec{x}} dt)] , \quad (5.17)$$

also ist

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\vec{L}}{2m} = \text{const.} . \quad (5.18)$$

Demnach besagt der Drehimpulssatz im Zentralfeld, dass die Flächengeschwindigkeit konstant ist, d.h. dass der *Fahrstrahl* in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreicht. Das ist bereits das 2. Keplersche Gesetz.

- Entsprechend der Symmetrie des Systems führen wir nun *Zylinderkoordinaten* ein, mit denen Polarkoordinaten in der Bahnebene verbunden sind,

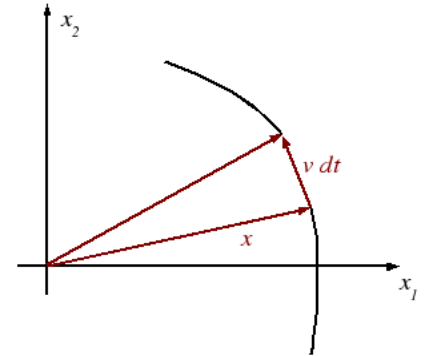
$$\vec{x}(t) = r \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\vec{x}}(t) = \dot{r} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + r\dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

- Der Betrag des Drehimpulses ist dann durch

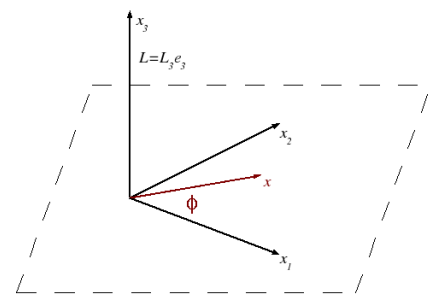
$$\frac{L_3}{m} = r \cos \varphi (\dot{r} \sin \varphi + r\dot{\varphi} \cos \varphi) - r \sin \varphi (\dot{r} \cos \varphi - r\dot{\varphi} \sin \varphi) = r^2 \dot{\varphi} \quad (5.20)$$

gegeben, also ist

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mr^2 \dot{\varphi} \end{pmatrix} = mr^2 \dot{\varphi} \vec{e}_3. \quad (5.21)$$



zum Flächensatz



Polarkoordinaten in der Bahnebene

- Wegen

$$\dot{\vec{x}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \quad (5.22)$$

lautet der *Energiesatz*

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) = \text{const.} \quad (5.23)$$

Mithilfe des Drehimpulssatzes können wir $\dot{\varphi}$ eliminieren,

$$\dot{\varphi} = \frac{L_3}{mr^2}, \quad (5.24)$$

wobei L_3 konstant ist, und damit folgt

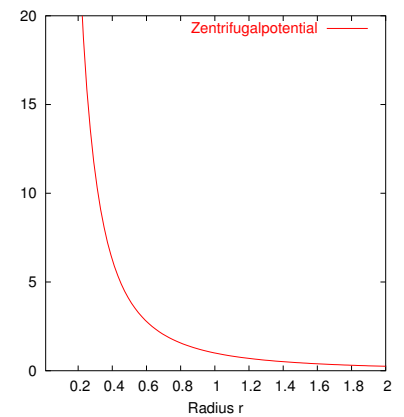
$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \left[\frac{L_3^2}{2mr^2} + V(r) \right]. \quad (5.25)$$

- Der Ausdruck in eckigen Klammern hängt nur von r ab. Er heißt *effektives Potential*

$$U_L(r) = V(r) + \frac{L_3^2}{2mr^2}. \quad (5.26)$$

Der Beitrag des Drehimpulses heißt *Zentrifugalpotential*. Es ist offenbar abstoßend, denn

$$\frac{d}{dr} \frac{L_3^2}{2mr^2} = -\frac{L_3^2}{mr^3} \leq 0. \quad (5.27)$$



- Die Bewegung im effektiven Potential sieht aus wie eine eindimensionale Bewegung. Sie hat also die implizite Lösung (3.40)

$$t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U_L(r')]}}, \quad (5.28)$$

Daraus erhält man $r(t)$ durch Umkehrung, und schließlich $\varphi(t)$ aus dem Drehimpulssatz, $\dot{\varphi} = L_3/(2mr^2)$,

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{L_3}{m} \int_{t_0}^t \frac{dt'}{r^2(t')}. \quad (5.29)$$

- Die Bahnkurve, also $r(\varphi)$, folgt leicht aus

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}, \quad (5.30)$$

also

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\sqrt{2/m[E - U_L(r)]}}{L_3/(mr^2)}, \quad (5.31)$$

woraus man

$$\varphi - \varphi_0 = L_3 \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2m[E - U_L(r')]}}, \quad (5.32)$$

erhält.

Zentrifugalpotential

- Wir brauchen zur vollständigen Angabe der Lösung sechs Integrationskonstanten (je drei Anfangsbedingungen für Ort und Geschwindigkeit), wofür wir $\vec{L}$, E , φ_0 und r_0 wählen können.
- Finite Bahnen sind geschlossen, wenn sich $\varphi - \varphi_0$ bei jedem Umlauf um einen rationalen Bruchteil von 2π ändert, denn dann kehrt der Massenpunkt nach einer ganzen Zahl von Umläufen wieder in den Ausgangspunkt zurück. Im Allgemeinen sind finite Bahnen *nicht* geschlossen, außer in Potentialen $V(r) \propto r^{-1}$ oder $V(r) \propto r^2$.
- Die Bahnen sind symmetrisch zwischen den Umkehrpunkten $r_{\min}$ und $r_{\max}$, an denen die radiale Geschwindigkeit $\dot{r} = 0$ wird.



Tycho Brahe

5.2.2 Arten der Bewegung

- Zur Behandlung des Keplerproblems nehmen wir an, dass die Sonne ortsfest sei, d.h. die Planeten laufen um eine unbewegte Zentralmasse (Bemerkungen dazu; geschichtliche Anmerkungen zu Brahe, Kepler, Newton, Leverrier, Adams).
- Wir schreiben die *Gravitationskraft* in der Form

$$\vec{F}_G = -\frac{\alpha}{r^2} \frac{\vec{x}}{r}, \quad \alpha := GMm, \quad (5.33)$$

wobei M die Masse der Sonne und $m \ll M$ die Masse eines umlaufenden Körpers sei.

- Das *Gravitationspotential* ist

$$V(r) = \int \frac{\alpha}{r^2} dr = -\frac{\alpha}{r} + \text{const.} \quad (5.34)$$

Die Konstante wird so gewählt, dass $V(r) \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$. Das effektive Potential (mit Zentrifugalpotential) ist also

$$U_L(r) = \frac{L_3^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}. \quad (5.35)$$

- Bemerkungen über finite und infinite Bewegungen, siehe Abbildung
- Die Umkehrpunkte $r_{\min}$ und $r_{\max}$ einer finiten Bewegung sind durch den Energiesatz bestimmt:

$$\frac{m}{2} \dot{r}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad U_L(r_{\min, \max}) = E. \quad (5.36)$$

Daraus erhält man

$$r_{\min, \max} = \frac{1}{2E} \left[-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4E \frac{L_3^2}{2m}} \right] \quad (5.37)$$

($E < 0$ für gebundene Bahnen!).



Johannes Kepler

- Das Minimum der potentiellen Energie wird erreicht bei der *Perihelentfernung* (d.h. im sonnennächsten Punkt)

$$r_{\min} = \frac{1}{2E} \left[-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4E \frac{L_3^2}{2m}} \right]. \quad (5.38)$$

Dort muss der umlaufende Körper sich am schnellsten bewegen.

5.2.3 Form der Bahnen

- Aus der allgemeinen Formel (5.32) folgt

$$\varphi - \varphi_0 = L_3 \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{2m \left(E + \frac{\alpha}{r'} - \frac{L_3^2}{2mr'^2} \right)}}. \quad (5.39)$$

Die Variablentransformation $u = 1/r$, $du = -dr/r^2 = -u^2 dr$ führt auf

$$\varphi - \varphi_0 = - \int_{u_0}^u \frac{du'}{\sqrt{\left(\frac{2mE}{L_3^2} + \frac{2m\alpha}{L_3^2} u' - u'^2 \right)}}. \quad (5.40)$$

Der Ausdruck unter der Wurzel lässt sich in einen konstanten und einen u -abhängigen Term umformen,

$$\left[\frac{2mE}{L_3^2} + \left(\frac{\alpha m}{L_3^2} \right)^2 \right] - \left[\left(u' - \frac{\alpha m}{L_3^2} \right)^2 \right], \quad (5.41)$$

und damit kann das Integral ausgeführt werden,

$$\varphi - \varphi'_0 = - \arcsin \frac{u - \frac{\alpha m}{L_3^2}}{\sqrt{\left(\frac{\alpha m}{L_3^2} \right)^2 + \frac{2mE}{L_3^2}}}. \quad (5.42)$$

φ'_0 enthält φ_0 und die Konstante der letzten Integration.

- Mit den Definitionen der Konstanten *Exzentrizität* ε und *Bahnparameter* p ,

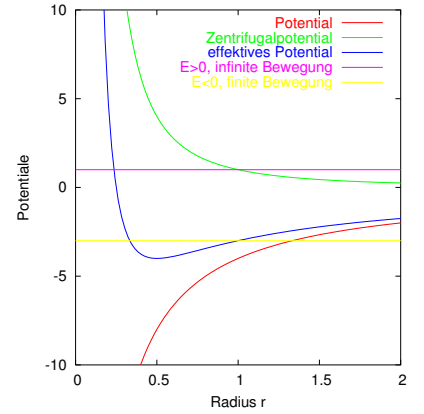
$$\varepsilon := \left[1 + \frac{2L_3^2 E}{\alpha^2 m} \right]^{1/2}, \quad p := \frac{L_3^2}{\alpha m} \quad (5.43)$$

ergibt sich

$$\varphi - \varphi'_0 = - \arcsin \left(\frac{pu - 1}{\varepsilon} \right) \quad (5.44)$$

und, aufgelöst nach r , die Bahnkurve

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \sin(\varphi - \varphi'_0)}. \quad (5.45)$$



Potentiale im Gravitationsfeld; finite und infinite Bewegungen

Wegen $\sin(\varphi - \varphi'_0) = \sin \varphi \cos \varphi'_0 - \cos \varphi \sin \varphi'_0$ ist $\sin(\varphi - \varphi'_0) = -\cos \varphi$ für $\varphi'_0 = \pi/2$, und dann ist

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} . \quad (5.46)$$

Das ist die allgemeine Form der Bahnkurve im Keplerproblem. Das Perihel liegt bei $\varphi = 0$, denn dann ist $r(\varphi)$ minimal.

5.2.4 Kreis- und Ellipsenbahnen

- Für $\varepsilon = 0$ ist

$$E = -\frac{\alpha^2 m}{2L_3^2} = -\frac{\alpha}{2p} . \quad (5.47)$$

Da p per Definition konstant ist, ist nach (5.46) $r = p = \text{konst.}$, d.h. der Körper bewegt sich auf einer Kreisbahn.

- Für $\varepsilon < 1$ muss $E < 0$ sein. Damit verläuft die Bahn vollständig im Endlichen, denn $1 + \varepsilon \cos \varphi > 0$ für alle φ .
- Die Bahn ist dann eine Ellipse: Nach Definition der Ellipse gilt $r + r' = 2a$, wobei a die große Halbachse ist. Die kleine Halbachse ist $b = \sqrt{a^2 - f^2}$, wenn f der Abstand zwischen Brennpunkt und Mittelpunkt der Ellipse ist. Die *numerische Exzentrizität* der Ellipse ist definiert als

$$\varepsilon := \frac{f}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} . \quad (5.48)$$

- Für den Vektor $\vec{r}'$ gilt

$$\vec{r}' = -\vec{r} - 2f\vec{e}_1 . \quad (5.49)$$

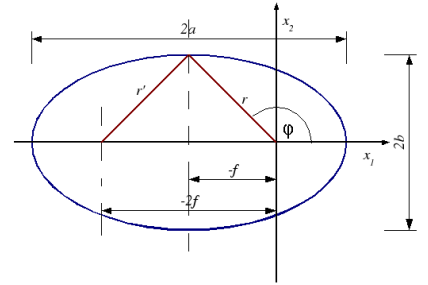
Sein Betragsquadrat ist also

$$r'^2 = r^2 + 4f^2 + 4fr \cos \varphi . \quad (5.50)$$

Nach Definition der Ellipse ist außerdem

$$\begin{aligned} r'^2 &= (2a - r)^2 = 4a^2 + r^2 - 4ar \\ \Rightarrow 4r(f \cos \varphi + a) &= 4(a^2 - f^2) \\ \Rightarrow r &= \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \end{aligned} \quad (5.51)$$

mit $f = \varepsilon a$. Das ist identisch mit der Gleichung für die Bahnkurve, falls $p = a(1 - \varepsilon^2)$ gesetzt wird; damit folgt das 1. Keplersche Gesetz: Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.



Zur Definition der Ellipse: eine Ellipse ist die Menge aller Punkte einer Ebene, deren Abstandssumme zu zwei vorgegebenen Punkten, den Brennpunkten, konstant $= 2a$ ist.

- Die Energie ist

$$E = -\frac{\alpha^2 m}{2L_3^2}(1 - \varepsilon^2). \quad (5.52)$$

Wegen der Definition von p folgt

$$(1 - \varepsilon^2) = \frac{p}{a} = \frac{L_3^2}{\alpha m a} \Rightarrow E = -\frac{\alpha}{2a}. \quad (5.53)$$

Die Energie hängt offenbar nur von der großen Bahnhalbachse a ab, während ε durch den Drehimpuls bestimmt wird.

- Aus dem Flächensatz

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L_3}{2m} = \text{konst.} \quad (5.54)$$

folgt

$$A = \text{Fläche der Ellipse} = \frac{L_3}{2m} \tau, \quad (5.55)$$

wobei τ die Umlaufzeit ist.

- Andererseits ist die Fläche einer Ellipse $A = \pi ab$. Wegen

$$b = a \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \sqrt{ap} = \sqrt{\frac{L_3^2 a}{\alpha m}} \quad (5.56)$$

folgt insgesamt

$$A = \pi L_3 \sqrt{\frac{a^3}{\alpha m}} = \frac{L_3}{2m} \tau \Rightarrow \tau^2 = \frac{4\pi^2 m a^3}{\alpha}. \quad (5.57)$$

Das ist das 3. Keplersche Gesetz: Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer großen Bahnhalbachsen.

5.2.5 Parabel- und Hyperbelbahnen

- Für $\varepsilon = 1$ ist $E = 0$, d.h.

$$r = \frac{p}{1 + \cos \varphi} \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad \varphi \rightarrow \pm \pi. \quad (5.58)$$

Die Bahn ist eine Parabel, denn nach Definition der Parabel ist

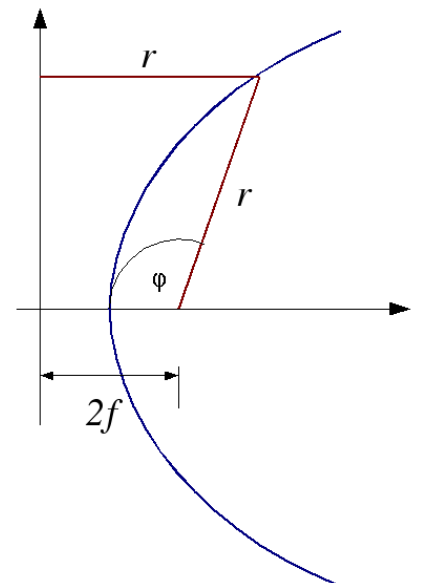
$$r = 2f - r \cos \varphi, \quad \text{also} \quad r = \frac{2f}{1 + \cos \varphi}. \quad (5.59)$$

Der umlaufende Körper entweicht damit ins Unendliche.

- Für $\varepsilon > 1$ ist $E > 0$, d.h. $r \rightarrow \infty$ für $1 + \varepsilon \cos \varphi \rightarrow 0$. Das ist der Fall für

$$\bar{\varphi} = \arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) > \frac{\pi}{2}. \quad (5.60)$$

Wegen $r \geq 0$ muss $1 + \varepsilon \cos \varphi \geq 0$ sein, wodurch $|\varphi| \leq \bar{\varphi}$ eingeschränkt wird. Die Bahnkurve ist ein Hyperbelast.



Zur Definition der Parabel: Eine Parabel ist die Menge aller Punkte einer Ebene, deren Abstand von einer Linie (der Leitlinie) und einem Punkt (dem Brennpunkt) gleich ist.

5.2.6 Der Laplace-Lenz-Runge-Vektor

- Folgender Vektor heißt Laplace-Lenz-Runge-Vektor:

$$\vec{Q} = \frac{1}{\alpha}(\dot{\vec{x}} \times \vec{L}) - \frac{\vec{x}}{r}. \quad (5.61)$$

Seine Zeitableitung verschwindet,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{Q}}{dt} &= \frac{1}{\alpha}(\ddot{\vec{x}} \times \vec{L} + \dot{\vec{x}} \times \dot{\vec{L}}) - \frac{\dot{\vec{x}}}{r} + \frac{\vec{x}}{r^2} \dot{r} \\ &= -\frac{1}{m} \left(\frac{1}{r^3} \vec{x} \times \vec{L} \right) - \frac{\dot{\vec{x}}}{r} + \frac{\vec{x}}{2r^3} \frac{dr^2}{dt} \\ &= \frac{1}{mr^3} [(\vec{x} \times \vec{p}) \times \vec{x}] - \frac{\dot{\vec{x}}}{r} + \frac{\vec{x}}{2r^3} \frac{d(\vec{x})^2}{dt} \\ &= \frac{1}{r^3} [\dot{\vec{x}} \cdot \vec{x}^2 - \vec{x}(\vec{x} \cdot \dot{\vec{x}})] - \frac{\dot{\vec{x}}}{r} + \frac{\vec{x}(\vec{x} \cdot \dot{\vec{x}})}{r^3} = 0, \quad (5.62) \end{aligned}$$

wobei im ersten Schritt $\dot{\vec{L}} = 0$ und $\ddot{\vec{x}} = -\alpha\vec{x}/r^2$ (Gravitationsgesetz) verwendet wurden.

- Also ist auch $\vec{Q}$ eine Invariante der Bewegung. Außerdem ist offenbar $\vec{L} \cdot \vec{Q} = 0$, d.h. $\vec{Q}$ liegt in der Bahnebene. Nun ist

$$\vec{x} \cdot \vec{Q} = \frac{1}{\alpha} [\vec{x} \cdot (\dot{\vec{x}} \times \vec{L})] - r = \frac{L^2}{\alpha m} - r = rQ \cos \varphi, \quad (5.63)$$

und daraus ergibt sich

$$r = \frac{L_3^2/(\alpha m)}{1 + Q \cos \varphi} = \frac{p}{1 + Q \cos \varphi}, \quad (5.64)$$

d.h. der Betrag von $\vec{Q}$ ist die numerische Exzentrizität, und $\vec{Q}$ zeigt zum Perihel. Die Konstanz von $\vec{Q}$ besagt also, dass die numerische Exzentrizität unverändert bleibt, ebenso wie die Lage des Perihels.

Kapitel 6

Stöße und Streuung

6.1 Systeme von Massenpunkten

Bevor wir miteinander wechselwirkende Teilchen mit Hilfe von Streuprozessen betrachten, müssen wir zunächst die bekannten Erhaltungssätze für eine allgemeine Anzahl von Teilchen formulieren.

6.1.1 Bewegung des Schwerpunkts

- Gegeben seien N Massenpunkte mit den Massen m_i an den Ortsvektoren $\vec{x}_i$, $1 \leq i \leq N$. Die Kraft des i -ten Massenpunkts auf den j -ten sei $\vec{F}_{ij}$, und zusätzlich wirke auf den i -ten Massenpunkt die äußere Kraft $\vec{F}_i^{(e)}$. Die Bewegungsgleichungen für das Teilchen i lauten

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{(e)}. \quad (6.1)$$

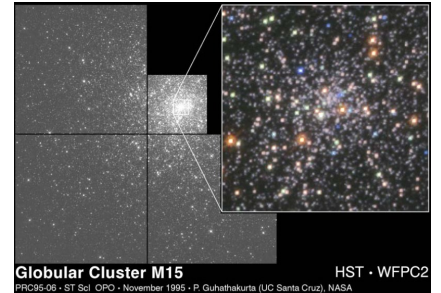
Mithilfe der Gesamtmasse $M = \sum_i m_i$ definieren wir die *Schwerpunktcoordinate*

$$M \vec{X} = \sum_i m_i \vec{x}_i. \quad (6.2)$$

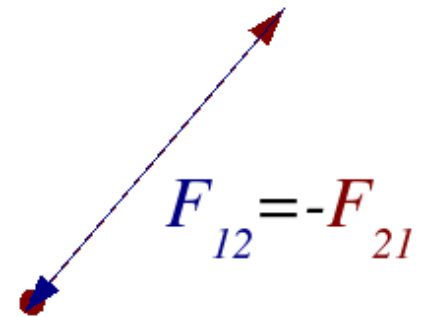
- Summiert man die Bewegungsgleichungen für alle Teilchen, so erhält man wegen des dritten Newtonschen Axioms $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$

$$\begin{aligned} M \ddot{\vec{X}} &= \sum_i m_i \ddot{\vec{x}}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} + \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \\ &= \sum_{j > i} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) + \sum_i \vec{F}_i^{(e)} = \sum_i \vec{F}_i^{(e)}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Die inneren Kräfte können zur Dynamik des gesamten Systems nichts beitragen, da sie sich paarweise aufheben. Das Gesamtsystem bewegt sich also so, als wäre seine gesamte Masse in seinem



Beispiel für ein System von Massenpunkten: der Kugelsternhaufen M15



Kräfte zwischen zwei Teilchen heben sich paarweise auf.

Schwerpunkt vereinigt und bewege sich aufgrund der Resultierenden aller äußeren Kräfte,

- Wenn keine äußeren Kräfte wirken, ist der Gesamtimpuls erhalten,

$$M\dot{\vec{X}} = \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i = \sum_i \vec{p}_i =: \vec{P} = \text{konstant} . \quad (6.4)$$

- Wenn wir neue Koordinaten $\vec{x}_i^* = \vec{x}_i - \vec{X}$ relativ zum Schwerpunkt einführen, dann finden wir

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \vec{x}_i^* &= \sum_i m_i \vec{x}_i - M\vec{X} = \vec{0} \\ \sum_i \vec{p}_i^* &= \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i^* = \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i - M\dot{\vec{X}} = \vec{0} . \end{aligned} \quad (6.5)$$

6.1.2 Drehimpuls

- Wir nehmen nun an, dass die inneren Kräfte zwischen zwei Massenpunkten längs der Verbindungslinie zwischen diesen Punkten wirken,

$$\vec{F}_{ij} \parallel (\vec{x}_i - \vec{x}_j) , \quad \vec{F}_{ij} \times (\vec{x}_i - \vec{x}_j) = 0 . \quad (6.6)$$

Der und der Gesamtdrehimpuls des Systems von Massenpunkten bezüglich des Koordinatenursprungs ist

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i (\vec{x}_i \times \vec{p}_i) . \quad (6.7)$$

Er hat die Zeitableitung oder das Gesamtdrehmoment

$$\begin{aligned} \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_i (\vec{x}_i \times \dot{\vec{p}}_i) = \sum_i \left(\vec{x}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \right) + \sum_i \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{(e)} \\ &= \sum_{j>i} (\vec{x}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{x}_j \times \vec{F}_{ij}) + \sum_i \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{(e)} \\ &= \sum_{j>i} [(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \times \vec{F}_{ji}] + \sum_i \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{(e)} \\ &= \sum_i \vec{x}_i \times \vec{F}_i^{(e)} . \end{aligned} \quad (6.8)$$

Innere Kräfte tragen also zum Gesamtdrehimpuls eines Systems von Massenpunkten *nicht* bei.

- Der Gesamtdrehimpuls im Schwerpunktsystem hat die Form

$$\begin{aligned}
 \vec{L} &= \sum_i m_i (\vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i) = \sum_i m_i (\vec{X} + \vec{x}_i^*) \times (\dot{\vec{X}} + \dot{\vec{x}}_i^*) \\
 &= \vec{X} \times M \dot{\vec{X}} + \left(\vec{X} \times \sum_i \vec{p}_i^* \right) + \left(\sum_i m_i \vec{x}_i^* \times \dot{\vec{X}} \right) + \sum_i (\vec{x}_i^* \times \vec{p}_i^*) \\
 &= \vec{X} \times M \dot{\vec{X}} + \sum_i (\vec{x}_i^* \times \vec{p}_i^*) .
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Der erste Term ist der Drehimpuls der Bewegung des Schwerpunkts um den Ursprung, der letzte ist der gesamte innere Drehimpuls.

6.1.3 Energie

- Wir nehmen nun zusätzlich an, dass die Kräfte zwischen den Massenpunkten Potentialkräfte seien

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{\nabla}_i V_{ji}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) . \tag{6.10}$$

wobei ∇_i die Ableitung nach der Koordinate x_i ist. Offenbar erfüllen die Potentiale $V_{ij} = V_{ji}$. Ebenso sollen die äußeren Kräfte Potentialkräfte sein,

$$\vec{F}_i^{(e)} = -\vec{\nabla}_i V_i^{(e)}(\vec{x}_i) . \tag{6.11}$$

- Die Bewegungsgleichungen nach (6.1) können wieder mit dem integrierenden Faktor $\dot{\vec{x}}_i$ multipliziert werden,

$$\begin{aligned}
 m_i \ddot{\vec{x}}_i &= - \sum_{j \neq i} \vec{\nabla}_i V_{ji}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) - \sum_i \vec{\nabla}_i V_i^{(e)}(\vec{x}_i) \\
 \sum_i m_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \ddot{\vec{x}}_i &= - \sum_{j \neq i} \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{\nabla}_i V_{ji}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) - \sum_i \dot{\vec{x}}_i \cdot \vec{\nabla}_i V_i^{(e)}(\vec{x}_i) .
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Dies kann offenbar als Zeitableitung geschrieben werden,

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{x}}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} V_{ji}(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|) + \sum_i V_i^{(e)}(\vec{x}_i) \right] = 0 , \tag{6.13}$$

wobei der Faktor $1/2$ vor dem zweiten Term in eckigen Klammern daher kommt, dass $V_{ij} = V_{ji}$ ist. Er sorgt dafür, dass die potentielle Energie des Teilchens i bezüglich des Teilchens j nur einmal gezählt wird, weil sie identisch mit der potentiellen Energie des Teilchens j bezüglich des Teilchens i ist. Das ist der Energiesatz eines Systems von N Massenpunkten.

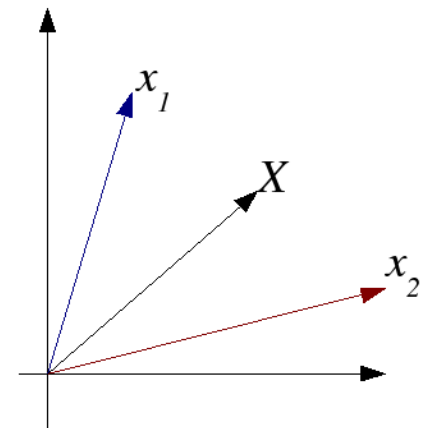
6.1.4 Reduzierte Masse

- Für Systeme mit zwei Teilchen führen wir den Verbindungsvektor $\vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ ein. Ausgedrückt durch ihn lautet die Differenz der beiden Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}
 m_1 m_2 \ddot{\vec{r}} &= m_2 m_1 \ddot{\vec{x}}_1 - m_1 m_2 \ddot{\vec{x}}_2 \\
 &= -m_2 \vec{\nabla}_1 V(|\vec{r}|) + m_1 \vec{\nabla}_2 V(|\vec{r}|) \\
 &= -m_2 \frac{dV(|\vec{r}|)}{d|\vec{r}|} \vec{\nabla}_1 |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| + m_1 \frac{dV(|\vec{r}|)}{d|\vec{r}|} \vec{\nabla}_2 |\vec{x}_2 - \vec{x}_1| \\
 &= -m_2 \frac{dV(|\vec{r}|)}{d|\vec{r}|} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} - m_1 \frac{dV(|\vec{r}|)}{d|\vec{r}|} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \\
 &= -(m_1 + m_2) \frac{dV(|\vec{r}|)}{d|\vec{r}|} \vec{\nabla}_r |\vec{r}|, \tag{6.14}
 \end{aligned}$$

Das ist die Bewegungsgleichung eines Massenpunkts mit der reduzierten Masse μ in einem äußeren Potential V ,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \mu \ddot{\vec{r}} = -\vec{\nabla}_r V(|\vec{r}|). \tag{6.15}$$



Schwerpunkt zweier Massenpunkte gleicher Masse

- Bei $m_1 = m_2 =: m$ ist die reduzierte Masse $\mu = m/2$, und der Schwerpunkt liegt in der Mitte zwischen den beiden Massen. Bei $m_1 \gg m_2$ ist die reduzierte Masse $\mu \approx m_2$. Das entspricht der Bewegung von m_2 um den „festen“ Massenpunkt m_1 . Der Schwerpunkt liegt annähernd am Ort von m_1 , $\vec{X} \approx \vec{x}_1$, was die nachträgliche Rechtfertigung dafür liefert, die Bewegung eines Planeten um die Sonne durch die Bewegung eines Massenpunktes um die ortsfeste Sonne anzunähern.

6.2 Stöße und Streuung

6.2.1 Elastischer Stoß zwischen zwei Teilchen

- Elastisch* heißt ein Stoß zwischen zwei Teilchen, wenn in seinem Verlauf keine mechanische Energie in andere Energieformen (z.B. durch Verformung) umgewandelt wird. Wir können also bei der Beschreibung eines elastischen Stoßes von den Erhaltungssätzen des Impulses und der Energie Gebrauch machen.
- Gegeben seien wieder zwei Teilchen mit den Massen m_1 und m_2 . Ihre Geschwindigkeiten vor dem Stoß seien $\vec{v}_{1,2}$, und nach dem Stoß $\vec{v}'_{1,2}$. Die Impulserhaltung fordert

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2, \tag{6.16}$$

während die Energieerhaltung

$$\frac{m_1}{2} \vec{v}_1^2 + \frac{m_2}{2} \vec{v}_2^2 = \frac{m_1}{2} \vec{v}_1^{*2} + \frac{m_2}{2} \vec{v}_2^{*2} \quad (6.17)$$

verlangt. Welche Aussagen sind allein aufgrund der Erhaltungssätze möglich?

- Im Schwerpunktsystem lauten der Impulssatz

$$m_1 \vec{v}_1^* = -m_2 \vec{v}_2^*, \quad m_1 \vec{v}_1^{*'} = -m_2 \vec{v}_2^{*'} \quad (6.18)$$

und der Energiesatz

$$\frac{m_1}{2} \vec{v}_1^{*2} + \frac{m_2}{2} \vec{v}_2^{*2} = \frac{m_1}{2} \vec{v}_1^{*'}^2 + \frac{m_2}{2} \vec{v}_2^{*'}^2 \quad (6.19)$$

Der Winkel zwischen der Einfalls- und der Ausfallsrichtung heißt Streuwinkel ϑ^* . Man kann ihn als Teil von Zylinderkoordinaten definieren und dabei annehmen dass der Azimuthalwinkel ϕ durch die Rotationssymmetrie keine Rolle spielt. Im Schwerpunktsystem ist der Streuwinkel für beide Teilchen gleich.

- Setzt man (6.18) in den Energiesatz (6.19) ein, um $\vec{v}_2^*$ bzw. $\vec{v}_2^{*'}$ zu eliminieren, folgt

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_1^{*2} + m_2 \left(\frac{m_1}{m_2} \vec{v}_1^* \right)^2 &= m_1 \vec{v}_1^{*'}^2 + m_2 \left(\frac{m_1}{m_2} \vec{v}_1^{*'} \right)^2 \\ \Rightarrow |\vec{v}_1^*| &= |\vec{v}_1^{*'}| \Rightarrow |\vec{v}_2^*| = |\vec{v}_2^{*'}|. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Die Beträge der Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß sind also für beide Massenpunkte gleich! Damit sind die Erhaltungssätze erschöpft, sie machen also insbesondere über den Streuwinkel keine Aussage. Er hängt vom wirksamen Kraftgesetz ab (z.B. bei der Coulombstreuung). Wir wissen bisher nur, dass $0 \leq \vartheta^* \leq \pi$ ist.

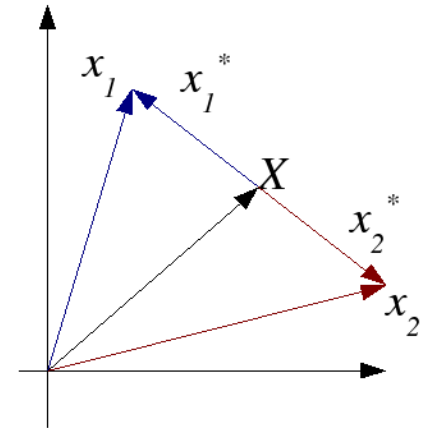
6.2.2 Transformation der Streuwinkel

- Wenn der Massenpunkt 2 anfänglich im Laborsystem ruht, $\vec{v}_2 = 0$, dann ist $M\vec{X} = m_1 \vec{v}_1$ und daher im Schwerpunktsystem

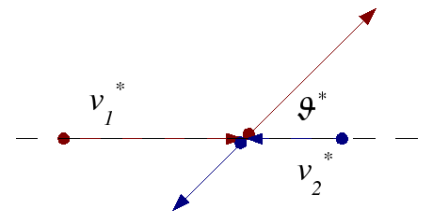
$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1^* + \vec{X} = \vec{v}_1^* + \frac{m_1}{M} \vec{v}_1 \Leftrightarrow \vec{v}_1^* = \frac{M - m_1}{M} \vec{v}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{v}_1 \quad (6.21)$$

Nun ist offenbar bei einer Bewegung des Schwerpunkts in Richtung von $\vec{v}_1$

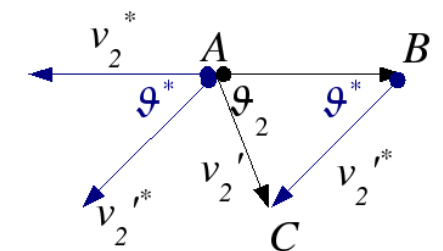
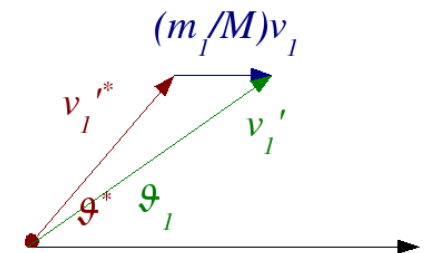
$$\begin{aligned} v_1' \sin \vartheta_1 &= v_1^{*'} \sin \vartheta^* \\ v_1' \cos \vartheta_1 &= v_1^{*'} \cos \vartheta^* + \frac{m_1}{M} v_1, \end{aligned} \quad (6.22)$$



Transformation auf Schwerpunktkoordinaten



Streuung im Schwerpunktsystem



zur Transformation des Streuwinkels

und daraus folgt für den Streuwinkels ϑ_1 im Laborsystem

$$\tan \vartheta_1 = \frac{v_1^* \sin \vartheta^*}{v_1^* \cos \vartheta^* + (m_1/M)v_1} = \frac{\sin \vartheta^*}{\cos \vartheta^* + (m_1/m_2)}, \quad (6.23)$$

denn $v_1 = (M/m_2)v_1^*$ nach (6.21).

- Betrachten wir nun die Bewegung des zweiten Massepunktes. Wegen $\vec{v}_2 = 0$ ist

$$\vec{v}_2^* = -\dot{\vec{X}} = -\frac{m_1}{M}\vec{v}_1. \quad (6.24)$$

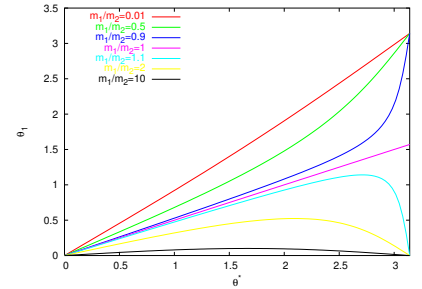
Da außerdem noch $|\vec{v}_2^*| = |\vec{v}_2|$ ist, muss das Dreieck, das aus $\dot{\vec{X}}$, $\vec{v}_2^*$ und $\vec{v}_2$ gebildet wird (Dreieck ABC in der Skizze am Rand), gleichschenkelig sein. Die Winkel BAC und ACB sind daher gleich ϑ_2 , und weil der Winkel ABC gleich ϑ^* ist, folgt

$$\vartheta_2 = \frac{\pi - \vartheta^*}{2}. \quad (6.25)$$

- Für $m_1 \ll m_2$ ist $\vartheta_1 \approx \vartheta^*$. Für $m_1 < m_2$ sind alle Streuwinkel $0 \leq \vartheta_1 \leq \pi$ möglich, während es für $m_1 \geq m_2$ einen maximalen Streuwinkel mit

$$\sin \vartheta_1^{\max} = \frac{m_2}{m_1} \quad (6.26)$$

gibt. Schließlich sind für $m_1 = m_2$ auch $\vartheta_1 = \vartheta^*/2$ und $\vartheta_2 = \pi/2 - \vartheta_1$.



Streuwinkel ϑ_1 im Laborsystem als Funktion des Streuwinkels ϑ^* im Schwerpunktsystem für verschiedene Massenverhältnisse

6.2.3 Energieübertrag bei elastischer Streuung

- Betrachten wir als Beispiel ein Neutron der Masse m , das an einem Kern der Masse Am streut. Wie in der vorigen Betrachtung nehmen wir den Kern im Laborsystem als im Ursprung ruhend an ($\vec{v}_2 = 0$).
- Nach (6.21) ist

$$\begin{aligned} \vec{v}_1'^2 &= \left(\vec{v}_1^* + \dot{\vec{X}} \right)^2 = \left(\vec{v}_1^* + \frac{m}{m + Am} \vec{v}_1 \right)^2 \\ &= \vec{v}_1^{*2} + \frac{2}{1 + A} |\vec{v}_1^*| |\vec{v}_1| \cos \vartheta^* + \frac{\vec{v}_1^2}{(1 + A)^2}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Ferner gilt wegen der Energieerhaltung (6.20)

$$\vec{v}_1'^2 = \vec{v}_1^{*2} = \left(\vec{v}_1 - \dot{\vec{X}} \right)^2 = \left(\vec{v}_1 - \frac{\vec{v}_1}{1 + A} \right)^2 = \vec{v}_1^2 \left(\frac{A}{1 + A} \right)^2. \quad (6.28)$$

Eingesetzt in (6.27) bedeutet dies

$$\begin{aligned} \vec{v}_1'^2 &= \vec{v}_1^2 \frac{A^2}{(1 + A)^2} + \frac{2}{1 + A} \frac{A}{1 + A} \vec{v}_1^2 \cos \vartheta^* + \frac{\vec{v}_1^2}{(1 + A)^2} \\ &= \vec{v}_1^2 \left[1 + \frac{2A}{(1 + A)^2} (\cos \vartheta^* - 1) \right]. \end{aligned} \quad (6.29)$$

- Für die *relative* Änderung der kinetischen Energie ergibt sich damit

$$\frac{T - T'}{T} = 1 - \frac{\vec{v}_1'^2}{\vec{v}_1^2} = \frac{2A}{(1 + A)^2} (1 - \cos \vartheta^*) . \quad (6.30)$$

Eine Mittelung über ϑ^* ergibt unter der Annahme, dass die Streuwinkel im Schwerpunktsystem gleichverteilt sind

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{T - T'}{T} \right\rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{2A}{(1 + A)^2} (1 - \cos \vartheta^*) \sin \vartheta^* d\vartheta^* \\ &= \frac{A}{(1 + A)^2} \int_{-1}^1 (1 - \mu) d\mu = \frac{2A}{(1 + A)^2} ; \end{aligned} \quad (6.31)$$

das ist der mittlere, relative Energieverlust des Neutrons. Er wird maximal, wenn $A = 1$ gilt, d.h. die Streuung von Neutronen an Atomkernen bremst die Neutronen dann am effektivsten ab, wenn die Atomkerne möglichst leicht sind. Ein Beispiel dafür ist die Neutronenmoderation in Kernreaktoren z.B. mit Wasser.

6.3 Streuung (nicht in Vorlesung)

6.3.1 Streuwinkel

- Ein Strahl aus Teilchen der Masse m falle auf ein Target, wodurch die Teilchen abgelenkt (gestreut) werden. Wir stellen uns die Frage, wie die gestreuten Teilchen verteilt sind, wenn die Wechselwirkung durch die Kraft $\vec{F} = -\alpha/r^2$ beschrieben werden kann.
- Energie und Drehimpuls sind beide konstant,

$$E = \frac{m}{2} v_\infty^2 , \quad L_3 = b m v_\infty , \quad (6.32)$$

die Energie ist positiv, die Bahn also eine Hyperbel und wir nehmen weiter an, dass das Target in Ruhe bleibt.

- Aus der Behandlung des Keplerproblems (5.60) wissen wir, dass die Asymptote an einen Hyperbelast mit der Symmetrieachse den Winkel

$$\bar{\varphi} = \arccos\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) . \quad (6.33)$$

einschließt. Damit ist der Streuwinkel $\vartheta = 2\bar{\varphi} - \pi$, also

$$\sin \frac{\vartheta}{2} = \sin\left(\bar{\varphi} - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \bar{\varphi} = \frac{1}{\varepsilon} . \quad (6.34)$$

- Die numerische Exzentrizität war (5.43, Seite 58)

$$\varepsilon = \left[1 + \frac{2L_3^2 E}{\alpha^2 m} \right]^{1/2} \quad (6.35)$$

für eine Zentralkraft der Form $F(r) = -\alpha/r^2$. Mit (6.32) folgt daraus

$$\varepsilon = \left[1 + \frac{(bmv_\infty^2)^2}{\alpha^2} \right]^{1/2}, \quad (6.36)$$

und mit (6.34) erhalten wir den Zusammenhang

$$b^2 = \left(\frac{1}{\sin^2 \vartheta/2} - 1 \right) \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} \quad (6.37)$$

zwischen dem Stoßparameter und dem Streuwinkel.

6.3.2 Streuquerschnitt

- Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung ist durch das Verhältnis

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) d\Omega = \frac{\text{pro Sek. nach } [\vartheta + d\vartheta] \text{ ausfallende Teilchen}}{\text{pro Sek. und Fläche einfallende Teilchen}} \quad (6.38)$$

definiert. Die Anzahl der pro Sekunde gestreuten Teilchen, die innerhalb von $[b, b + db]$ einfallen, ist

$$n v dt \, b db \, d\psi = n v dt \, b(\vartheta, v_\infty) \left| \frac{\partial b}{\partial \vartheta}(\vartheta, v_\infty) \right| d\vartheta d\psi, \quad (6.39)$$

und die Anzahl der pro Sekunde und Fläche einfallenden Teilchen ist $n v dt$. Daraus ergibt sich der differentielle Streuquerschnitt als

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = b(\vartheta, v_\infty) \left| \frac{\partial b(\vartheta, v_\infty)}{\partial \vartheta} \right| \frac{1}{\sin \vartheta} = \left| \frac{\partial b^2(\vartheta, v_\infty)}{\partial \vartheta} \right| \frac{1}{2 \sin \vartheta}. \quad (6.40)$$

denn das Raumwinkelement ist $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\psi$. Mit (6.37) erhält man

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2 v_\infty^4} \frac{\cos \vartheta/2}{\sin^3 \vartheta/2 \sin \vartheta} = \frac{\alpha^2}{4(2E)^2} \frac{1}{\sin^4 \vartheta/2}, \quad (6.41)$$

wobei $\sin \vartheta = 2 \cos \vartheta/2 \sin \vartheta/2$ und $2E = mv_\infty^2$ verwendet wurden.

- Für Streuung von Elektronen an Kernen der Ladungszahl Z ist $\alpha = Ze^2$ (im Gaußschen Einheitensystem, in dem $\alpha = 2.3 Z \times 10^{-19} \text{ g cm}^3 \text{ s}^{-2}$ ist), woraus man die Rutherford'sche Streuformel erhält,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(Ze^2)^2}{4(2E)^2} \sin^{-4} \frac{\vartheta}{2}. \quad (6.42)$$

6.3.3 Streuung unter kleinen Winkeln

- Wenn die Ablenkung durch die Streuung klein ist, etwa weil der Stoßparameter groß ist, vereinfacht sich die Berechnung des Streuquerschnitts wesentlich. Man kann dann direkt im Laborsystem rechnen, weil die Rückwirkung von m_1 auf m_2 vernachlässigt und daher $m_2 \rightarrow \infty$ angenommen werden kann.
- Demnach liege m_2 fest im Ursprung und m_1 falle längs der x -Achse ein. Für die y -Komponente seiner Geschwindigkeit nach dem Stoß gilt

$$v'_y = v'_1 \sin \vartheta_1 = v_\infty \sin \vartheta_1 \approx v_\infty \vartheta_1, \quad (6.43)$$

und die y -Komponente der Geschwindigkeit ist

$$m_1 v'_y = \int_{-\infty}^{\infty} F_y dt, \quad (6.44)$$

wobei

$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{dV}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{dV}{dr} \frac{y}{r} \quad (6.45)$$

die y -Komponente der Kraft ist. Das Integral über die Kraft kann nun längs der *ungestörten* Bahn ausgeführt werden, weil F_y bereits eine kleine Größe ist. Dann bleiben $v_x = v_\infty$ und $y = b$ näherungsweise konstant. Daher ist $dt = dx/v_\infty$ und

$$m_1 v'_y = -\frac{2b}{v_\infty} \int_0^\infty \frac{dV}{dr} \frac{dx}{r}. \quad (6.46)$$

Die konstante Größe b heißt *Stoßparameter*.

- Die Integration über dx kann durch eine Integration über dr ersetzt werden. Aus $r^2 = b^2 + x^2$ folgt $rdr = xdx$ und

$$dx = \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - b^2}}, \quad (6.47)$$

woraus sich mit (6.43) und (6.46)

$$\vartheta_1 = -\frac{2b}{m_1 v_\infty^2} \int_b^\infty \frac{dV}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - b^2}} \quad (6.48)$$

ergibt. Auch in der Gleichung (6.40) kann statt $\sin \vartheta \approx \vartheta$ eingesetzt werden,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \frac{db}{d\vartheta} \right| \frac{b}{\vartheta}. \quad (6.49)$$

- Ein interessantes Beispiel ist die Ablenkung von Licht im Gravitationsfeld. Wenn man Licht als einen Strom von Teilchen auffasst, auf die die Gravitationskraft wirkt, folgt, dass Lichtstrahlen von Massen abgelenkt werden, an denen sie vorbeigehen.

- Mit $V = (Gm_1m_2)/r$ ergibt (6.48)

$$\vartheta_1 = \frac{2Gm_2b}{c^2} \int_b^\infty \frac{dr}{r^2 \sqrt{r^2 - b^2}} = \frac{2Gm_2b}{c^2} \frac{\sqrt{r^2 - b^2}}{b^2 r} \Big|_b^\infty = \frac{2Gm_2}{c^2 b} . \quad (6.50)$$

Führt man hier den Schwarzschild-Radius

$$R_S = \frac{2Gm_2}{c^2} \quad (6.51)$$

ein, folgt

$$\vartheta_1 = \frac{R_S}{b} . \quad (6.52)$$

- Das ist eine heuristische Betrachtung, die erst in der Allgemeinen Relativitätstheorie korrekt durchgeführt werden kann. Dort ergibt sich als Ablenkwinkel das Doppelte des aufgrund der Newtonschen Gravitation erwarteten Winkels,

$$\vartheta = \frac{2R_S}{b} . \quad (6.53)$$

- Die Masse der Sonne ist $M = 2 \cdot 10^{33}$ g, ihr Schwarzschild-Radius ist also $R_{S,\odot} = 3$ km. Ein Lichtstrahl, der genau den Sonnenrand bei $b = 696000$ km passiert, wird demnach um den Winkel $\vartheta = 1.7''$ abgelenkt. Dieser Wert wurde 1919 während einer Sonnenfinsternis nachgewiesen.

6.4 Mechanische Ähnlichkeit und der Virialsatz (nicht in Vorlesung)

6.4.1 Mechanische Ähnlichkeit

- Wichtige Aussagen über mechanische Systeme können oft schon aufgrund sehr allgemeiner Eigenschaften getroffen werden. Für die folgende Diskussion brauchen wir zunächst eine Definition: Eine Funktion $f(x_1, \dots, x_N)$ heißt *homogen vom Grad k* , wenn sie die folgende Eigenschaft hat:

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_N) = \lambda^k f(x_1, \dots, x_N) . \quad (6.54)$$

- Sei nun das Potential $V(\vec{x})$ homogen vom Grad k in $\vec{x}$,

$$V(a\vec{x}) = a^k V(\vec{x}) . \quad (6.55)$$

Skalieren wir dann $\vec{x}$ und t durch $\vec{x} \rightarrow a\vec{x}$ und $t \rightarrow bt$, gilt zunächst

$$\dot{\vec{x}} \rightarrow \frac{a}{b} \dot{\vec{x}} , \quad \ddot{\vec{x}} \rightarrow \frac{a}{b^2} \ddot{\vec{x}} , \quad (6.56)$$

und die Bewegungsgleichungen transformieren sich entsprechend

$$m\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla}V(\vec{x}) \rightarrow m\frac{a}{b^2}\ddot{\vec{x}} = -\frac{1}{a}a^k\vec{\nabla}V(\vec{x}) . \quad (6.57)$$

Sie bleiben offenbar unverändert, wenn

$$\frac{a^2}{b^2} = a^k , \quad \text{also} \quad b = a^{1-k/2} \quad (6.58)$$

gewählt wird.

- Das bedeutet: Wenn $V(\vec{x})$ homogen vom Grad k in $\vec{x}$ ist, dann lassen die Bewegungsgleichungen *Ähnlichkeitstransformationen* zu, wobei sich die Zeitdifferenzen (z.B. zwischen entsprechenden Bahnpunkten) wie

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-k/2} \quad (6.59)$$

verhalten, wenn l'/l das Verhältnis der Bahnabmessungen ist.

6.4.2 Beispiele

- Beim harmonischen Oszillator ist $V \propto x^2$, also $k = 2$. Seine Schwingungsdauer ist deshalb unabhängig von seiner Amplitude!
- Beim freien Fall im konstanten Schwerfeld ist $V \propto x$, also $k = 1$. Daher gilt

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1/2} , \quad (6.60)$$

d.h. die Quadrate der Fallzeiten verhalten sich wie die Anfangshöhen.

- Bei der Bewegung im Gravitationsfeld ist $V \propto r^{-1}$, also $k = -1$, und daraus folgt wegen

$$\frac{t'}{t} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{3/2} \quad (6.61)$$

bereits das 3. Keplersche Gesetz.

6.4.3 Der Virialsatz

- Wenn $f(\vec{x})$ eine homogene Funktion vom Grad k in $\vec{x}$ ist, dann gilt

$$\frac{df(a\vec{x})}{d(a\vec{x})} \cdot \vec{x} = \frac{\partial}{\partial a} [f(a\vec{x})] = \frac{\partial[a^k f(\vec{x})]}{\partial a} = k a^{k-1} f(\vec{x}) . \quad (6.62)$$

Dies muss insbesondere auch für $a = 1$ gelten, woraus bereits das *Euler-Theorem über homogene Funktionen* folgt,

$$\vec{x} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x}) = k f(\vec{x}) . \quad (6.63)$$

- Da die kinetische Energie T homogen vom Grad 2 in $\vec{v}$ ist, gilt

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial T}{\partial \vec{v}} = 2T \quad (6.64)$$

und weiter

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{v}} = \vec{p} \quad \Rightarrow \quad 2T = \vec{v} \cdot \vec{p} = \frac{d}{dt}(\vec{p} \cdot \vec{x}) - \dot{\vec{p}} \cdot \vec{x} . \quad (6.65)$$

- Eine Mittelung des ersten Terms über die Zeit, ausgedrückt durch

$$\langle \dots \rangle_t = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} (\dots) dt , \quad (6.66)$$

führt im Grenzfall beliebig langer Zeiten, $\Delta t \rightarrow \infty$, auf

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \frac{d}{dt}(\vec{p} \cdot \vec{x}) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{(\vec{p} \cdot \vec{x})(\Delta t) - (\vec{p} \cdot \vec{x})(0)}{\Delta t} = 0 \quad (6.67)$$

falls die Bewegung vollständig im Endlichen verläuft (z.B. auf einer gebundenen Bahn).

- Wegen $\dot{\vec{p}} = -\vec{\nabla} V(\vec{x})$ folgt daraus der *Virialsatz* für eine Bewegung unter dem Einfluss eines Potentials, das eine homogene Funktion vom Grad k in $\vec{x}$ ist:

$$2\langle T \rangle_t = -\langle \dot{\vec{p}} \cdot \vec{x} \rangle_t = \langle \vec{x} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{x}) \rangle_t = k \langle V(\vec{x}) \rangle_t . \quad (6.68)$$

Die mittlere kinetische Energie ist demnach gleich dem $k/2$ -fachen der mittleren potentiellen Energie.

- Im Fall des Newtonschen Gravitationsgesetzes, $V \propto r^{-1}$, ist $k = -1$ und daher

$$\langle T \rangle_t = -\frac{1}{2} \langle V \rangle_t . \quad (6.69)$$

- Der Virialsatz hat in der Astronomie eine sehr große Bedeutung, z.B. für die Thermodynamik selbstgravitierender Systeme, für die er zu einer negativen Wärmekapazität führt.

Kapitel 7

Koordinatentransformationen

7.1 Darstellung durch Matrizen

Mathematisch haben wir Koordinatentransformationen schon formal anhand von Basen von Vektorräumen eingeführt. Im letzten Kapitel haben wir eine konkrete Transformation im dreidimensionalen Raum ausgenutzt, nämlich die Umrechnung zwischen Laborsystem und Schwerpunktsystem. In diesem Kapitel werden wir uns der allgemeinen Transformation zwischen Koordinatensystemen mit Hilfe von Matrizen widmen.

7.1.1 Drehungen im dreidimensionalen Raum

- Stellen wir uns zum Beispiel vor, dass wir ein vorher eingeführtes Koordinatensystem um seine z -Achse um einen Winkel ϕ drehen. Dadurch gehen die Basisvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ in neue Basisvektoren $\vec{e}'_1$ und $\vec{e}'_2$ über. Nach (3.24) sind die Einträge in die Matrix, die eine Basis in eine andere transformiert, durch die Skalarprodukte der alten mit den neuen Basisvektoren gegeben.

In unserem Beispiel schließen $\vec{e}_1$ und $\vec{e}'_1$ sowie $\vec{e}_2$ und $\vec{e}'_2$ jeweils den Winkel ϕ miteinander ein, also

$$\vec{e}'_1 \cdot \vec{e}_1 = \cos \phi = \vec{e}'_2 \cdot \vec{e}_2, \quad (7.1)$$

während $\vec{e}_1$ mit $\vec{e}'_2$ den Winkel $90^\circ + \phi$ und $\vec{e}_2$ mit $\vec{e}'_1$ den Winkel $90^\circ - \phi$ einschließt, so dass

$$\vec{e}'_2 \cdot \vec{e}_1 = \cos(90^\circ + \phi) = -\sin \phi, \quad \vec{e}'_1 \cdot \vec{e}_2 = \cos(90^\circ - \phi) = \sin \phi \quad (7.2)$$

sind. Da $\vec{e}'_3 = \vec{e}_3$ ist, bleiben die Skalarprodukte mit $\vec{e}'_3$ unverändert,

$$\vec{e}'_1 \cdot \vec{e}_3 = 0 = \vec{e}'_2 \cdot \vec{e}_3, \quad \vec{e}'_3 \cdot \vec{e}_3 = 1. \quad (7.3)$$

Damit lauten die 3×3 Zahlen $a_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}_k$:

$$\begin{array}{lll} a_{11} = \cos \phi & a_{12} = \sin \phi & a_{13} = 0 \\ a_{21} = -\sin \phi & a_{22} = \cos \phi & a_{23} = 0 \\ a_{31} = 0 & a_{32} = 0 & a_{33} = 1 . \end{array} \quad (7.4)$$

7.1.2 Matrizen und Matrixoperationen

- Die 3×3 Zahlen a_{ij} , die oben bei der Darstellung von Koordinatentransformationen aufgetreten sind, lassen sich durch das rechteckige Zahlenschema einer *Matrix* darstellen, die in diesem Fall quadratisch ist,

$$A = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

- Allgemein sind Matrizen Zahlenschemata aus $M \times N$ Zahlen eines Körpers K , die in M Zeilen und N Spalten angeordnet sind,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots & a_{MN} \end{pmatrix} =: (a_{ij}). \quad (7.6)$$

Die Zahlen a_{ij} heißen *Matrixelemente*. Die $M \times N$ -Matrizen bilden einen Vektorraum $\mathcal{M}_{MN}$ über K , wenn man die Addition und die Multiplikation mit Skalaren elementweise definiert,

$$\begin{aligned} + : \quad \mathcal{M}_{MN} \times \mathcal{M}_{MN} &\rightarrow \mathcal{M}_{MN}, \quad (A, B) \mapsto (a_{ij} + b_{ij}), \\ \cdot : \quad K \times \mathcal{M}_{MN} &\rightarrow \mathcal{M}_{MN}, \quad (\lambda, A) \mapsto (\lambda a_{ij}). \end{aligned} \quad (7.7)$$

- Außerdem führt man eine Matrixmultiplikation ein, durch die $L \times M$ -Matrizen mit $M \times N$ -Matrizen multipliziert werden, um $L \times N$ -Matrizen zu ergeben,

$$\mathcal{M}_{LM} \times \mathcal{M}_{MN} \rightarrow \mathcal{M}_{LN}, \quad (A, B) \mapsto AB = (a_{ij}b_{jk}) \quad (7.8)$$

mit $1 \leq i \leq L$, $1 \leq j \leq M$ und $1 \leq k \leq N$. Indem man die Koordinatendarstellungen von (Spalten-)Vektoren aus N -dimensionalen Vektorräumen V_N als $N \times 1$ -Matrizen auffasst, ist damit auch eine Multiplikation von $M \times N$ -Matrizen mit N -dimensionalen Spaltenvektoren definiert, deren Ergebnis ein Vektor aus einem M -dimensionalen Vektorraum V_M ist,

$$\mathcal{M}_{MN} \times V_N \rightarrow V_M, \quad (A, v) \mapsto (a_{ij}v_j), \quad (7.9)$$

wobei $1 \leq i \leq M$ und $1 \leq j \leq N$ sind. Ebenso kann man Zeilenvektoren aus V_N als $1 \times N$ -Matrizen auffassen und sie mit $N \times M$ -Matrizen multiplizieren, um M -dimensionale Zeilenvektoren zu erhalten,

$$V_N \times \mathcal{M}_{MN} \rightarrow V_M, \quad (v, A) \mapsto (v_i a_{ij}). \quad (7.10)$$

Man schreibt die Multiplikationen (7.9) und (7.10) auch kurz in der Form

$$A \cdot v \quad \text{und} \quad v^T \cdot A. \quad (7.11)$$

Ebenso kann man in (7.10) zuerst die Zeilen und Spalten der Matrix A vertauschen, wodurch die Matrix in ihre transponierte A^T übergeht und die Indizes vertauscht werden,

$$A = (a_{ij}), \quad A^T = (a_{ji}^T) = (a_{ji}). \quad (7.12)$$

Offensichtlich gilt dann

$$(v^T \cdot A)_j = v_i a_{ij} = (a_{ji}^T) v_i = (A^T \cdot v)_j. \quad (7.13)$$

- Ganz allgemein gilt offenbar für beliebige Matrizen $A \in \mathcal{M}_{LM}$ und $B \in \mathcal{M}_{MN}$

$$(A \cdot B)^T = (a_{ij} b_{jk})^T = (a_{kj} b_{ji}) = (a_{jk}^T b_{ij}^T) = B^T \cdot A^T. \quad (7.14)$$

7.1.3 Beispiele

- Ein physikalisch relevantes Beispiel für die Multiplikation zweier Matrizen stellt die Kombination zweier Drehungen im dreidimensionalen Raum dar, von denen die eine um die z -Achse um einen Winkel ϕ dreht, die andere dann um die y -Achse um einen Winkel ψ . Die kombinierte Drehung wird durch das Produkt der beiden Drehmatrizen

$$R_1 = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

dargestellt. Das Produkt lautet nach der Multiplikationsregel (7.8)

$$R_2 R_1 = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ -\cos \phi \sin \psi & -\sin \phi \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}. \quad (7.16)$$

Indem man die Reihenfolge der Faktoren vertauscht, sieht man, dass die Matrixmultiplikation nicht kommutativ ist,

$$R_1 R_2 = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi & \sin \phi & \cos \phi \sin \psi \\ -\sin \phi \cos \phi & \cos \phi & -\sin \phi \sin \psi \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}, \quad (7.17)$$

was die alltägliche Erfahrung bekräftigt, dass das Ergebnis zweier nacheinander ausgeführter räumlicher Drehungen im Allgemeinen von der Reihenfolge der Drehungen abhängt.

- Der Vektor $\vec{x}$ mit den alten Koordinaten

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.18)$$

vor der ersten Drehung hat im neuen Koordinatensystem nach der ersten Drehung R_1 die Koordinaten

$$\vec{x}' = R_1 \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} \cos \phi + \sin \phi \\ \cos \phi - \sin \phi \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.19)$$

7.2 Determinanten und Matrixinversion

7.2.1 Determinanten

- Quadratischen Matrizen können Zahlen zugeordnet werden, die als ihre Determinanten bezeichnet werden und die für viele auch physikalische Betrachtungen unverzichtbar sind,

$$\det : \mathcal{M}_{NN} \rightarrow K, \quad A \mapsto \det A. \quad (7.20)$$

- In ihrer Definition tauchen *Permutationen* von Indizes auf. Permutationen waren uns schon kurz bei der Einführung des Levi-Civita-Symbols begegnet. Eine Permutation π bringt eine Menge von Indizes $\{i_1, i_2, \dots, i_N\}$ in eine andere Reihenfolge $\{i_{\pi(1)}, i_{\pi(2)}, \dots, i_{\pi(N)}\}$, indem sie ein Paar oder mehrere Paare von Indizes vertauscht. Sie heißt *gerade* oder *ungerade*, wenn eine gerade oder ungerade Anzahl von Vertauschungen zweier Elemente durchgeführt wird. Geraden Permutationen wird ein positives, ungeraden ein negatives Vorzeichen $\text{sign}(\pi)$ zugeordnet.
- Die N Indizes können auf $N! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot N$ Weisen angeordnet werden, also gibt es für N Zahlen $N!$ Permutationen. Zum Beispiel haben die drei Zahlen 1, 2, 3 $3! = 6$ Permutationen, von denen

$$\begin{aligned} (1, 2, 3), \quad (2, 3, 1), \quad (3, 1, 2) & \text{ gerade und} \\ (2, 1, 3), \quad (1, 3, 2), \quad (3, 2, 1) & \text{ ungerade} \end{aligned} \quad (7.21)$$

sind. Auf diese Weise haben wir das Levi-Civita-Symbol in drei Dimensionen definiert.

- Die Determinante einer Matrix $A \in \mathcal{M}_{NN}$ ist durch

$$\det A = \sum_{\pi} \text{sign}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \dots a_{N\pi(N)} \quad (7.22)$$

definiert. In drei Dimensionen verwenden wir die sechs Permutationen aus (7.21) und (7.22) und erhalten

$$\begin{aligned} \det A &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ &\quad - (a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) \\ &\quad + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) . \end{aligned} \quad (7.23)$$

Ebenfalls in drei Dimensionen kann die Determinante mithilfe des Levi-Civita-Symbols durch

$$\det A = \epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} \quad (7.24)$$

dargestellt werden.

- Determinanten haben eine Reihe interessanter Eigenschaften, von denen einige hier ohne Begründung zusammengestellt werden. Zunächst gelten aufgrund der Definition der Determinante

$$\det(\lambda A) = \lambda^N \det A \quad \text{und} \quad \det(A^T) = \det A . \quad (7.25)$$

Weitere wichtige Aussagen sind das Multiplikationstheorem

$$\det(A \cdot B) = \det A \det B \quad (7.26)$$

für $N \times N$ -Matrizen A, B, C und dass die Determinante einer Matrix verschwindet, in der die Zeilen- oder Spaltenvektoren linear abhängig sind.

- Determinanten werden oft auch durch Betragsstriche gekennzeichnet, $\det A \equiv |A|$.

7.2.2 Eigentliche und uneigentliche orthonormale Transformationen

- Wir kehren noch einmal zu den $N \times N$ -Matrizen zurück, durch die Koordinatentransformationen dargestellt werden können. Wir haben sie in (7.6) als quadratische Schemata der Zahlen a_{ij} eingeführt, die die neue Basis e'_i durch die alte e_j ausdrücken, $e'_i = a_{ij}e_j$. Für Transformationen, die Orthonormalbasen in Orthonormalbasen überführen, gilt

$$\langle e'_i, e'_j \rangle = \langle a_{ik}e_k, a_{jl}e_l \rangle = a_{ik}a_{jl} \delta_{kl} = a_{ik}a_{jk} = a_{ik}a_{kj}^T = \delta_{ij} \quad (7.27)$$

gelten. Mit anderen Worten, die Transformationsmatrix A muss dann die *Orthonormalitätsrelation*

$$AA^T = I = A^T A \quad (7.28)$$

erfüllen, wobei I die *Einheitsmatrix* mit den Elementen $I_{ij} = \delta_{ij}$ ist. Die zweite Gleichung in (7.28) gilt wegen der Transpositionsregel (7.14). Eine solche Transformation heißt selbst orthonormal.

- Offenbar ist $\det I = 1$, und deswegen gilt wegen (7.25) und (7.26)

$$1 = \det(AA^T) = \det A \det A^T = (\det A)^2, \quad (7.29)$$

woraus folgt, dass die Determinante einer orthonormalen Transformation $\det A = \pm 1$ ist. Die Transformation heißt *eigentlich*, wenn $\det A = 1$ ist, anderenfalls *uneigentlich*.

- Die Bedeutung uneigentlicher orthonormaler Transformationen sieht man an folgendem Beispiel. Eine Spiegelung im dreidimensionalen Raum an der y - z -Ebene kann durch die Transformationsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

dargestellt werden. Offensichtlich ist $\det A = -1$, weshalb diese Spiegelung eine uneigentliche orthonormale Transformation ist. Sie bildet die Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ entsprechend

$$\vec{e}_1 \rightarrow -\vec{e}_1, \quad \vec{e}_2 \rightarrow \vec{e}_2, \quad \vec{e}_3 \rightarrow \vec{e}_3 \quad (7.31)$$

ab. Wenn vor der Spiegelung die Beziehung $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \epsilon_{ijk} \vec{e}_k$ zwischen den Basisvektoren galt, wie sie in (3.17) eingeführt wurde, dann gilt nach der Spiegelung

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = -\epsilon_{ijk} \vec{e}_k. \quad (7.32)$$

Man sagt, das Koordinatensystem wurde von einem Rechts- in ein Linkssystem transformiert und hat damit seine *Orientierung* oder *Helizität* vertauscht. Eigentliche orthonormale Transformationen überführen also Rechts- in Rechtssysteme, während uneigentliche Transformationen die Helizität vertauschen.

7.2.3 Inversion von Matrizen

- Eine Matrix A^{-1} heißt *invers* zu einer $N \times N$ -Matrix A , wenn sie die Bedingung

$$A^{-1}A = I \quad (7.33)$$

erfüllt. Wenn A^{-1} existiert, lassen sich ihre Elemente x_{ij} aus (7.33) eindeutig bestimmen. Sie müssen offenbar die $N \times N$ Gleichungen

$$x_{ij}a_{jk} = \delta_{ik} \quad (7.34)$$

erfüllen. Die *Cramersche Regel* besagt, dass die x_{ij} durch

$$x_{ji} = \frac{(-1)^{i-j}A_{ij}}{\det A} \quad (7.35)$$

gegeben sind, wobei die A_{ij} die *Unterdeterminanten* von A sind. Das sind die Determinanten der $(N-1) \times (N-1)$ -Matrizen, die man erhält, indem man aus A die i -te Zeile und die j -te Spalte streicht.

Insbesondere zeigt sie, dass die Inverse einer Matrix nur dann existiert, wenn $\det A \neq 0$ ist. Man nennt die Matrix dann *regulär*, anderenfalls *singulär*.

- Für praktische Rechnungen ist die Cramersche Regel beinahe ungeeignet, weil sie enormen Rechenaufwand erfordert. Wir geben hier die Formeln für reguläre 2×2 - und 3×3 -Matrizen an:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \quad (7.36) \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} &= \frac{1}{\det A} \\ &\begin{pmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Überzeugen Sie sich, dass diese Formeln stimmen!

- Wenden wir die Multiplikationsregel für Determinanten auf (7.33) an, folgt

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}, \quad (7.37)$$

was zeigt, dass auch die Inverse A^{-1} eine Inverse $(A^{-1})^{-1}$ haben muss, wenn sie überhaupt existiert. Multiplikation der Gleichung

$$A^{-1}(AA^{-1}) = A^{-1} \quad (7.38)$$

mit $(A^{-1})^{-1}$ von links ergibt

$$I = (A^{-1})^{-1}A^{-1}(AA^{-1}) = AA^{-1}, \quad (7.39)$$

d.h. Rechts- und Linksinverse sind gleich und $(A^{-1})^{-1} = A$.

- Die Inverse $(AB)^{-1}$ eines Produkts AB lässt sich ähnlich einfach bestimmen. Multiplizieren wir die Bestimmungsgleichung

$$(AB)^{-1}(AB) = I \quad (7.40)$$

von rechts zuerst mit B^{-1} und dann mit A^{-1} , folgt

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \quad (7.41)$$

Außerdem folgt direkt aus der Cramerschen Regel, dass Transposition und Inversion vertauscht werden können,

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T. \quad (7.42)$$

- Für orthonormale Matrizen gilt offenbar schon aufgrund ihrer Definition, dass Inversion und Transposition identisch sind,

$$A^T = A^{-1}. \quad (7.43)$$

Das wird wiederum durch Drehmatrizen veranschaulicht. Die Inverse einer Drehmatrix, die eine Koordinatendrehung um eine beliebige Achse um einen Winkel ϕ beschreibt, muss eine Drehmatrix sein, die um dieselbe Achse, aber um den Winkel $-\phi$ dreht. Der Vergleich mit den Drehmatrizen R_1 und R_2 aus (7.15) zeigt, dass der Vorzeichenwechsel in ϕ identisch mit der Transposition der Matrizen ist.

7.3 Physikalische Bedeutung

Für die Physik ist es enorm wichtig, die Auswirkungen von Koordinatentransformationen auf physikalische Systeme zu kennen. Wenn ein physikalisches System nach einer Koordinatentransformation durch dieselbe Gleichung beschrieben wird wie vorher, heißt es symmetrisch unter dieser Transformation. Symmetrieüberlegungen spielen in der Physik eine herausragende, fundamentale Rolle, insbesondere deswegen, weil bestimmte Symmetrien zur Folge haben, dass bestimmte physikalische Größen erhalten sind.

7.3.1 Transformation des Drehimpulses

- Wir untersuchen nun, wie sich die Bewegungsgleichungen ändern, wenn wir zu neuen Koordinaten übergehen. Das Ausgangssystem K am Ursprung O habe die Basis $\vec{e}_i$, und das neue System K' sei am Ursprung O' und habe die Basis $\vec{e}'_i$.

- Für die Verschiebung des Ursprungs um einen konstanten Vektor $\vec{a}$ gilt

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{a}, \quad \dot{\vec{x}}' = \dot{\vec{x}}, \quad \ddot{\vec{x}}' = \ddot{\vec{x}}. \quad (7.44)$$

Damit ändert sich die Bewegungsgleichung zu

$$m\ddot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \rightarrow m\ddot{\vec{x}}' = \vec{F}'(\vec{x}', \dot{\vec{x}}', t) = \vec{F}(\vec{x}' + \vec{a}, \dot{\vec{x}}', t). \quad (7.45)$$

- Wenn die Bezugssysteme K und K' denselben Ursprung haben ($\vec{a} = 0$), aber beliebig gegeneinander verdreht sind, gilt

$$\vec{x}' = R \cdot \vec{x}, \quad \vec{x} = R^{-1} \cdot \vec{x}', \quad (7.46)$$

wobei R eine *orthogonalen* Drehmatrix nach (7.28) ist,

$$RR^T = I \Rightarrow |\det R| = 1. \quad (7.47)$$

Eigentliche Drehungen haben $\det R = 1$, uneigentliche $\det R = -1$. Da R zeitlich konstant ist, folgt

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}}' &= \frac{d}{dt}(R\vec{x}) = R\dot{\vec{x}} \\ \ddot{\vec{x}}' &= R\ddot{\vec{x}} \\ m\ddot{\vec{x}}' &= \vec{F}'(\vec{x}', \dot{\vec{x}}', t) = R\vec{F}(R^{-1}\vec{x}', R^{-1}\dot{\vec{x}}', t) \end{aligned} \quad (7.48)$$

Auf diese Weise ist der Übergang zu neuen kartesischen Koordinatensystemen möglich. Die allgemeine Form der Bewegungsgleichungen bleibt dabei erhalten.

- Die Komponenten des Drehimpulses im neuen Koordinatensystem sind

$$L'_i = \epsilon_{ijk} x'_j p'_k = \epsilon_{ijk} (R_{jl} x_l) (R_{km} p_m) = (\epsilon_{ijk} R_{jl} R_{km}) x_k p_m \quad (7.49)$$

Da R orthogonal ist, $R_{pq} R_{iq} = \delta_{pi}$, lässt sich der Ausdruck $\epsilon_{ijk} R_{jl} R_{km}$ zu folgender Form umschreiben

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} R_{jl} R_{km} &= \epsilon_{pjk} \delta_{pi} R_{jl} R_{km} = \epsilon_{pjk} (R_{iq} R_{pq}) R_{jl} R_{km} \\ &= (\det R) R_{iq} \epsilon_{qlm} \end{aligned} \quad (7.50)$$

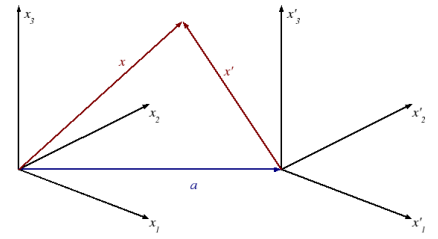
wegen (7.24). Daraus ergibt sich für den transformierten Drehimpuls

$$L'_i = (\det R) R_{iq} (\epsilon_{qlm} x_l p_m) = (\det R) R_{iq} L_q. \quad (7.51)$$

- Über die mathematische Definition hinaus wird einer physikalischen Größe Vektorcharakter zugeschrieben, wenn sie sich bei Koordinatentransformationen wie eine Geschwindigkeit transformiert, also entsprechend

$$v'_i = R_{ij} v_j \quad \text{für} \quad \det R = 1. \quad (7.52)$$

Man unterscheidet



Übergang zu neuem Bezugssystem

- *polare Vektoren*, für die

$$v'_i = R_{ij}v_j \quad \text{für} \quad \det R = \pm 1 \quad (7.53)$$

gilt, und

- *axiale Vektoren*, die bei uneigentlichen Transformationen gespiegelt werden,

$$a'_i = (\det R)R_{ij}a_j . \quad (7.54)$$

Also ist der Drehimpuls ein *axialer* Vektor.

7.3.2 Transformation des Ortsvektors

- Sei $\vec{a}'$ der Ursprung des alten, ungestrichenen Systems im neuen, gestrichenen. Dann hängt der Ortsvektor im gestrichenen System mit dem im ungestrichenen nach

$$\vec{x} = \vec{a}' + x_j \vec{e}_j, \quad x'_i = a'_i + x_j R_{ij} \quad (7.55)$$

zusammen. Für einen weiteren Punkt mit Ortsvektor $\vec{y}$ ist $y'_i = a'_i + y_j R_{ij}$, d.h. der Verbindungsvektor der beiden Punkte transformiert sich wie

$$x'_i - y'_i = R_{ij}(x_i - y_i) . \quad (7.56)$$

Als Vektoren werden in der Physik allgemein solche Größen definiert, die sich wie Koordinatendifferenzen transformieren. Der Ortsvektor ist demnach streng genommen kein Vektor und wird als *gebundener Vektor* bezeichnet.

Kapitel 8

Kräfte in beschleunigten Bezugssystemen

8.1 Zeitabhängige Transformationen

Im letzten Kapitel haben wir Transformationen zwischen Koordinatensystemen betrachtet, die zunächst die betrachtete Physik nicht ändern. Mit anderen Worten, die Änderung der Koordinaten bewirkt keine Änderung der beteiligten Kräfte und damit der Bewegungsgleichungen. Bei der Rotation des Koordinatensystems war das schon weniger klar. In diesem Kapitel betrachten wir Transformationen, die das Kräftegleichgewicht im Bezugssystem tatsächlich ändern.

8.1.1 Winkelgeschwindigkeit

- Wenn sich zwei Koordinatensysteme relativ zueinander beliebig bewegen, sind Ortsvektoren in ihnen durch

$$\vec{x}'(t) = \vec{a}'(t) + R(t) \cdot \vec{x}(t) \quad (8.1)$$

miteinander verknüpft. Dabei sind $\vec{a}'(t)$ und $R(t)$ jetzt vorgegebene Funktionen der Zeit, und wir schreiben diese Zeitabhängigkeit nicht mehr in jede Formel. Daraus erhalten wir die Zeitableitung

$$\dot{\vec{x}}' = \dot{\vec{a}}' + R \cdot \dot{\vec{x}} + \dot{R} \cdot \vec{x} = \dot{\vec{a}}' + R \left[\dot{\vec{x}} + R^{-1} \dot{R} \cdot \vec{x} \right]. \quad (8.2)$$

Da die Drehmatrix orthonormal ist und daher $R^T R = I$ gilt, folgt

$$\dot{R}^T R + R^T \dot{R} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (R^T \dot{R})^T = -R^T \dot{R}. \quad (8.3)$$

Die Matrix $R^T \dot{R}$ muss also, wenn man sie transponiert, ihr Vorzeichen wechseln. Solche Matrizen heißen schiefsymmetrisch und haben

$$a_{ii} = 0, \quad a_{ij} = -a_{ji}. \quad (8.4)$$

In drei Dimensionen haben sie daher drei unabhängige Elemente. Es muss also möglich sein, die schiefssymmetrische Matrix $R^T \dot{R}$ in der Form

$$R^T \dot{R} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & +\omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & +\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.5)$$

zu schreiben, wobei die ω_i zunächst beliebig numeriert sind und willkürliche Vorzeichen tragen. Mithilfe des Levi-Civita-Symbols kann (8.5) in der Form

$$(R^T \dot{R})_{ij} = -\epsilon_{ijk} \omega_k \quad (8.6)$$

dargestellt werden, die sich gleich als sehr nützlich erweisen wird.

- Als Beispiel betrachten wir eine Drehung um die z -Achse um den Winkel $-\omega t$. Die Drehmatrix R ergibt sich aus (7.5),

$$R = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.7)$$

und damit ist

$$\begin{aligned} R^T \dot{R} &= \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \omega \begin{pmatrix} -\sin \omega t & -\cos \omega t & 0 \\ \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \omega \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (8.8)$$

- Um die Bedeutung der ω_i weiter zu klären untersuchen wir seine Transformationseigenschaften. Dazu betrachten wir das ungestrichene System mit den Basisvektoren $\vec{e}_i$ aus einem dritten System mit den Basisvektoren $\vec{e}_i^*$, das durch

$$\vec{x} = \vec{c} + S \vec{x}^* \quad (8.9)$$

mit dem ungestrichenen System verknüpft ist. Dabei seien die Verschiebung $\vec{c}$ und die Drehung S nun konstant. Für gestrichene Vektoren $\vec{x}'$ gilt nach (8.1)

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{d}' + R(\vec{c} + S \vec{x}^*) = (\vec{d}' + R\vec{c}) + (RS) \vec{x}^* \\ &= \vec{d}'^* + R^* \vec{x}^*, \end{aligned} \quad (8.10)$$

wobei wir in der zweiten Reihe Gleichung die gestirnten Koordinaten analog zu (8.1) definieren. Also ist $R^* = RS$, und damit

$$\begin{aligned} -\epsilon_{ijk} \omega_k^* &= (R^{*T} \dot{R}^*)_{ij} = (S^T R^T \dot{R} S)_{ij} \\ &= S_{ai} R_{ba} \dot{R}_{bc} S_{cj} = -S_{ai} \epsilon_{acl} \omega_l S_{cj}, \end{aligned} \quad (8.11)$$

Wegen $SS^T = I$ folgt $S_{lk}S_{nk}\omega_n = \delta_{ln}\omega_n = \omega_l$, also gilt

$$\epsilon_{ijk}\omega_k^* = \epsilon_{acl}S_{ai}S_{cj}S_{lk}S_{nk}\omega_n = \det S \epsilon_{ijk}S_{nk}\omega_n. \quad (8.12)$$

Demnach transformiert sich $\vec{\omega}$ unter Koordinatendrehungen nach

$$\vec{\omega}^* = \det S S^T \vec{\omega} \Leftrightarrow \vec{\omega} = \det S S \vec{\omega}^* \quad (8.13)$$

was zeigt, dass der Vektor $\vec{\omega}$ ein *axialer* Vektor ist.

- Setzen wir (8.6) in (8.2) ein, folgt

$$\dot{\vec{x}}' = \dot{\vec{d}}' + R(\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times \vec{x}). \quad (8.14)$$

Analog gilt für einen beliebigen Vektor $\vec{v}$ mit $\vec{v}' = R\vec{v}$

$$\dot{\vec{v}}' = R(\dot{\vec{v}} + \vec{\omega} \times \vec{v}). \quad (8.15)$$

8.1.2 Infinitesimale Transformationen

- Betrachten wir statt der Drehung um einen endlichen Winkel die Drehung zwischen einem Zeitpunkt t und einem infinitesimal späteren Zeitpunkt $t + dt$, die durch die zeitabhängige Drehmatrix in Form einer Taylorreihe

$$R(t + dt) = R(t) + \dot{R}(t)dt = R(t) \left[I + R^T(t)\dot{R}(t)dt \right] \quad (8.16)$$

ausgedrückt wird. Also ist mit (8.6)

$$R_{ik}(t + dt) = R_{ij}(t) \left[\delta_{jk} - \epsilon_{jkl}\omega_l(t)dt \right]. \quad (8.17)$$

Seien die Koordinatenachsen zunächst so orientiert, dass wie vorhin beschrieben $\vec{\omega}$ zur Zeit t in $\vec{e}_3$ -Richtung zeigt. Weiterhin sollen die gestrichenen Achsen bei t mit den ungestrichenen übereinstimmen, so dass

$$R(t) = I, \quad (R^T \dot{R})(t) = \begin{pmatrix} 0 & -|\omega| & 0 \\ |\omega| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.18)$$

und zum infinitesimal späteren Zeitpunkt nach (8.16)

$$R(t + dt) = \begin{pmatrix} 1 & -|\omega|dt & 0 \\ |\omega|dt & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.19)$$

gelten. Dies entspricht einer infinitesimalen Drehung um die $\vec{e}_3$ -Achse um den Winkel $d\varphi = |\omega|dt$. Deswegen wird $\vec{\omega}$ als der Vektor der momentanen Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Seine Richtung gibt die Lage der momentanen Drehachse an. Im Zeitintervall dt findet eine Drehung um den Winkel $d\varphi = |\omega|dt$ im positiven Drehsinn um $\vec{\omega}$ statt.

- Der implizit oben benutzte Begriff der infinitesimalen Transformationen ist in sehr vielen Bereichen der Physik sehr wichtig, z.B. in der Quantenmechanik oder der Feldtheorie. Deshalb betrachten wir sie noch etwas näher. Für eine komplett infinitesimale Transformation gilt

$$\vec{x}' = \vec{a}' + R\vec{x} = d\vec{a}' + (I + dR)\vec{x}. \quad (8.20)$$

Wegen der Orthonormalität ist $R^T R = I$, und daher

$$(I + dR)^T (I + dR) = I \quad \Rightarrow \quad dR^T + dR = 0. \quad (8.21)$$

Also ist dR abermals schiefsymmetrisch und kann analog zu (8.6) in der Form

$$dR_{ij} = -\epsilon_{ijk} d\varphi_k \quad (8.22)$$

dargestellt werden, wobei die $d\varphi_k$ infinitesimale Drehwinkel sind. Für infinitesimale Koordinatentransformationen gilt demnach allgemein

$$\vec{x}' = \vec{x} + d\vec{a}' + d\vec{\varphi} \times \vec{x}. \quad (8.23)$$

- Wie erwähnt, heißt eine Transformation *aktiv*, bei der das physikalische System sich in einem festen Koordinatensystem bewegt, und *passiv*, wenn das physikalische System fest bleibt, aber das Koordinatensystem bewegt wird. Mathematisch sind diese Arten der Transformation äquivalent, aber sie müssen physikalisch streng unterschieden werden.

8.2 Bewegung auf der rotierenden Erde

Als ein Beispiel für Bewegung in einem nichtinertialen System betrachten wir nun Kräfte, die auf der rotierenden Erde auftreten. Wir führen dazu zwei Koordinatensysteme ein, nämlich eines, das fest mit einem Punkt auf der Erdoberfläche verbunden ist, und ein Inertialsystem, in das wir die rotierende Erde einbetten.

8.2.1 Scheinkräfte

- Gegeben seien also ein (gestrichenes) Inertialsystem mit dem Ursprung im Erdmittelpunkt und ein (ungestrichenes) System, das mit der Erdoberfläche verbunden ist und seinen Ursprung in $\vec{a}'$ auf der Erdoberfläche hat. Die $\vec{e}_3$ -Achse zeige in $\vec{a}'$ senkrecht von der Erdoberfläche weg. Zwischen dem ungestrichenen und dem gestrichenen System vermittelt die Transformation

$$\vec{x}' = \vec{a}' + R\vec{x} = R(\vec{a} + \vec{x}), \quad (8.24)$$

wobei $\vec{a}$ der (zeitlich konstante) Ortsvektor des Ursprungs des gestrichenen im ungestrichenen System ist, also der Ortsvektor des Erdmittelpunkts im ungestrichenen System.

Die Geschwindigkeit im gestrichenen System ist nach (8.15)

$$\dot{\vec{x}}' = R \left[\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x}) \right], \quad (8.25)$$

und die Beschleunigung im gestrichenen System mit $\dot{a} = 0$

$$\ddot{\vec{x}}' = \dot{R} \left[\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x}) \right] + R \left[\ddot{\vec{x}} + \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{a} + \vec{x}) + \vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} \right]. \quad (8.26)$$

- Um in das ungestrichene, mit der Erde bewegte Bezugssystem zu transformieren, multiplizieren wir diese Gleichung von links mit $R^T = R^{-1}$ und erhalten damit die Beschleunigung im erdfesten System,

$$R^T \ddot{\vec{x}}' = R^T \dot{R} \left[\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x}) \right] + \left[\ddot{\vec{x}} + \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{a} + \vec{x}) + \vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} \right]. \quad (8.27)$$

Den ersten Term schreiben wir in Komponenten, verwenden dabei das Ergebnis (8.6) und erhalten

$$\begin{aligned} (R^T \dot{R})_{ij} \left[\dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x}) \right]_j &= -\epsilon_{ijk} \omega_k \left[\dot{x}_j + (\vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x}))_j \right] \\ &= (\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}})_i + [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x}))]_i. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Indem wir dieses Ergebnis in (8.27) einsetzen, folgt

$$\begin{aligned} R^T \ddot{\vec{x}}' &= \vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x})) + \ddot{\vec{x}} + \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{a} + \vec{x}) + \vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} \\ &= \ddot{\vec{x}} + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} + \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{a} + \vec{x}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{a} + \vec{x})). \end{aligned} \quad (8.29)$$

- Dies ist die Beschleunigung eines Massenpunkts, betrachtet im ungestrichenen, erdfesten System. Setzen wir diese Beschleunigung im Sinne des zweiten Newtonschen Axioms einer externen Kraft $\vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{\nabla}V$ gleich, erhalten wir für den Massenpunkt eine Bewegungsgleichung, die eine Reihe weiterer Kraftterme enthält:

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{x}} &+ m \left[\dot{\vec{\omega}} \times (\vec{a} + \vec{x}) \right] + 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}} \\ &+ m \left[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) \right] + m \left[\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{a}) \right] + \\ &+ \vec{\nabla}V(\vec{x}) = 0. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Zusätzlich zu der externen Kraft $\vec{F}_{\text{ext}}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}V(\vec{x})$ tritt also eine effektive Kraft $\vec{F}_{\text{eff}}(\vec{x}, \dot{\vec{x}})$ auf, die vier zusätzliche Terme enthält, die als *Scheinkräfte* bezeichnet werden. Im einzelnen haben diese Scheinkräfte die folgende Bedeutung:

1. Die erste Kraft $-m \left[\dot{\vec{\omega}} \times (\vec{a} + \vec{x}) \right]$ tritt nur auf, wenn die Drehachse sich ändert. Für die Erde ist $\vec{\omega} \approx \text{const.}$ und damit $\dot{\vec{\omega}} \approx 0$, abgesehen von Präzession und Polschwankungen.

2. Der zweite Term $-2m(\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}}) = 2m(\dot{\vec{x}} \times \vec{\omega}) =: \vec{F}_C$ heißt *Corioliskraft* und beschreibt eine Ablenkung von Massenpunkten, die sich im erdfesten System bewegen. Sie steht senkrecht auf $\vec{\omega}$ und $\dot{\vec{x}}$ und verschwindet für Bewegungen längs der Drehachse $\vec{\omega}$.
3. Die dritte, *Zentrifugalkraft* $m[(\vec{\omega} \times \vec{x}) \times \vec{\omega}] =: \vec{F}_Z$ kann durch Umformung vereinfacht werden. Dabei benutzen wir

$$\begin{aligned}\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{x} &= \epsilon_{ijk} \omega_j (\epsilon_{klm} \omega_l x_m) \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \omega_j \omega_l x_m \\ &= \omega_i \omega_j x_j - x_i \omega_j \omega_j, \end{aligned} \quad (8.31)$$

woraus sich unter Beachtung der Einsteinschen Summenkonvention der Ausdruck

$$\vec{F}_Z = m[\vec{\omega}^2 \vec{x} - \vec{\omega}(\vec{\omega} \cdot \vec{x})] = m\omega^2 \left[\vec{x} - \frac{\vec{\omega}(\vec{x} \cdot \vec{\omega})}{\omega^2} \right] = m\omega^2 \vec{y} \quad (8.32)$$

für die Zentrifugalkraft ergibt, in dem $\vec{y}$ der senkrechte Abstand des Massenpunkts von der Drehachse ist.

4. Der vierte Term $m[(\vec{\omega} \times \vec{a}) \times \vec{\omega}]$ ist schließlich unabhängig von $\vec{x}$, aber proportional zu m . Er entspricht der Zentrifugalkraft und liefert einen Beitrag zur Erdbeschleunigung, $\vec{g} \rightarrow \vec{g} + (\vec{\omega} \times \vec{a}) \times \vec{\omega}$.
- Allen Scheinkräften ist gemein, dass sie proportional zu m sind und ihren Ursprung in der Trägheitskraft $-m\ddot{\vec{x}}$ haben. Darüber hinaus haben sie die Proportionalität zu m mit der Schwerkraft gemein, was die Allgemeine Relativitätstheorie im Äquivalenzprinzip benutzt. Scheinkräfte zeigen an, dass das Bezugssystem kein Inertialsystem ist.

8.2.2 Zur Corioliskraft

- Seien $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ nun nach Süden bzw. nach Osten orientiert, und $\vec{e}_3$ zeige weiterhin senkrecht nach oben. Der Ursprung des erdfesten Systems befinde sich bei der geografischen Breite ϑ , so dass der Winkel zur Nordpolrichtung $\vec{e}_3$ durch $90^\circ - \vartheta$ gegeben ist. Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit im oberflächenfesten System ist dann

$$\vec{\omega} = \omega \begin{pmatrix} -\cos \vartheta \\ 0 \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} -\cos \vartheta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{\omega}_\perp + \vec{\omega}_\parallel \quad (8.33)$$

Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ kann also in orthogonale Komponenten senkrecht bzw. tangential zur Erdoberfläche zerlegt werden,

- Entsprechend hat die Corioliskraft zwei Komponenten

$$\vec{F}_C = 2m(\dot{\vec{x}} \times \vec{\omega}_\perp) + 2m(\dot{\vec{x}} \times \vec{\omega}_\parallel) . \quad (8.34)$$

Bewegung tangential zur Erdoberfläche hat $\dot{\vec{x}} \perp \vec{e}_3$. Damit ist der erste Term tangential zur Erdoberfläche. Er zeigt auf Nordhalbkugel ($\vartheta > 0$) nach rechts, auf der Südhalbkugel ($\vartheta < 0$) nach links relativ zur Richtung von $\dot{\vec{x}}$. Dies ist von großer Bedeutung für Stürme, Meeresströmungen, Flussläufe, Ballistik usw. Der zweite Term steht normal zur Erdoberfläche.

8.3 Reduziertes Dreikörperproblem (nicht in Vorlesung)

- Wir betrachten eine Testmasse m_3 , die sich in der Nähe von zwei Massen $m_1, m_2 \gg m_3$ bewegt. Die Massen m_1 und m_2 mögen sich auf Kreisbahnen um ihren Schwerpunkt bewegen, und m_3 laufe in der Bahnebene von m_1 und m_2 um. Dieses Problem ist in der Astrophysik sehr wichtig und beschreibt z.B. die Bewegung eines Asteroiden unter dem Einfluss von Sonne und Jupiter.
- Wir führen ein Koordinatensystem $\vec{e}$ ein, dessen Ursprung der Schwerpunkt von m_1 und m_2 ist und das mit dem Umlauf der beiden Massen corotiert. Die x -Achse zeige entlang der Verbindungslinie der beiden Massen. Weiterhin definieren wir

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} =: \mu , \quad \frac{m_2}{m_1 + m_2} =: 1 - \mu . \quad (8.35)$$

Damit sind die Koordinaten der beiden Massen m_1 und m_2

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} (\mu - 1)d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} \mu d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (8.36)$$

wenn d ihr gegenseitiger Abstand ist.

- Die Umlaufzeit von m_1 und m_2 um einander ist durch (5.57) gegeben,

$$\tau^2 = \frac{4\pi^2 d^3}{G(m_1 + m_2)} , \quad (8.37)$$

der Betrag der Winkelgeschwindigkeit ist also

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{d^3}} , \quad (8.38)$$

und ω zeigt senkrecht zur Bahnebene. Wir wählen den Umlaufsinn so, dass $\vec{\omega}$ in $\vec{e}_z$ -Richtung zeigt,

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} . \quad (8.39)$$

- Die Koordinaten von m_3 seien $(x, y, 0)$. Da $\vec{\omega}$ konstant ist, fallen die Terme in (8.30) weg, die $\dot{\vec{\omega}}$ enthalten. Da auch $\vec{a} = 0$ ist, lautet die Bewegungsgleichung für m_3

$$m_3 \ddot{\vec{x}}_3 + 2m_3 \vec{\omega} \times \dot{\vec{x}}_3 + m_3 [\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_3)] + m_3 \vec{\nabla} V(\vec{x}_3) = 0 \quad (8.40)$$

mit dem Potential

$$V(\vec{x}_3) = -\frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2} \quad (8.41)$$

und den Abständen

$$r_1 = [(x - (\mu - 1)d)^2 + y^2]^{1/2}, \quad r_2 = [(x - \mu d)^2 + y^2]^{1/2}. \quad (8.42)$$

- Die Kreuzprodukte sind

$$\vec{\omega} \times \dot{\vec{x}}_3 = \begin{pmatrix} -\omega \dot{y} \\ \omega \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_3) = \begin{pmatrix} -\omega^2 x \\ -\omega^2 y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8.43)$$

so dass die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x} - 2\omega \dot{y} - \omega^2 x + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \ddot{y} + 2\omega \dot{x} - \omega^2 y + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (8.44)$$

lauten.

- Mit dem effektiven Potential

$$U := V - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \quad (8.45)$$

lassen sich die Bewegungsgleichungen in der Form

$$\ddot{x} - 2\omega \dot{y} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y} + 2\omega \dot{x} = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad (8.46)$$

schreiben. Multiplikation der ersten Gleichung mit $\dot{x}$, der zweiten Gleichung mit $\dot{y}$ und Addition der beiden führt auf

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + U \right] = 0, \quad (8.47)$$

d.h.

$$C := -2U - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \omega^2 (x^2 + y^2) - 2V - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \text{konst.} \quad (8.48)$$

Dies ist die Jacobi-Konstante, das einzige bekannte Integral des reduzierten Dreikörperproblems.

- Wegen $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 > 0$ muss die Bewegung auf solche Bereiche eingeschränkt sein, in denen $C + 2U < 0$ ist, die also durch die *Hill-Kurve*

$$U = -\frac{C}{2} \quad (8.49)$$

begrenzt werden.

- Wenn m_3 ruht, bleibt er in Ruhe, wo $\vec{\nabla}U = 0$ gilt. Um solche Punkte zu suchen, nehmen wir zunächst $r_1 = r_2 =: r$ an, dann sind nach (8.42)

$$x = \frac{2\mu - 1}{2}d \quad \text{und} \quad r = \sqrt{\frac{d^2}{4} + y^2} \quad (8.50)$$

und wegen (8.41)

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{Gm_1}{r^2} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{Gm_1}{r^2} \frac{\partial r_2}{\partial x} - \omega^2 x \\ &= \frac{GM}{r^3} [\mu(x - (\mu - 1)d) + (1 - \mu)(x - \mu d)] - \omega^2 x \\ &= \left(\frac{GM}{r^3} - \omega^2 \right) x = \left(\frac{GM}{r^3} - \frac{GM}{d^3} \right) x, \end{aligned} \quad (8.51)$$

wobei im zweiten Schritt (8.35) und (8.42) verwendet wurden. Dies verschwindet dann und nur dann, wenn

$$r = d \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}d}{2} \quad (8.52)$$

sind. An diesen Orten ist auch

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \left(\frac{GM}{r^3} - \omega^2 \right) y = 0, \quad (8.53)$$

und daher ist m_3 kräftefrei an den beiden Punkten

$$\vec{\ell}_{4,5} = \frac{d}{2} \begin{pmatrix} 2\mu - 1 \\ \pm \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (8.54)$$

die mit m_1 und m_2 gleichseitige Dreiecke bilden. Drei weitere Lösungen liegen auf der x -Achse. Diese insgesamt fünf Punkte heißen Lagrange-Punkte.

- Diejenige Hill-Kurve, die die x -Achse zwischen m_1 und m_2 berührt, heißt *Roche-Grenze*. Sie definiert die Grenze der beiden Einzelsterne in einem Doppelsternsystem und ist für die Entwicklung von Doppelsternsystemen sehr wichtig.

Kapitel 9

Bewegung starrer Körper

9.1 Die Euler-Winkel

- Ein starrer Körper ist ein ausgedehntes Objekt, dessen Teile in fester räumlicher Beziehung zueinander stehen. Man kann sich starre Körper als aus vielen Massenpunkten aufgebaut denken, deren Abstände untereinander zeitlich konstant bleiben.
- Nehmen wir an, wir bräuchten eine große Zahl N von Massenpunkten, um einen starren Körper aufzubauen. Jeder dieser N Massenpunkte konnte sich vorher frei in jeder Richtung des Raums bewegen, weshalb wir drei Zahlen brauchten, um seine Lage im Raum festzulegen. Allgemein bezeichnet man die Anzahl unabhängiger Parameter, die zur vollständigen Charakterisierung der Lage des Systems notwendig sind, als die Anzahl der *Freiheitsgrade*. Zum Beispiel hat ein System von N Massenpunkten ohne weitere Nebenbedingungen $f = 3N$ Freiheitsgrade, nämlich die N Ortsvektoren $\vec{x}_i$ mit ihren jeweils drei Komponenten.
- Ein *starrer Körper* hat nun $f = 6$ Freiheitsgrade, nämlich die Lage seines Schwerpunkts und drei Winkel, die seine Orientierung im Raum angeben. Wir beginnen unsere Untersuchung der Bewegung starrer Körper damit, diese drei Winkel eindeutig festzulegen.
- Gegeben sei dazu ein Inertialsystem $\vec{e}'_i$ und ein körperfestes System $\vec{e}_i$, deren Ursprünge zusammen fallen. Zwischen den Koordinaten $\vec{x}'$ im Inertialsystem und den Koordinaten $\vec{x}$ im körperfesten System besteht die Verbindung

$$\vec{x}' = R \cdot \vec{x}, \quad (9.1)$$

wobei R eine (zeitabhängige) Drehmatrix ist. Da sie symmetrisch ist, sind von ihren neun Elementen sechs unabhängig. Diese wer-

den durch die drei *Euler-Winkel* $(\vartheta, \varphi, \psi)$ parametrisiert, die den Intervallen

$$0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi \quad (9.2)$$

entnommen werden. Damit haben wir für den starren Körper sechs *verallgemeinerte Koordinaten* gefunden, in denen sich seine Bewegung ausdrücken lässt, nämlich die drei Koordinaten des Schwerpunkts und die drei Euler-Winkel. Wir geben nun eine Konstruktion der Euler-Winkel an.

- Nach der Drehung R schneidet die $\vec{e}_1$ - $\vec{e}_2$ -Ebene die $\vec{e}'_1$ - $\vec{e}'_2$ -Ebene in der *Knotenlinie*, deren Richtung durch $\vec{e}'_3 \times \vec{e}_3$ gegeben ist. Die Drehmatrix R , ausgedrückt durch die Eulerwinkel, wird nun wie folgt konstruiert:

1. Zunächst wird um $\vec{e}'_3$ um den Winkel φ gedreht. Dadurch entsteht ein Koordinatensystem $\vec{e}^*_i$ mit

$$\vec{x}' = D_3(\varphi) \cdot \vec{x}^*, \quad D_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.3)$$

2. Nun wird um $\vec{e}^*_1$ um den Winkel ϑ gedreht. Dadurch entsteht ein Koordinatensystem $\vec{e}^{**}_i$ mit

$$\vec{x}^* = D_1(\vartheta) \cdot \vec{x}^{**}, \quad D_1(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (9.4)$$

3. Schließlich wird um $\vec{e}^{**}_3$ um den Winkel ψ gedreht. Dadurch gelangt man in das körperfeste Koordinatensystem $\vec{e}_i$, und

$$\vec{x}^{**} = D_3(\psi) \cdot \vec{x}, \quad D_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.5)$$

- Insgesamt ergibt sich daraus die Drehung

$$\vec{x}' = D_3(\varphi) \{D_1(\vartheta) [D_3(\psi) \cdot \vec{x}]\} =: R(\varphi, \vartheta, \psi) \cdot \vec{x} \quad (9.6)$$

mit der dazugehörigen gesamten Drehmatrix

$$R(\varphi, \vartheta, \psi) = D_3(\varphi) D_1(\vartheta) D_3(\psi). \quad (9.7)$$

- Die Drehmatrix $D_1(\vartheta) D_3(\psi)$ lautet zunächst

$$D_1(\vartheta) D_3(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \cos \vartheta \sin \psi & \cos \vartheta \cos \psi & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta \sin \psi & \sin \vartheta \cos \psi & \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad (9.8)$$

und die volle Drehmatrix $R(\varphi, \vartheta, \psi)$ ist schließlich durch

$$R(\varphi, \vartheta, \psi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \vartheta \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \vartheta \sin \psi \\ \sin \vartheta \sin \psi \\ -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \vartheta \cos \psi & \sin \varphi \sin \vartheta \\ -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \vartheta \cos \psi & -\cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \psi & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (9.9)$$

gegeben.

- Manchmal werden andere Konventionen für die Eulerwinkel benutzt, etwa indem man im zweiten Schritt nicht um die $\vec{e}_1^*$ -, sondern um die $\vec{e}_2^*$ -Achse dreht. Die Drehmatrix $R(\varphi, \vartheta, \psi)$ lautet dann natürlich anders, aber das Konstruktionsprinzip bleibt dasselbe.
- Der Konstruktion der Drehmatrix entsprechend kann der Vektor der momentanen Winkelgeschwindigkeit wie folgt durch die drei Eulerwinkel ausgedrückt werden:

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_3^* + \dot{\vartheta} \vec{e}_1^{**} + \dot{\psi} \vec{e}_3. \quad (9.10)$$

Dabei sind die Einheitsvektoren längs der Koordinatenachsen bestimmt durch $\vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j = R_{ij}$, also

$$\vec{e}_1^{**} \cdot \vec{e}_j = [D_3(\psi)]_{1j} = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.11)$$

sowie

$$\vec{e}_3^* \cdot \vec{e}_j = [D_1(\vartheta)D_3(\psi)]_{3j} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \psi \\ \sin \vartheta \cos \psi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (9.12)$$

Die vektorielle Winkelgeschwindigkeit im körperfesten System lässt sich demnach auf folgende Weise schreiben:

$$\vec{\omega} = \dot{\vartheta} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\varphi} \begin{pmatrix} \sin \vartheta \sin \psi \\ \sin \vartheta \cos \psi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} + \dot{\psi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9.13)$$

- Ergänzend stellen wir noch fest, dass die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ *nicht* eine zeitliche Ableitung eines Vektors $\vec{c}$ ist,

$$\vec{\omega} \neq \frac{d\vec{c}}{dt}. \quad (9.14)$$

Wenn das so wäre, folgte nämlich aus

$$\dot{\vec{c}} = \frac{\partial \vec{c}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial \vec{c}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \frac{\partial \vec{c}}{\partial \psi} \dot{\psi} \quad (9.15)$$

zusammen mit (9.10), dass

$$\frac{\partial c_1}{\partial \vartheta} = \cos \psi, \quad \frac{\partial c_1}{\partial \psi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 c_1}{\partial \psi \partial \vartheta} \neq \frac{\partial^2 c_1}{\partial \vartheta \partial \psi}, \quad (9.16)$$

gelten müsste, was auf einen Widerspruch führt.

9.2 Tensoren

In den vergangenen Kapiteln haben wir verschiedene Definitionen von Vektoren gegeben, die mehr oder weniger geometrisch oder algebraisch waren, und die wir je nach Fragestellung ausgenutzt haben. Als nächstes müssen wir uns mit Objekten befassen, die ähnlich wie Vektoren über ihre Transformationseigenschaften definiert werden, aber eben keine Skalare oder Vektoren sind. Sie heißen Tensoren.

9.2.1 Der Trägheitstensor

- Bevor wir uns der mathematischen Definition von Tensoren zuwenden, beginnen wir mit einem Beispiel für einen solchen Tensor. Die kinetische Energie eines starren Körpers ist gegeben durch

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{x}}_i'^2, \quad (9.17)$$

denn man stellt sich den starren Körper in Massenpunkte der Massen m_i an den körperfesten Orten $\vec{x}_i$ zerlegt vor, die im Inertialsystem an den Orten $\vec{x}_i'$ liegen. Dabei haben wir das Skalarprodukt zwischen den Geschwindigkeitsvektoren $\dot{\vec{x}}_i'$ durch die spitzen Klammern betont.

- Mit $\dot{\vec{x}}_i' = R(t)(\dot{\vec{x}}_i + \vec{\omega} \times \vec{x}_i)$ aus (8.15) und $\dot{\vec{x}}_i = 0$ folgt daraus

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\omega} \times \vec{x}_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[\omega_j \omega_k \delta_{jk} \vec{x}_i^2 - \omega_j \omega_k x_{i,j} x_{i,k} \right] \\ &= \frac{1}{2} \omega_j \left\{ \sum_{i=1}^N m_i \left[\vec{x}_i^2 \delta_{jk} - x_{i,j} x_{i,k} \right] \right\} \omega_k =: \frac{1}{2} \omega_j \Theta_{jk} \omega_k, \end{aligned} \quad (9.18)$$

indem man die auftretenden Skalarprodukte in Komponenten schreibt. Das Objekt Θ ist offensichtlich eine Matrix, deren genaue Eigenschaften wir im folgenden untersuchen werden.

9.2.2 Tensoren als lineare Abbildungen

- Wir haben oben das Skalarprodukt als eine Abbildung eingeführt, die zwei Vektoren (v_1, v_2) aus einem Vektorraum V eine Zahl aus dem Körper K zuordnet,

$$V \times V \rightarrow K, \quad (v_1, v_2) \mapsto \langle v_1, v_2 \rangle \in K. \quad (9.19)$$

Weiterhin hatten wir vom Skalarprodukt verlangt, dass es bilinear sei, d.h. linear in jedem seiner beiden Argumente.

- Völlig äquivalent dazu können wir sagen, dass anhand des Skalarprodukts Vektoren v_1 die Möglichkeit gegeben wird, andere Vektoren v_2 auf lineare Weise in den Körper K abzubilden. Dadurch wird jeder Vektor $v_1 \in V$ zu einer linearen Abbildung des Vektorraums in den Körper K ,

$$V : V \rightarrow K, \quad v_1(v_2) \mapsto \langle v_1, v_2 \rangle. \quad (9.20)$$

Beachten Sie, dass sich dadurch lediglich die Sichtweise auf das Skalarprodukt verändert hat!

- Entsprechend führen wir nun *Tensoren* als multilineare Abbildungen von V nach K ein, d.h. als Abbildungen, die einer beliebigen Menge von n Vektoren $v_i \in V$ eine Zahl aus dem Körper K zuordnen,

$$T : \underbrace{V \times \dots \times V}_{n \text{ mal}} \rightarrow K, \quad (v_1, \dots, v_n) \mapsto T(v_1, \dots, v_n). \quad (9.21)$$

Die Anzahl n der Vektoren, die der Tensor nach K abbilden kann, heißt sein *Rang*, oder man nennt ihn Tensor n -ter *Stufe*. Die Multilinearität bedeutet, dass der Tensor in jedem seiner Argumente linear ist,

$$T(\dots, v_i + \lambda w_i, \dots) = T(\dots, v_i, \dots) + \lambda T(\dots, w_i, \dots). \quad (9.22)$$

Vektoren selbst sind demnach Tensoren erster Stufe. Wir beschränken uns im Folgenden der Einfachheit halber auf Tensoren zweiter Stufe, aber die folgenden Aussagen gelten entsprechend auch für Tensoren beliebiger Stufe.

9.2.3 Transformationseigenschaften

- Zunächst stellen wir fest, dass Tensoren (vom selben Rang) einen K -Vektorraum $\mathcal{T}$ bilden, wenn wir die offensichtliche Addition und Multiplikation mit Skalaren definieren,

$$(T_1 + \lambda T_2)(v_1, v_2) = T_1(v_1, v_2) + \lambda T_2(v_1, v_2). \quad (9.23)$$

- Ebenso wie bei Vektoren reicht es wegen der Multilinearität der Tensoren aus, zu wissen, welche Zahlen aus K der Tensor T den Basisvektoren e_i von V zuordnet. Wir bezeichnen sie als *Komponenten* T_{ij} des Tensors,

$$T(e_i, e_j) = T_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (9.24)$$

Die Abbildung irgend zweier beliebiger Vektoren v, w lässt sich dann auf die folgende Weise ausdrücken:

$$T(v, w) = T(v_i e_i, w_j e_j) = v_i w_j T(e_i, e_j) = v_i w_j T_{ij}. \quad (9.25)$$

Anhand dieses Ergebnisses wird offensichtlich, dass sich Tensoren zweiter Stufe durch Matrizen darstellen lassen, die ihre Komponenten enthalten, sobald man eine Basis für den Vektorraum festgelegt hat. Trotzdem sollte man Tensoren nicht mit Matrizen verwechseln!

- Anhand dieser Definition kann man die Transformation eines Tensors $T \rightarrow T'$ unter einer orthogonalen Transformation $e'_i = R_{ik} e_k$ ableiten,

$$\begin{aligned} v_i w_j T_{ij} &= T(v, w) = T(v'_i e'_i, w'_j e'_j) \\ &= T(v'_i R_{ik} e_k, w'_j R_{jl} e_l) \\ &= v'_i w'_j R_{ik} R_{jl} T_{kl} \quad \Leftrightarrow \quad T'_{ij} = R_{ik} T_{kl} R_{lj}^T \end{aligned} \quad (9.26)$$

In Matrixschreibweise heisst das für den transformierten Tensor $T' = RTR^T = RTR^{-1}$. Ein Tensor zweiter Stufe wird also bezüglich jeder seiner beiden Stufen wie ein Vektor transformiert.

- Um festzustellen, ob das Objekt Θ in (9.18) tatsächlich ein Tensor ist, untersuchen wir sein Transformationsverhalten. Ausgedrückt durch ein neues orthonormales Koordinatensystem $\vec{e}_i^*$ mit gleichem Ursprung lauten die $x_j = R_{jk} x_k^*$. Wegen der Orthonormalität von R ist

$$R_{jl} R_{km} \delta_{lm} = \delta_{jk}. \quad (9.27)$$

Das Skalarprodukt ist natürlich invariant,

$$\vec{x}^2 = R_{jl} x_l^* R_{jm} x_m^* = \delta_{lm} x_l^* x_m^* = \vec{x}^{*2} \quad (9.28)$$

so dass

$$\begin{aligned} \Theta_{jk} &= \sum_{i=1}^N m_i \left[\vec{x}_i^{*2} R_{jl} R_{km} \delta_{lm} - R_{jl} R_{km} x_{i,l}^* x_{i,m}^* \right] \\ &= R_{jl} R_{km} \Theta_{lm}^* \end{aligned} \quad (9.29)$$

gilt. Damit erweist sich Θ als ein *Tensor zweiter Stufe*. Er wird *Trägheitstensor* des starren Körpers genannt.

9.2.4 Tensorprodukt

- Aus zwei Vektoren (v_1, v_2) lässt sich ein Tensor zweiter Stufe aufbauen, indem man das so genannte *Tensorprodukt* oder *äußere Produkt* der beiden bildet,

$$\otimes : V \times V \rightarrow \mathcal{T} , \quad (v_1, v_2) \mapsto v_1 \otimes v_2 . \quad (9.30)$$

Der so entstandene Tensor ordnet einem Paar von Vektoren w_1, w_2 das Produkt der Abbildungen $v_1(w_1)$ und $v_2(w_2)$ zu,

$$(v_1 \otimes v_2)(w_1, w_2) = v_1(w_1) v_2(w_2) . \quad (9.31)$$

- Insbesondere kann man durch das Tensorprodukt der Basisvektoren e_i eine Basis für $\mathcal{T}$ konstruieren, weil jeder Tensor zweiter Stufe durch

$$T = T_{ij}(e_i \otimes e_j) \quad (9.32)$$

dargestellt werden kann. Das sieht man unmittelbar, indem man (9.25) mit (9.31) verbindet:

$$\begin{aligned} T(v, w) &= T_{ij}(e_i \otimes e_j)(v_k e_k, w_l e_l) = T_{ij} v_k w_l e_i(e_k) e_j(e_l) \\ &= T_{ij} v_k w_l \delta_{ik} \delta_{jl} = v_i w_j T_{ij} . \end{aligned} \quad (9.33)$$

Daran sieht man, dass der Vektorraum der Tensoren zweiter Stufe im n -dimensionalen Raum die Dimension n^2 hat, weil er durch die n^2 Basistensoren $e_i \otimes e_j$ aufgespannt wird.

- Wendet man einen Tensor T auf zwei gleiche Basisvektoren an, erhält man seine *Spur*

$$T(e_k, e_k) = T_{ij}(e_i \otimes e_j)(e_k, e_k) = T_{ij} \delta_{ik} \delta_{jk} = T_{kk} , \quad (9.34)$$

die aufgrund der Einsteinschen Summenkonvention einfach die Summe der Diagonalkomponenten seiner darstellenden Matrix ist.

- Oft werden Tensoren anhand ihres Verhaltens bei Koordinatentransformationen definiert. Die Darstellung (9.32) zeigt, dass eine orthonormale Koordinatentransformation $e'_i = R_{ij} e_j$ die Tensor-komponenten T_{ij} wie folgt transformiert:

$$T = T_{ij}(e_i \otimes e_j) = T'_{kl}(e'_k \otimes e'_l) = T'_{kl} R_{ki} R_{lj} (e_i \otimes e_j) . \quad (9.35)$$

Durch Multiplikation mit $R_{ai} R_{bj}$ und Anwendung der Orthonormalitätsrelation $R_{ij} R_{ik} = \delta_{jk}$ folgt daraus das Transformationsgesetz

$$T'_{ab} = R_{ai} R_{bj} T_{ij} . \quad (9.36)$$

9.3 Diagonalisierung

9.3.1 Diagonalisierung von Matrizen

- Wir haben gesehen, dass sich Tensorkomponenten T_{ij} bei ortho-normalen Koordinatendrehungen R wie $T' = RTR^T$ verhalten. Dies gilt allgemein auch für Matrizen A , wenn wir verlangen, dass Gleichungen der Form $y = Ax$ durch Koordinatentransformationen R ihre Form nicht verändern, so dass nach einer Transformation $y' = A'x'$ gilt. Dann muss sich die Matrix A entsprechend

$$y' = Ry = R(Ax) = R(AR^T x') = (RAR^T)x' \Rightarrow A' = RAR^T \quad (9.37)$$

transformieren. Können wir das benutzen, um die Matrix A' in die besonders einfache *Diagonalform*

$$A' = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix} \quad (9.38)$$

zu bringen? Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir zunächst lineare Gleichungssysteme der Form

$$Av = \lambda v, \quad (9.39)$$

die nach Vektoren v suchen, die durch die lineare Abbildung auf ein Vielfaches von v abgebildet werden. Solche Vektoren v heißen *Eigenvektoren*, die zugehörigen Zahlen λ heißen *Eigenwerte*. Wir schreiben (9.39) mithilfe der Einheitsmatrix I um, erhalten das lineare Gleichungssystem

$$(A - \lambda I)v = 0. \quad (9.40)$$

Ein lineares Gleichungssystem der Form $Ax = 0$ kann nur dann eine Lösung $x \neq 0$ haben, wenn $\det A = 0$ ist. Wäre das nicht so, dann hätte die Matrix A eine Inverse A^{-1} , deren Anwendung von links auf das Gleichungssystem fälschlich $x = 0$ ergäbe. Für (9.40) bedeutet dies, dass Eigenwerte der Gleichung

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (9.41)$$

genügen müssen, damit es nicht-triviale Eigenvektoren v geben kann. Diese Gleichung heißt auch *charakteristisches Polynom* der Matrix A .

- Als Lösungen des charakteristischen Polynoms gibt es nach dem Fundamentalsatz der Algebra immer n Eigenwerte, die aber nicht reell sein müssen, sondern komplex sein können. Da wir komplexe Zahlen erst später besprechen, behaupten wir hier ohne Beweis, dass die Eigenwerte dann reell sind, wenn die Matrix symmetrisch ist, $A^T = A$. Der Beweis wird später nachgeholt.

- Wir multiplizieren nun zuerst (9.37) von links mit R^T und erhalten

$$R^T A' = A R^T \quad (9.42)$$

wegen $R^T R = I$. Schreiben wir die Matrix R in Komponenten (r_{ij}) aus und verlangen, dass sie A' in die Diagonalform (9.38) bringt, folgt aus (9.42) die Eigenwertgleichung

$$A \vec{r}_i = A_i \vec{r}_i, \quad (9.43)$$

für die Zeilenvektoren $\vec{r}_i = (r_{i1}, r_{i2}, r_{i3})$ der Matrix R . Daran sehen wir, dass die Diagonalelemente A_i der Matrix A ihre Eigenwerte sind, also die Lösungen ihres charakteristischen Polynoms. Die Eigenvektoren $\vec{r}_i$ stellen dann ein ausgezeichnetes Koordinatensystem dar, in dem die Matrix A Diagonalform annimmt. Es heißt *Hauptachsensystem* von A .

- Betrachten wir als Beispiel die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.44)$$

Ihr charakteristisches Polynom lautet

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 1) = 0 \quad (9.45)$$

und hat die offensichtlichen Lösungen $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$. Die Matrix A hat also die Diagonalform

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: \text{diag}(-1, 0, 1). \quad (9.46)$$

- Die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{x}$ sind die Lösungen der Gleichung

$$(A - \lambda I) \vec{x} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (9.47)$$

Für $\lambda = -1$ folgt

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_3 = 0. \quad (9.48)$$

Bezüglich x_1 und x_2 wissen wir also nur, dass $x_2 = -x_1$ sein muss und können daher eine der beiden Komponenten frei wählen, z.B. $x_1 = 1$. Dann ist der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = -1$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9.49)$$

Völlig analoge Rechnungen führen auf die beiden anderen Eigenvektoren

$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9.50)$$

9.3.2 Diagonalisierung des Trägheitstensors

- Der Trägheitstensor Θ in (9.18) ist offenbar symmetrisch, $\Theta_{jk} = \Theta_{kj}$, und lässt sich daher durch eine reelle, symmetrische Matrix darstellen. Diese Matrix hat drei reelle Eigenwerte Θ_1 , Θ_2 und Θ_3 und lässt sich nach geeigneter Koordinatendrehung in die Form

$$(\Theta_{jk}) = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_3 \end{pmatrix} \quad (9.51)$$

bringen. Die Eigenwerte heißen *Hauptträgheitsmomente*, die dazugehörigen Eigenvektoren *Hauptträgheitsachsen* oder *Hauptachsen*.

- Betrachten wir als Beispiel zwei Massenpunkte m_1 und m_2 , die durch eine masselose Stange miteinander verbunden sind. m_2 befinde sich im Ursprung, m_1 laufe in der x_1 - x_2 -Ebene um. Dann sind $x_1 = l \cos \varphi$, $x_2 = l \sin \varphi$, $x_3 = 0$, und

$$(\Theta_{jk}) = m_1 l^2 \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi & 0 \\ -\cos \varphi \sin \varphi & \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.52)$$

Seine Eigenwerte sind durch das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \det(\Theta - \lambda) &= \begin{vmatrix} m_1 l^2 \sin^2 \varphi - \lambda & -m_1 l^2 \cos \varphi \sin \varphi & 0 \\ -m_1 l^2 \cos \varphi \sin \varphi & m_1 l^2 \cos^2 \varphi - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & m_1 l^2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (m_1 l^2 - \lambda) [(m_1 l^2 \sin^2 \varphi - \lambda)(m_1 l^2 \cos^2 \varphi - \lambda) \\ &\quad - m_1^2 l^4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi] \\ &= (m_1 l^2 - \lambda) \lambda (\lambda - m_1 l^2) \end{aligned} \quad (9.53)$$

bestimmt. Die drei Lösungen in diesem Fall sind offensichtlich $\lambda_1 = \lambda_2 = m_1 l^2$ und $\lambda_3 = 0$. Die Eigenvektoren zu diesen Eigenwerten sind

$$\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9.54)$$

Kapitel 10

Trägheitstensor und Trägheitsmomente

10.1 Volumenintegrale

10.1.1 Vorbemerkung

- Wir hatten im letzten Kapitel gesehen, dass der Trägheitstensor für einen aus N Massenpunkten zusammengesetzten starren Körper durch die Summe

$$\Theta_{jk} = \sum_{i=1}^N m_i \left[\vec{x}_i^2 \delta_{jk} - x_{i,j} x_{i,k} \right] \quad (10.1)$$

gegeben ist. Wenn der Körper kontinuierlich ist, führt man dann einen Grenzübergang zu beliebig kleinen Massenpunkten durch, die sich an den kontinuierlichen Orten $\vec{x}$ innerhalb des Körpers befinden, das infinitesimal kleine Volumen $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ einnehmen und die Masse

$$dm = \rho(\vec{x}) dV \quad (10.2)$$

besitzen, wobei $\rho(\vec{x})$ die Dichte am Ort $\vec{x}$ ist.

- Dann geht die Summe in (10.1) in das *Volumenintegral*

$$\int \int \int dx_1 dx_2 dx_3 \rho(\vec{x}) \left[\vec{x}^2 \delta_{jk} - x_j x_k \right] \quad (10.3)$$

über, in dem über die drei Raumkoordinaten x_i nacheinander integriert wird, wobei die Integrationsgrenzen durch den Rand des Körpers vorgegeben sind. Wir werden uns nun zunächst allgemein mit Volumenintegralen beschäftigen, uns der Einfachheit halber aber auf den dreidimensionalen Raum beschränken.

10.1.2 Ausführung

- Allgemein haben dreidimensionale Volumenintegrale die Form

$$I = \int \int \int dx_1 dx_2 dx_3 f(x_1, x_2, x_3), \quad (10.4)$$

wobei die Funktion f von den drei Raumkoordinaten abhängt. Hier ist eine skalare Funktion eingesetzt, aber vektorwertige Funktionen würden einfach komponentenweise integriert werden.

- Üblicherweise ist die größte Schwierigkeit bei Volumenintegralen die Festlegung der Integrationsgrenzen in den drei Variablen. Um das zu illustrieren, berechnen wir das Volumen einer Kugel mit Radius R aus dem Volumenintegral über die Funktion

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (10.5)$$

Wenn x_1 und x_2 gegeben sind, kann x_3 nur innerhalb von $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$ variieren. Das entsprechende x_3 -Integral ist also

$$\int_{-\sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2}}^{\sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2}} dx_3 = 2 \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}. \quad (10.6)$$

Wenn nur noch x_1 vorgegeben ist, muss x_2 aus dem Intervall $x_1^2 + x_2^2 = R^2$ stammen. Das folgende Integral über x_2 ist also

$$\begin{aligned} & 2 \int_{-\sqrt{R^2-x_1^2}}^{\sqrt{R^2-x_1^2}} \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2} dx_2 \\ &= \left[x_2 \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2} + (R^2 - x_1^2) \arcsin \frac{x_2}{\sqrt{R^2 - x_1^2}} \right]_{-\sqrt{R^2-x_1^2}}^{\sqrt{R^2-x_1^2}} \\ &= \pi(R^2 - x_1^2). \end{aligned} \quad (10.7)$$

Schließlich ist das verbleibende Integral über x_1

$$\pi \int_{-R}^R (R^2 - x_1^2) dx_1 = \pi \left(R^2 x_1 - \frac{x_1^3}{3} \right)_{-R}^R = \frac{4\pi}{3} R^3. \quad (10.8)$$

Natürlich ergibt sich am Ende das vertraute Ergebnis, aber die Rechnung ist unbefriedigend. Das liegt in diesem Fall wie meistens daran, dass die kartesischen Koordinaten der Symmetrie der Kugel überhaupt nicht angepasst sind. Deswegen behandeln wir zunächst die Frage, wie Volumenintegrale in anderen, der Situation besser angepassten Koordinaten ausgeführt werden können.

10.1.3 Koordinatentransformationen und die Jacobi-determinante

- Volumenintegrale werden erheblich vereinfacht, wenn man Koordinaten verwendet, die der Symmetrie des Integrationsvolumens angepasst sind, z.B. Zylinder- oder Kugelkoordinaten. Nehmen wir an, solche Koordinaten seien durch $u_i(x_j)$ gegeben, dann sind ihre totalen Ableitungen durch

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = (\partial_{x_j} u_i) dx_j \quad (10.9)$$

gegeben, wobei wieder über alle Werte von j zu summieren ist. In Matrixschreibweise lautet diese Gleichung

$$d\vec{u} = \bar{J} d\vec{x}, \quad \bar{J}_{ij} = \partial_{x_j} u_i. \quad (10.10)$$

Wenn die Matrix $\bar{J}$ invertierbar ist, d.h. wenn $\det \bar{J} \neq 0$ ist, folgt daraus

$$d\vec{x} = J d\vec{u}, \quad J_{ij} = \partial_{u_j} x_i, \quad (10.11)$$

und damit sind die dx_i durch die du_j gegeben. Die Matrix $J = \bar{J}^{-1}$ heißt *Jacobimatrix* der Koordinatentransformation.

- Für das Volumenintegral brauchen wir das dreidimensionale Volumenelement $dV = dx_1 dx_2 dx_3$. Um es durch das Produkt $du_1 du_2 du_3$ auszudrücken, drehen wir die Koordinatenachsen durch eine orthogonale Transformation R so, dass J diagonal wird,

$$d\vec{x}' = R d\vec{x} = (RJR^T) R d\vec{u} = J' d\vec{u}', \quad J' = \text{diag}(J_1, J_2, J_3). \quad (10.12)$$

Daraus folgen

$$\begin{aligned} dx'_i &= J_i du'_i \quad \text{und} \quad dx'_1 dx'_2 dx'_3 = J_1 J_2 J_3 du'_1 du'_2 du'_3 \\ &= |\det J'| du'_1 du'_2 du'_3 \\ &= |\det J| du'_1 du'_2 du'_3, \end{aligned} \quad (10.13)$$

da $J_1 J_2 J_3 = \det J' = \det(RJR^T) = \det J$, wobei die Betragsstriche gewährleisten, dass das Volumenelement positiv bleibt. Weil das Volumenintegral durch eine reine Koordinatendrehung nicht verändert wird, erhalten wir

$$dx_1 dx_2 dx_3 = |\det J| du_1 du_2 du_3, \quad (10.14)$$

Die Determinante $\det J$ heißt *Jacobideterminante* oder *Funktionaldeterminante*. Sie wird oft in der Form

$$\det J = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right) = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} \quad (10.15)$$

geschrieben.

- Demnach transformieren sich Volumenintegrale bei Koordinatentransformation nach

$$\int f(\vec{x}) dx_1 dx_2 dx_3 = \int f[\vec{x}(\vec{u})] |\det J| du_1 du_2 du_3, \quad (10.16)$$

wobei das Dreifachintegral durch ein einzelnes Integralzeichen angegeben wurde.

- Als Beispiel berechnen wir wieder das Volumen der Kugel, aber diesmal in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) . Zunächst gilt

$$x_1 = r \sin \theta \cos \phi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad x_3 = r \cos \theta, \quad (10.17)$$

und daher ist die Jacobimatrix

$$J = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & r \cos \theta \cos \phi & -r \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.18)$$

Ihre Determinante kann man berechnen und erhält

$$\det J = r^2 \sin \theta. \quad (10.19)$$

Das Volumenintegral über die Kugel lautet daher

$$\int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta = \frac{2\pi}{3} R^3 \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{4\pi}{3} R^3. \quad (10.20)$$

- Der Vollständigkeit halber geben wir noch die Jacobideterminante für die Transformation von kartesischen in Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) an. Hier ist

$$x_1 = \rho \cos \phi, \quad x_2 = \rho \sin \phi, \quad x_3 = z, \quad (10.21)$$

daher sind die Jacobimatrix und ihre Determinante

$$J = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \rho \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det J = \rho. \quad (10.22)$$

10.1.4 Trägheitstensor einer Kugel

- Als Beispiel wenden wir nun die Regeln der Volumenintegration zur Berechnung des Trägheitstensors einer homogenen Kugel mit Radius R und Gesamtmasse M an. Ihre Dichte sei ρ . Nach (10.3) und mit (10.19) ist

$$\Theta_{ij} = \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \rho [r^2 \delta_{ij} - x_i x_j] r^2 \sin \theta. \quad (10.23)$$

Wir können uns durch eine physikalische Überlegung viel Rechenarbeit sparen. Zunächst müssen die Nebendiagonalelemente von Θ_{ij} alle verschwinden, weil gegenüber einer Kugel keine Orientierung der drei Koordinatenachsen bevorzugt sein kann, weshalb die drei Koordinatenachsen bei beliebiger Orientierung Hauptachsen von Θ sein müssen. Weiterhin müssen alle Diagonalelemente gleich sein, weil die Kugel keine der drei Koordinatenrichtungen auszeichnet. Wir schließen also, dass aus Symmetriegründen

$$\Theta_{11} = \Theta_{22} = \Theta_{33} \quad \text{und} \quad \Theta_{12} = \Theta_{13} = \Theta_{23} = 0 \quad (10.24)$$

gelten müssen.

- Also beschränken wir uns auf die Berechnung von Θ_{11} , was wir am einfachsten durch $\Theta_{11} + \Theta_{22} + \Theta_{33} = 3\Theta_{11}$ erhalten:

$$\begin{aligned} 3\Theta_{11} &= \int_0^R dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \rho [3r^2 - r^2] r^2 \sin \theta \\ &= 4\pi\rho \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 8\pi\rho \frac{R^5}{5} . \end{aligned} \quad (10.25)$$

Wegen $M = 4\pi R^3 \rho / 3$ folgt daraus

$$\Theta_{11} = \Theta_{22} = \Theta_{33} = \frac{2}{5} MR^2 . \quad (10.26)$$

10.2 Drehimpuls und Trägheitsmomente starrer Körper (nicht in Vorlesung)

10.2.1 Drehimpuls

- Um den Drehimpuls des starren Körpers zu bekommen, setzen wir den Körper in ein Inertialsystem, das momentan mit dem körperfesten System zusammenfällt. Dann ist die Drehmatrix zwischen beiden die Einheitsmatrix, $R = I$, die Ortsvektoren im körperfesten System und im Inertialsystem sind gleich, $\vec{x}_i = \vec{x}'_i$, und die Geschwindigkeit der Massenpunkte des starren Körpers im Inertialsystem ist wegen (8.15) $\dot{\vec{x}}'_i = \vec{\omega} \times \vec{x}_i$. Also ist der Drehimpuls im Inertialsystem

$$\vec{L}' = \sum_{i=1}^N m_i (\vec{x}'_i \times \dot{\vec{x}}'_i) = \sum_{i=1}^N m_i [\vec{x}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{x}_i)] , \quad (10.27)$$

oder, indem wir das doppelte Kreuzprodukt auf Skalarprodukte zurückführen,

$$\vec{L}' = \sum_{i=1}^N m_i [\vec{x}_i^2 \vec{\omega} - \vec{x}_i (\vec{x}_i \cdot \vec{\omega})] = \Theta \vec{\omega} . \quad (10.28)$$

Im allgemeinen Fall beliebiger Drehungen zwischen dem körper- und dem raumfesten System muss berücksichtigt werden, dass der Trägheitstensor Θ dann auch aus dem körper- in das raumfeste System gedreht werden muss, $\Theta' = R\Theta R^T$, und damit im Allgemeinen zeitabhängig wird.

10.2.2 Trägheitsmomente

- Sei $\vec{n}$ ein beliebiger Einheitsvektor, $\vec{n}^T \vec{n} = 1$, dann ist das *Trägheitsmoment* um die Achse $\vec{n}$ durch

$$\vec{n}^T \Theta \vec{n} = n_j n_k \Theta_{jk} = \sum_{i=1}^N m_i \left[\vec{x}_i^2 - (\vec{x}_i \cdot \vec{n})^2 \right] = \sum_{i=1}^N m_i l_i^2 \quad (10.29)$$

definiert, wobei l_i der senkrechte Abstand des Massenpunktes i von der Drehachse ist.

- Demnach sind die Diagonalelemente Θ_{ii} von Θ die Trägheitsmomente um die Koordinatenachsen. Die Θ_{jk} mit $j \neq k$ heißen *Deviationsmomente*. Die Eigenwerte von Θ heißen *Hauptträgheitsmomente*, ihre Eigenvektoren sind die *Hauptträgheitsachsen*.
- Durch $\vec{y}^T \Theta \vec{y} = y_j y_k \Theta_{jk} = 1$ wird das *Trägheitsellipsoid* definiert. Im System der Hauptträgheitsachsen ist offensichtlich, dass es sich um ein Ellipsoid handelt, denn

$$\Theta_1 y_1^2 + \Theta_2 y_2^2 + \Theta_3 y_3^2 = 1. \quad (10.30)$$

- Der *Satz von Steiner* besagt, dass das Trägheitsmoment eines starren Körpers der Masse M um eine Achse durch einen beliebigen Punkt im Abstand l von seinem Schwerpunkt gleich seinem Trägheitsmoment im Schwerpunktsystem, vermehrt um Ml^2 ist. Das sieht man auf folgende Weise:

$$\begin{aligned} \Theta_{jk} &= \sum_{i=1}^N m_i \left(\vec{x}_i^2 \delta_{jk} - x_{i,j} x_{i,k} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left[(\vec{x}_i^* + \vec{X})^2 \delta_{jk} - (x_{i,j}^* + X_j)(x_{i,k}^* + X_k) \right], \end{aligned} \quad (10.31)$$

wobei $\vec{x}_i^*$ die Schwerpunktkoordinaten und $\vec{X}$ der Ortsvektor des Schwerpunkts sind. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \Theta_{jk} &= \sum_{i=1}^N m_i \left[(\vec{x}_i^*)^2 \delta_{jk} - x_{i,j}^* x_{i,k}^* \right] + M \left(\vec{X}^2 \delta_{jk} - X_j X_k \right) \\ &\quad + 2\delta_{jk} \vec{X} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i^* - X_j \sum_{i=1}^N m_i x_{i,k}^* - X_k \sum_{i=1}^N m_i x_{i,j}^* \end{aligned} \quad (10.32)$$

wobei die Gesamtmasse $M = \sum m_i$ verwendet wurde. Die drei Terme in der zweiten Zeile verschwinden aufgrund der Definition des Schwerpunkts. Sei nun $\vec{n}$ die Drehachse im Abstand l vom Schwerpunkt, dann gilt

$$l^2 = \vec{X}^2 - (\vec{X} \cdot \vec{n})^2, \quad (10.33)$$

und damit folgt

$$\vec{n}^T \Theta \vec{n} = \vec{n}^T \Theta^* \vec{n} + M l^2, \quad (10.34)$$

wie behauptet.

10.2.3 Homogenes Rotationsellipsoid

- Als etwas anspruchsvolleres Beispiel berechnen wir jetzt den Trägheitstensor und einige Trägheitsmomente eines homogenen Rotationsellipsoids der Masse M und der Dichte ρ , d.h. eines Körpers, dessen Oberfläche durch die Gleichung

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{\epsilon^2 a^2} = 1 \quad (10.35)$$

beschrieben wird, wobei die Zahl ϵ angibt, wie stark das Ellipsoid längs der x_3 -Achse gestreckt ist. Für $\epsilon > 1$ heißt das Ellipsoid *prolat*, anderenfalls *oblat*.

- Wir führen nun die elliptischen Koordinaten (r, θ, ϕ)

$$x_1 = r \sin \theta \cos \phi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad x_3 = \epsilon r \cos \theta \quad (10.36)$$

ein, die für $r = a$ und beliebige Winkel (θ, ϕ) die Bedingung (10.35) erfüllen. Die Jacobideterminante der Transformation von kartesischen auf diese Koordinaten ist

$$\det J = \epsilon r^2 \sin \theta. \quad (10.37)$$

- Zunächst erhalten wir die Masse

$$M = \epsilon \rho \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4\pi}{3} \epsilon \rho a^3. \quad (10.38)$$

Wieder müssen aus Symmetriegründen die Deviationsmomente Θ_{12} , Θ_{13} und Θ_{23} verschwinden und die beiden Hauptträgheitsmomente Θ_{11} und Θ_{22} gleich sein. Wegen

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2 (\sin^2 \theta + \epsilon^2 \cos^2 \theta) \quad (10.39)$$

ist das Hauptträgheitsmoment

$$\begin{aligned}
 \Theta_{11} &= \rho\epsilon \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\
 &\times r^2 (\sin^2\theta + \epsilon^2 \cos^2\theta - \sin^2\theta \cos^2\phi) \\
 &= \frac{\rho\epsilon a^5}{5} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi (\sin^2\theta \sin^2\phi + \epsilon^2 \cos^2\theta) \\
 &= \frac{\rho\epsilon a^5}{5} \int_0^\pi \sin\theta d\theta (\pi \sin^2\theta + 2\pi\epsilon^2 \cos^2\theta) \\
 &= \frac{\rho\epsilon a^5}{5} \frac{4\pi}{3} (1 + \epsilon^2) = \frac{1 + \epsilon^2}{5} Ma^2, \quad (10.40)
 \end{aligned}$$

was für $\epsilon = 1$ in das Ergebnis für die Kugel übergeht. Für Θ_{33} erhalten wir den einfacheren Ausdruck

$$\begin{aligned}
 \Theta_{33} &= \rho\epsilon \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin^2\theta \\
 &= \frac{4\pi}{3} \rho\epsilon \frac{2a^5}{5} = \frac{2}{5} Ma^2. \quad (10.41)
 \end{aligned}$$

- Das Trägheitsmoment dieses Rotationsellipsoids um die schräge Achse

$$\vec{n} = \frac{\vec{e}_1 + \vec{e}_3}{\sqrt{2}} \quad (10.42)$$

ist

$$\begin{aligned}
 \vec{n}^T \Theta \vec{n} &= \frac{1}{2} (\vec{e}_1^T + \vec{e}_3^T) \Theta (\vec{e}_1 + \vec{e}_3) = \frac{\Theta_{11} + \Theta_{33}}{2} \\
 &= \frac{1 + \epsilon^2 + 2}{10} Ma^2 = \frac{3 + \epsilon^2}{10} Ma^2. \quad (10.43)
 \end{aligned}$$

10.3 Der Gaußsche Satz

10.3.1 Herleitung

- Nachdem wir nun Volumenintegrale zur Verfügung haben, können wir einen weiteren Integralsatz ähnlich dem Satz von Stokes herleiten, der in der Physik ebenfalls häufig gebraucht wird. Es ist der Gaußsche Satz, der besagt, dass Flächenintegrale über Vektorfelder $\vec{A}$ durch Volumenintegrale über deren Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ ersetzt werden können,

$$\int_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{\sigma} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV, \quad (10.44)$$

wobei ∂V der Rand des Volumens V ist, also seine gesamte Oberfläche, und die Flächenelemente $d\vec{\sigma}$ entlang der Flächennormalen nach außen gerichtet sind.

- Um das einzusehen, betrachten wir ein kleines, würfelförmiges Volumen mit den Abmessungen dx_1 , dx_2 und dx_3 längs der Koordinatenachsen. Seine Oberfläche besteht offenbar aus sechs Quadraten, die sich paarweise gegenüberliegen und parallel zu einer der drei Koordinatenachsen sind. Die äußeren Flächennormalen sind also entweder parallel oder antiparallel zu den Koordinatenachsen gerichtet. Der Beitrag der beiden zur x_2 - x_3 -Ebene parallelen Quadrate zum Flächenintegral auf der linken Seite von (10.44) ist zum Beispiel

$$-A_1(x_1, x_2, x_3)dx_2dx_3 + A_1(x_1 + dx_1, x_2, x_3)dx_2dx_3, \quad (10.45)$$

wobei das negative Vorzeichen durch die Ausrichtung der Flächennormale bedingt wird. Wegen

$$A_1(x_1 + dx_1, x_2, x_3) = A_1(x_1, x_2, x_3) + \partial_{x_1}A_1(x_1, x_2, x_3)dx_1 \quad (10.46)$$

können wir den Beitrag in (10.45) als

$$\partial_{x_1}A_1(\vec{x})dx_1dx_2dx_3 = \partial_{x_1}A_1dV \quad (10.47)$$

bringen. Entsprechende Beiträge kommen von den beiden anderen Flächenpaaren, woraus wir für das infinitesimal kleine Volumen dV erhalten

$$\begin{aligned} \lim_{dV \rightarrow 0} \int_{\partial V} \vec{A} \cdot d\vec{\sigma} &= \int (\partial_{x_1}A_1 + \partial_{x_2}A_2 + \partial_{x_3}A_3) dV \\ &= \int (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV. \end{aligned} \quad (10.48)$$

Nun denken wir uns ein endlich großes Volumen aus infinitesimal kleinen Würfeln aufgebaut. Dadurch heben sich die inneren Flächenintegrale genau heraus, weil an der Trennfläche zwischen zwei benachbarten Würfeln die Beiträge betragsgleich sind, aber wegen der antiparallelen Orientierung ihrer Flächennormalen entgegengesetzte Vorzeichen haben. Es bleibt also nur das Flächenintegral über den Rand des Volumens übrig, während die Divergenz über das gesamte Volumen integriert wird. Dies begründet den Gaußschen Satz.

10.3.2 Transformation von Divergenz und Rotation

- Die Integralsätze von Gauß und Stokes geben uns eine einfache Methode an die Hand, die Differentialoperatoren Divergenz und Rotation in krummlinig-orthogonale Koordinatensysteme zu übersetzen. Wir hatten in (5.2) gesehen, dass nach einer Transformation in solche Koordinaten das Längenelement ds durch

$$ds^2 = (h_1dq_1)^2 + (h_2dq_2)^2 + (h_3dq_3)^2 \quad (10.49)$$

ausgedrückt werden kann, wobei die h_i durch (5.3) gegeben sind.

- Führen wir dieselbe Betrachtung nun in krummlinig-orthogonalen Koordinaten durch, die wir zur Herleitung des Gaußschen Satzes in kartesischen Koordinaten benutzt haben, erhalten wir zunächst für die Beiträge zweier längs der q_1 -Achse gegenüberliegender Begrenzungsflächen eines infinitesimalen Volumenelements zum Flächenintegral

$$-(A_{q_1}h_2h_3)(q_1, q_2, q_3)dq_2dq_3 + (A_{q_1}h_2h_3)(q_1 + dq_1, q_2, q_3)dq_2dq_3, \quad (10.50)$$

wobei berücksichtigt werden muss, dass jetzt auch die h_i von den Koordinaten q_j abhängen. Also ist der Beitrag (10.50)

$$\frac{\partial(A_{q_1}h_2h_3)}{\partial q_1}dq_1dq_2dq_3, \quad (10.51)$$

und das gesamte Flächenintegral wird

$$\left(\frac{\partial(A_{q_1}h_2h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(A_{q_2}h_1h_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(A_{q_3}h_1h_2)}{\partial q_3} \right) dq_1dq_2dq_3. \quad (10.52)$$

- Nach dem Gaußschen Satz muss dies nun gleich

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})dV = (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})h_1h_2h_3dq_1dq_2dq_3 \quad (10.53)$$

sein, woraus für die Divergenz die Darstellung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3} \left(\frac{\partial(A_{q_1}h_2h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(A_{q_2}h_1h_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(A_{q_3}h_1h_2)}{\partial q_3} \right) \quad (10.54)$$

folgt.

- Durch eine völlig analoge Betrachtung, ausgehend von (4.71) für die dritte Komponente der Rotation, erhält man die Darstellung der Rotation in krummlinig-orthogonalen Koordinaten,

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \times \vec{A})_{q_1} &= \frac{1}{h_2h_3} \left(\frac{\partial(A_{q_3}h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(A_{q_2}h_2)}{\partial q_3} \right), \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_{q_2} &= \frac{1}{h_1h_3} \left(\frac{\partial(A_{q_1}h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(A_{q_3}h_3)}{\partial q_1} \right), \\ (\vec{\nabla} \times \vec{A})_{q_3} &= \frac{1}{h_1h_2} \left(\frac{\partial(A_{q_2}h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(A_{q_1}h_1)}{\partial q_2} \right). \end{aligned} \quad (10.55)$$

- Für Kugelkoordinaten hatten wir $(q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \phi)$ und

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\phi = r \sin \theta. \quad (10.56)$$

Daher ist $h_r h_\theta h_\phi = r^2 \sin \theta$ und

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}. \quad (10.57)$$

Für die Komponenten der Rotation erhalten wir

$$\begin{aligned}(\vec{\nabla} \times \vec{A})_r &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}, \\(\vec{\nabla} \times \vec{A})_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r}, \\(\vec{\nabla} \times \vec{A})_\phi &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta}.\end{aligned}\quad (10.58)$$

10.3.3 Beispiel

- Betrachten wir als Beispiel das Radialfeld

$$\vec{F} = e^{-r} \vec{e}_r \quad (10.59)$$

und integrieren es über eine Kugel­fläche mit Radius R um den Ursprung. Das gerichtete Flächenelement ist

$$d\vec{\sigma} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \vec{e}_r, \quad (10.60)$$

so dass das Flächenintegral der Kraft über die Kugel­fläche bei $r = R$

$$R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \vec{F}(r, \theta, \phi) \cdot \vec{e}_r = 4\pi R^2 e^{-R} \quad (10.61)$$

ist.

- Andererseits ist die Divergenz von $\vec{F}$ wegen (10.57) durch

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} = \frac{1}{r^2} (2r - r^2) e^{-r} \quad (10.62)$$

gegeben, so dass das Volumenintegral darüber

$$\begin{aligned}4\pi \int_0^R r^2 dr \vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= 4\pi \int_0^R (2r - r^2) e^{-r} dr \\&= 4\pi r^2 e^{-r} \Big|_0^R = 4\pi R^2 e^{-R}\end{aligned}\quad (10.63)$$

ist, wie es nach dem Gaußschen Satz sein muss.

Kapitel 11

Harmonische Schwingungen

11.1 Der Harmonische Oszillator I

11.1.1 Bewegungsgleichung bei linearisierter Kraft

- Auf einen Körper im mechanischen *Gleichgewicht* wirkt insgesamt keine Kraft, $F = 0$, er wird also nicht beschleunigt, $\ddot{x} = 0$. Bei genügend kleiner Auslenkung aus der Gleichgewichtslage x_0 kann die Kraft in eine Taylorreihe entwickelt werden:

$$F = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}F''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \quad (11.1)$$

Nach Voraussetzung verschwindet $F(x_0)$, weil x_0 die Gleichgewichtslage ist. Der Einfachheit halber verschieben wir das Koordinatensystem so, dass der Ursprung in x_0 zu liegen kommt, also $x_0 = 0$ wird. Weiter nehmen wir an, dass $F'(x_0) \neq 0$ ist und vernachlässigen Terme höherer Ordnung in der Taylor-Reihe, d.h. wir *linearisieren* die Kraft um die Gleichgewichtslage und erhalten $F = F'(0)x$.

- Wenn nun $F'(x_0) > 0$ ist, entfernt sich das System aus der Gleichgewichtslage, und das Gleichgewicht ist *labil*. Das Gleichgewicht ist *stabil*, wenn das System in die Ausgangslage zurückkehrt, d.h. wenn $F'(x_0) < 0$ ist. Entsprechend schreiben wir für die *linearisierte* Kraft

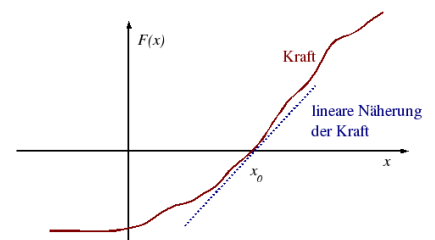
$$F'(x_0) := -k \quad \text{oder} \quad F(x) = -kx, \quad k > 0. \quad (11.2)$$

- Die Bewegungsgleichung ist dann

$$m\ddot{x} = -kx \quad (11.3)$$

oder

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (11.4)$$



Entwicklung der Kraft um die Gleichgewichtslage

11.1.2 Freie Schwingungen

- Die Bewegungsgleichung (11.4) ist offenbar eine gewöhnliche, lineare, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Zu ihrer Lösung brauchen wir also ein Fundamentalsystem aus zwei linear unabhängigen Lösungen $x_1(t)$ und $x_2(t)$. Wir sehen sofort das $x_1(t) = \sin \omega_0 t$ die Gleichung löst, ebenso wie $x_2(t) = \cos \omega_0 t$. Dass diese beiden Funktionen linear unabhängig voneinander sind, stellt sich durch Anwendung von (2.14) heraus, denn

$$W(x) = -\omega_0 \sin^2 \omega_0 t - \omega_0 \cos^2 \omega_0 t = -\omega_0 \neq 0. \quad (11.5)$$

Die allgemeine Lösung unserer Gleichung (11.4) lautet also

$$x(t) = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t \quad (11.6)$$

- Die Konstanten C_1, C_2 müssen durch die beiden Anfangsbedingungen bestimmt werden. Wenn wir den Anfangsort x_0 und die Anfangsgeschwindigkeit v_0 festlegen, folgt

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 \Rightarrow C_2 = x_0 \\ \dot{x}(t=0) &= v_0 \Rightarrow C_1 = \frac{v_0}{\omega_0} \end{aligned}$$

und damit

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + x_0 \cos \omega_0 t. \quad (11.7)$$

- Wegen der trigonometrischen Beziehung $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ lässt sich die allgemeine Lösung auch in die Form

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t - \delta_0) \quad (11.8)$$

bringen. Dazu setzt man $x = \omega_0$ sowie $A_0 \cos y = x_0$ und $A_0 \sin y = v_0/\omega_0$ und erhält

$$A_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \quad (11.9)$$

und

$$\tan \delta_0 = \frac{v_0}{x_0 \omega_0}. \quad (11.10)$$

$A_0 \geq 0$ heißt Amplitude, $\omega_0 t - \delta_0$ Phase der Schwingung. Dabei ist $0 \leq \delta_0 < 2\pi$.

- Die durch (11.8) bzw. (11.9) beschriebene Bewegung heißt *harmonische Schwingung*. Sie hat die *Kreisfrequenz* ω_0 , die *Frequenz*

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (11.11)$$

und die *Schwingungsperiode*

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0} . \quad (11.12)$$

Es lohnt sich jetzt, zur Beschreibung des harmonischen Oszillators komplexe Zahlen einzuführen, weil sich durch sie vieles enorm vereinfacht. Also folgt ein Umweg durch elementare Rechenregeln und Beziehungen komplexer Zahlen.

11.2 Komplexe Zahlen

11.2.1 Elementare Rechenregeln

- Komplexe Zahlen sind in der klassischen Physik oft bequem und in der Quantenphysik notwendig. Sie kommen zustande, indem man sich zunächst überlegt, dass dem quadratischen Ausdruck

$$x^2 = -1 \quad (11.13)$$

ebenso Lösungen zugeordnet werden sollen wie dem Ausdruck $x^2 = +1$, der die offensichtlichen Lösungen $x = \pm 1$ hat. Man definiert als Lösung von (11.13) die *imaginäre Einheit* i , so dass $i^2 = -1$ ist.

- Komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ sind geordnete Paare (a, b) reeller Zahlen, die in der Form

$$z = a + ib \quad (11.14)$$

geschrieben werden. Man kann sie als Punkte in der zweidimensionalen komplexen Ebene auffassen, deren eine Koordinatenachse *reell* und deren andere Koordinatenachse *imaginär* heißt. Entsprechend heißen

$$a = \Re(z) \quad \text{und} \quad b = \Im(z) \quad (11.15)$$

Real- bzw. Imaginärteil der komplexen Zahl z .

- Komplexe Zahlen z_1, z_2 werden addiert oder subtrahiert, indem man ihre Real- und Imaginärteile addiert oder subtrahiert,

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) , \\ z_1 - z_2 &= (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2) . \end{aligned} \quad (11.16)$$

Zur Multiplikation fasst man komplexe Zahlen als Summen auf und multipliziert gliedweise, indem man die Rechenregel $i^2 = -1$ benutzt,

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) . \quad (11.17)$$

- Durch Änderung des Vorzeichens des Imaginärteils einer komplexen Zahl erhält man ihre komplex konjugierte Zahl,

$$z = a + ib, \quad z^* = a - ib. \quad (11.18)$$

Multipliziert man eine komplexe Zahl z mit ihrer komplex-Konjugierten z^* , erhält man das Betragsquadrat von z ,

$$zz^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2, \quad (11.19)$$

das offenbar reell ist. Divisionen durch komplexe Zahlen kann man durch Erweiterung mit ihren konjugiert-komplexen Zahlen in reelle Divisionen verwandeln,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{a_2^2 + b_2^2}. \quad (11.20)$$

11.2.2 Komplexe Exponentialfunktion

- Wenn man komplexe Zahlen als Punkte in der komplexen Ebene auffasst, ist der Betrag einer komplexen Zahl der Abstand dieses Punktes vom Ursprung. Entsprechend ordnet man komplexen Zahlen durch

$$\tan \phi = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \phi = \arctan \frac{b}{a} \quad (11.21)$$

eine Phase zu. Damit kann man komplexe Zahlen auf die beiden Weisen

$$z = a + ib = |z|(\cos \phi + i \sin \phi) \quad (11.22)$$

darstellen.

- Entwickelt man die Exponentialfunktion e^x entsprechend dem Taylorschen Satz (2.22) um $x = 0$, so erhält man wegen $(e^x)' = e^x$ die Taylor-Reihe

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (11.23)$$

Ersetzt man in dieser Reihe die reelle Zahl x durch die imaginäre Zahl ix , folgt zuerst

$$e^{ix} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(ix)^{2j}}{(2j)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad (11.24)$$

wenn man die Summe in einen reellen und einen imaginären Teil aufspaltet. Die beiden ersten Terme auf der rechten Seite von (11.24) entsprechen gerade der Reihenentwicklung des Cosinus um $x = 0$,

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(ix)^{2j}}{(2j)!} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-x^2)^j}{(2j)!} = \cos x, \quad (11.25)$$

während der dritte Term die Reihenentwicklung des Sinus um $x = 0$ ergibt,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} = ix \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{(2k+1)!} = i \sin x . \quad (11.26)$$

Dies erlaubt die extrem nützliche Gleichsetzung

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x . \quad (11.27)$$

- Insbesondere lässt sich damit (11.22) in die Form

$$z = |z|e^{i\phi} \quad (11.28)$$

bringen. Die Sinus- und Cosinusfunktionen können wegen (11.27) durch die komplexe Exponentialfunktion in der Weise

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (11.29)$$

dargestellt werden. Diese Darstellungen erlauben bequeme Herleitungen trigonometrischer Beziehungen. Als Beispiel betrachten wir

$$\begin{aligned} \cos x \cos y &= \frac{(e^{ix} + e^{-ix})(e^{iy} + e^{-iy})}{4} \\ &= \frac{e^{i(x+y)} + e^{-i(x+y)}}{4} + \frac{e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)}}{4} \\ &= \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)] . \end{aligned} \quad (11.30)$$

11.2.3 Komplexe Darstellung harmonischer Schwingungen

- Wir kehren nun zur Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators (11.4) zurück und multiplizieren sie zunächst mit $2\dot{x}$ als integrierendem Faktor. Die Gleichung

$$2\dot{x}\ddot{x} + 2\omega_0^2\dot{x}x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d(\dot{x}^2)}{dt} + \omega_0^2 \frac{d(x^2)}{dt} = 0 \quad (11.31)$$

kann nun direkt integriert werden und ergibt modulo einer Konstanten, die wir zunächst vernachlässigen

$$\dot{x}^2 = -\omega_0^2 x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\dot{x}}{x} = \pm i\omega_0 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{\pm i\omega_0 t} . \quad (11.32)$$

- Die beiden Funktionen, die wir als Lösungen erhalten haben, sind linear unabhängig, denn

$$W = |-i\omega_0 e^{i\omega_0 t} e^{-i\omega_0 t} - i\omega_0 e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega_0 t}| = 2\omega_0 \neq 0 . \quad (11.33)$$

Natürlich hat eine komplexe Lösung an sich noch keinen physikalischen Sinn, sodass man den Real- oder Imaginärteil der komplexen Lösung wählt, sobald man eine physikalische Aussage treffen will.

11.2.4 Hermitesche Matrizen

- Zum Abschluss dieser einführenden Diskussion komplexer Zahlen beschäftigen wir uns noch mit einer komplexen Erweiterung der symmetrischen Matrizen. Sei A eine Matrix mit Elementen $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Wenn man alle ihre Elemente komplex konjugiert, heißt die Matrix selbst komplex konjugiert, $A^* = (a_{ij}^*)$. Wenn man sie zusätzlich transponiert, heißt sie adjungiert,

$$A^\dagger = (A^*)^T = (a_{ji}^*) . \quad (11.34)$$

Aus Gründen, die gleich offensichtlich werden, spielen solche Matrizen vor allem in der Quantenmechanik eine tragende Rolle, die gleich ihren Adjungierten sind,

$$A = A^\dagger . \quad (11.35)$$

Sie heißen *selbstadjungiert* oder *hermitesch*.

- Seien nun A eine hermitesche Matrix, λ_i und λ_j irgend zwei ihrer Eigenwerte und v_i und v_j die zugehörigen Eigenvektoren. Dann gilt nach Definition

$$Av_i = \lambda_i v_i , \quad Av_j = \lambda_j v_j . \quad (11.36)$$

Durch Multiplikation der ersten Gleichung mit $v_j^\dagger$ und der zweiten mit $v_i^\dagger$ erhalten wir

$$v_j^\dagger Av_i = \lambda_i \langle v_j, v_i \rangle , \quad v_i^\dagger Av_j = \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle , \quad (11.37)$$

denn das Skalarprodukt zweier komplexwertiger Vektoren v und w muss $\langle v, w \rangle = v^\dagger w$ lauten, um zu garantieren, dass $\langle v, v \rangle \geq 0$ ist. Die adjungierte der letzten Gleichung ist

$$v_i^\dagger A^\dagger v_j = v_j^\dagger Av_i = \lambda_j^* \langle v_i, v_j \rangle , \quad (11.38)$$

wobei wir im letzten Schritt ausgenutzt haben, dass nach Voraussetzung $A^\dagger = A$ ist. Subtrahieren wir dieses Ergebnis von der ersten Gleichung (11.37), folgt

$$0 = (\lambda_i - \lambda_j^*) \langle v_i, v_j \rangle . \quad (11.39)$$

Für $i = j$ folgt daraus wegen $\langle v_i, v_i \rangle > 0$, dass $\lambda_i = \lambda_i^*$ sein muss, was nur möglich ist, wenn die Eigenwerte λ_i *reell* sind. Darüber hinaus sieht man anhand von (11.39), dass Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten hermitescher Matrizen *orthogonal* sein müssen.

- Schließlich sei noch erwähnt, dass unitäre Matrizen U solche sind, deren Adjungierte gleich ihren Inversen sind,

$$U^\dagger = U^{-1} . \quad (11.40)$$

Sie verallgemeinern die Beziehung $R^T = R^{-1}$ orthogonaler Matrizen und treten ebenfalls in der Quantenmechanik häufig auf.

11.3 Der harmonische Oszillator II

11.3.1 Gedämpfte Schwingungen

- Wir erweitern nun schrittweise die Behandlung des harmonischen Oszillators, indem wir die Schwingungsgleichung (11.4) um physikalisch motivierte Terme ergänzen und ihre Lösungen entsprechend erweitern. Zunächst führen wir eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft $F_R = -b\dot{x}$ ($b > 0$) in die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators ein,

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0. \quad (11.41)$$

- Das ist wieder eine gewöhnliche, lineare, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, d.h. wir brauchen wieder zwei linear unabhängige Lösungen, aus denen wir die vollständige Lösung durch Linearkombination gewinnen. Die Lösung vereinfacht sich im Komplexen, d.h. wir suchen Lösungen $z(t) \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = 0. \quad (11.42)$$

- Für $z(t)$ versuchen wir den Ansatz

$$z(t) = e^{i\omega t}, \quad \dot{z}(t) = i\omega z(t), \quad \ddot{z}(t) = -\omega^2 z(t). \quad (11.43)$$

Die komplexe Bewegungsgleichung

$$(-m\omega^2 + i\omega b + k)e^{i\omega t} = 0 \quad (11.44)$$

muss für beliebige Zeiten t erfüllt sein, was nur möglich ist, wenn der Ausdruck in Klammern separat verschwindet:

$$-m\omega^2 + i\omega b + m\omega_0^2 = 0, \quad (11.45)$$

wobei wir wieder $k = m\omega_0^2$ gesetzt haben. Dies bedeutet

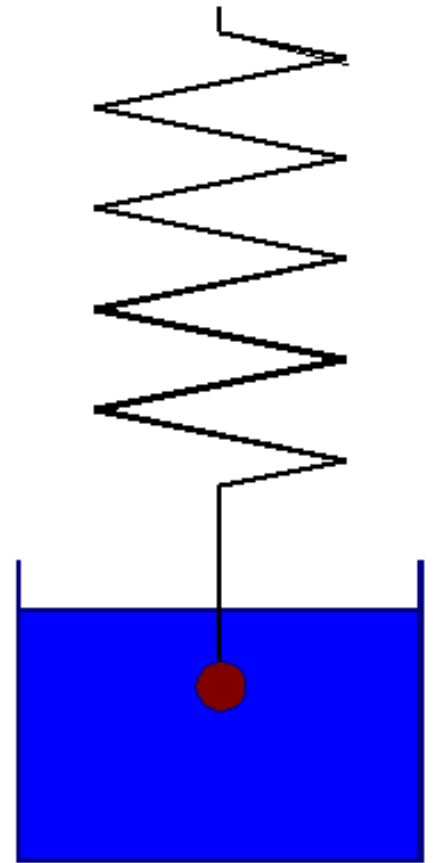
$$\omega_{1,2} = -\frac{-ib \pm \sqrt{4m^2\omega_0^2 - b^2}}{2m} = i\lambda \pm \bar{\omega}, \quad (11.46)$$

mit den Definitionen

$$\lambda := \frac{b}{2m}, \quad \bar{\omega} := \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}. \quad (11.47)$$

Die Wurzel zeigt, dass eine Fallunterscheidung in λ nötig wird, je nachdem, ob λ größer oder kleiner als ω_0 ist. Die Form der Lösung ist nach (11.43)

$$z(t) = e^{i(i\lambda \pm \bar{\omega})t} = e^{(-\lambda \pm i\bar{\omega})t}. \quad (11.48)$$



Beispiel für eine gedämpfte Schwingung

11.3.2 Schwache, starke und kritische Dämpfung

- Schwach gedämpft ist die Schwingung dann, wenn der Reibungsterm klein gegenüber den anderen Termen der Gleichung (11.42) ist, also $\lambda < \omega_0$. In diesem Fall ist $\bar{\omega} \in \mathbb{R}$, und wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\bar{\omega} > 0$ annehmen. Die zwei linear unabhängigen, speziellen Lösungen der Bewegungsgleichung lauten dann

$$z_{1,2}(t) = e^{-\lambda t} e^{\pm i \bar{\omega} t}. \quad (11.49)$$

Aus ihrem Real- und Imaginärteil ergeben sich zwei linear unabhängige, reelle Lösungen der Ausgangsgleichung,

$$x_{1,2}(t) = e^{-\lambda t} \times \begin{cases} \cos \bar{\omega} t \\ \sin \bar{\omega} t \end{cases}. \quad (11.50)$$

Die Amplitude ihrer Schwingung klingt exponentiell ab. Die allgemeine Lösung ist eine Linearkombination aus beiden.

- Umgekehrt ist bei starker Dämpfung $\lambda > \omega_0$. In diesem Fall ist $\bar{\omega}$ imaginär. Die beiden Lösungen sind

$$z_{1,2}(t) = e^{-(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t}, \quad (11.51)$$

das heißt, die Bewegung klingt exponentiell ab und hat den Schwingungscharakter verloren.

- Der Fall kritischer Dämpfung trennt die beiden vorherigen voneinander: $\lambda = \omega_0$: $\bar{\omega} = 0$. Dann liefert $z_1(t) = e^{-\lambda t}$ nur noch eine (reelle) Lösung. Die zweite notwendige, davon linear unabhängige Lösung können wir uns wieder durch d'Alembert-Reduktion verschaffen, indem wir den Ansatz

$$z_2(t) = f(t) z_1(t) \quad (11.52)$$

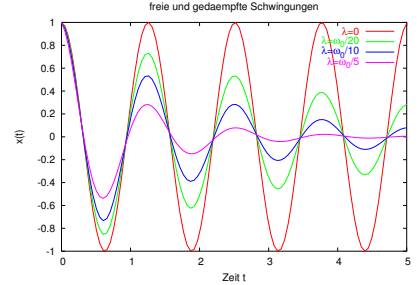
in die Gleichung (11.42) einsetzen und berücksichtigen, dass $z_1(t)$ bereits eine Lösung ist. Wir erhalten zunächst

$$(\ddot{f} z_1 + 2\dot{f} \dot{z}_1 + f \ddot{z}_1) + 2\lambda(\dot{f} z_1 + f \dot{z}_1) + \omega_0^2 f z_1 = 0, \quad (11.53)$$

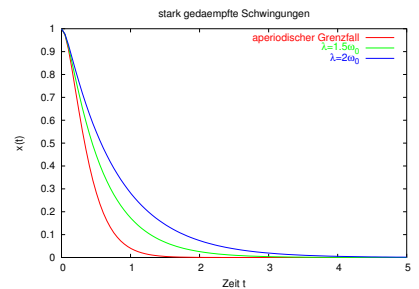
und daraus, da $\ddot{z}_1 + 2\lambda \dot{z}_1 + \omega_0^2 z_1 = 0$ ist,

$$\ddot{f} = -2\dot{f} \frac{\dot{z}_1 + \lambda z_1}{z_1} = 0, \quad (11.54)$$

da $\dot{z}_1 + \lambda z_1 = 0$ ist. Demnach muss $\dot{f}$ eine Konstante sein, und $f = t$ ist die einfachste Lösung der Gleichung (11.54). Daraus erhalten wir $z_2 = t e^{-\lambda t}$.



Freie Schwingung und schwach gedämpfte Schwingungen mit verschieden starker Dämpfung



Stark gedämpfte Schwingungen und aperiodischer Grenzfall

- Die lineare Unabhängigkeit der beiden Lösungen kann man wieder anhand von (2.14) feststellen, denn

$$W = z_1 \dot{z}_2 - \dot{z}_1 z_2 = z_1(z_1 - \lambda t z_1) + \lambda t z_1^2 = z_1^2 = e^{-2\lambda t} \neq 0. \quad (11.55)$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$z(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\lambda t}. \quad (11.56)$$

Sie stellt den so genannten *aperiodischen Grenzfall* dar.

- Alternativ dazu kann man sich die zweite Lösung durch einen Grenzübergang aus dem Fall schwacher Dämpfung verschaffen, indem man den Grenzübergang $\bar{\omega} \rightarrow 0$ durchführt. In diesem Fall lautet die allgemeine Lösung für $z(t=0) = 0$ und $\dot{z}(t=0) = v_0$

$$z(t) = e^{-\lambda t} \frac{v_0}{\bar{\omega}} \sin \bar{\omega} t. \quad (11.57)$$

Der Grenzübergang für $\bar{\omega} \rightarrow 0$ liefert

$$\lim_{\bar{\omega} \rightarrow 0} z(t) = e^{-\lambda t} v_0 t \lim_{\bar{\omega} \rightarrow 0} \frac{\sin \bar{\omega} t}{\bar{\omega} t} = e^{-\lambda t} v_0 t. \quad (11.58)$$

Damit erhalten wir wieder als zweite, von $z_1(t)$ linear unabhängige Lösung

$$z_2(t) = t e^{-\lambda t}, \quad (11.59)$$

wie zuvor.

Kapitel 12

Pendelschwingung und Resonanz

12.1 Pendel

12.1.1 Mathematisches Pendel

- Ein Massenpunkt der Masse M sei im homogenen Gravitationsfeld an einem masselosen Faden der Länge l aufgehängt. Das Pendel bewege sich in der x - y -Ebene. Die Gravitationskraft ist $\vec{F} = -Mg\vec{e}_y$, wobei g die Schwerebeschleunigung ist und $\vec{e}_y$ nach oben zeigt. Bei einem Auslenkwinkel ϕ aus der Ruhelage zeigt der Faden in die Richtung

$$\begin{aligned}\vec{x} &= l\vec{e} = l(\sin\phi\vec{e}_x - \cos\phi\vec{e}_y) \\ \dot{\vec{x}} &= l\dot{\phi}(\cos\phi\vec{e}_x + \sin\phi\vec{e}_y) \\ \ddot{\vec{x}} &= l\ddot{\phi}(\cos\phi\vec{e}_x + \sin\phi\vec{e}_y) - l\dot{\phi}^2(\sin\phi\vec{e}_x - \cos\phi\vec{e}_y) \approx l\ddot{\phi}\vec{e}_x.\end{aligned}\tag{12.1}$$

Senkrecht zum Pendel wirkt die Rückstellkraft

$$\begin{aligned}\vec{F}_r &= \vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{e})\vec{e} \\ &= -Mg\vec{e}_y - (Mg\cos\phi)(\sin\phi\vec{e}_x - \cos\phi\vec{e}_y) \\ &= -\sin^2\phi Mg\vec{e}_y - Mg\cos\phi\sin\phi\vec{e}_x \approx -Mg\phi\vec{e}_x.\end{aligned}\tag{12.2}$$

Damit wird die linearisierte Bewegungsgleichung eindimensional, und die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\phi = 0.\tag{12.3}$$

Das ist offensichtlich eine harmonische Oszillorgleichung für ϕ . Die Schwingungsfrequenz ist

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}},\tag{12.4}$$

unabhängig von der Masse M des Pendelkörpers.

12.1.2 Physikalisches Pendel

- Nun ersetzen wir den Massenpunkt M durch eine homogene Scheibe derselben Masse, der Dicke d und mit Radius R , die in ihrem Schwerpunkt an der Pendelstange fixiert wird. Ändert sich dadurch das Verhalten des Pendels?
- Offenbar müssen wir berücksichtigen, dass sich der Pendelkörper dreht und wegen seines Trägheitsmoments einen Drehimpuls bekommt, der sich während der Pendelschwingung fortwährend ändert. Die Gravitationskraft muss also das Drehmoment zur Änderung des Drehimpulses aufbringen.
- Bestimmen wir zunächst den Trägheitstensor. Dazu führen wir Zylinderkoordinaten so ein, dass die z -Richtung senkrecht zur Scheibe steht und der Ursprung im Scheibenmittelpunkt liegt. Wieder müssen die Deviationsmomente aus Symmetriegründen verschwinden und die beiden Hauptträgheitsmomente Θ_{11} und Θ_{22} gleich sein. Wir brauchen das dritte Hauptträgheitsmoment Θ_{33} brauchen, da um die z -Achse der Scheibe gedreht werden wird. Also berechnen wir

$$\begin{aligned}\Theta_{33} &= \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-d/2}^{d/2} dz \rho \left((r^2 + z^2) - z^2 \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \rho R^4 d \\ &= \frac{MR^2}{2},\end{aligned}\tag{12.5}$$

mit der Masse $M = \pi \rho R^2 d$. Dies ist das Trägheitsmoment um die z -Achse der Scheibe. Aber da die Drehachse um die Pendellänge l entfernt ist, ist das gesamte Trägheitsmoment durch die Summe

$$\Theta = \frac{MR^2}{2} + Ml^2\tag{12.6}$$

gegeben.

- Das Drehmoment der Gravitationskraft,

$$\vec{M} = \vec{F} \times l\vec{e} = -Mg\vec{e}_y \times l \sin \phi \vec{e}_x = Mgl\phi \vec{e}_z,\tag{12.7}$$

bewirkt die Drehimpulsänderung

$$\dot{\vec{L}} = \Theta \dot{\vec{\omega}} = -M \left(\frac{R^2}{2} + l^2 \right) \ddot{\phi} \vec{e}_z,\tag{12.8}$$

woraus die Bewegungsgleichung

$$\left(\frac{R^2}{2} + l^2 \right) \ddot{\phi} + gl\phi = 0\tag{12.9}$$

folgt. Demnach ist jetzt die Schwingungsfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{2gl}{R^2 + 2l^2}}. \quad (12.10)$$

Sie hängt nach wie vor nicht von der Pendelmasse ab, wird aber mit zunehmendem Scheibenradius immer kleiner. Für $R \rightarrow 0$ bekommen wir das Ergebnis (12.4) für das mathematische Pendel zurück.

12.1.3 Das Foucaultsche Pendel

- Auf ein Pendel, das auf der Erde schwingt, wirkt die Corioliskraft $\vec{F}_C = 2m\dot{\vec{x}} \times \vec{\Omega}$. Es folgt also aus der Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vec{x}} - 2\dot{\vec{x}} \times \vec{\Omega} + \omega^2 \vec{x} = 0, \quad (12.11)$$

wobei $\omega = \sqrt{l/g}$ die übliche Pendelfrequenz und $\vec{\Omega}$ die Winkelgeschwindigkeit der Erde sind. Die Corioliskraft ist klein gegenüber der Rückstellkraft, so dass wir die Pendelbewegung als Schwingung in einer Ebene nähern können. Wir wählen dafür die x - y -Ebene und führen die z -Achse als lokale Senkrechte ein. Für kleine Auslenkungen ist $\dot{z}$ vernachlässigbar klein, und

$$\dot{\vec{x}} \times \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \dot{y}\Omega_z \\ -\dot{x}\Omega_z \\ \dot{x}\Omega_y - \dot{y}\Omega_x \end{pmatrix}. \quad (12.12)$$

Die Bewegungsgleichungen in der x - y -Ebene lauten daher

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y}\Omega_z + \omega^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + 2\dot{x}\Omega_z + \omega^2 y &= 0. \end{aligned} \quad (12.13)$$

Für die komplexe Größe $\xi := x + iy$ erhalten wir

$$\ddot{\xi} + 2i\Omega_z \dot{\xi} + \omega^2 \xi = 0. \quad (12.14)$$

Dies ist eine Schwingung mit imaginärer Dämpfung $\lambda = i\Omega_z$. Da die Rotationsperiode der Erde sehr viel größer als die Schwingungsperiode des Pendels ist, ist die Dämpfung schwach, $\Omega_z \ll \omega$. Die Lösung ist dann durch (11.47) gegeben,

$$\begin{aligned} x(t) + iy(t) = \xi(t) &= e^{-i\Omega_z t} e^{\pm i\omega t} \\ &= [\cos(\Omega_z t) - i \sin(\Omega_z t)] [x_0(t) + iy_0(t)] \end{aligned} \quad (12.15)$$

wobei $x_0(t)$ und $y_0(t)$ die Pendelbewegung bei $\Omega_z = 0$ angeben. Schreiben wir dieses Ergebnis wieder als Vektor

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega_z t & \sin \Omega_z t \\ -\sin \Omega_z t & \cos \Omega_z t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{pmatrix}, \quad (12.16)$$

dann sehen wird, dass sich die Pendelebene mit der Frequenz Ω_z dreht.

12.2 Erzwungene Schwingungen, Resonanz

12.2.1 Allgemeine Lösung bei periodischem Antrieb

- Auf den Massenpunkt wirke nun von außen eine periodische Kraft,

$$F_e = c \cos \omega t, \quad (12.17)$$

so dass die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = c \cos \omega t. \quad (12.18)$$

lautet.

- Wir beschreiten wieder den Lösungsweg in der komplexen Ebene, d.h. wir suchen die Lösung der Gleichung

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + kz = c e^{i\omega t} \quad (12.19)$$

mit $z(t) \in \mathbb{C}$, aus der wir später die reelle Lösung $x(t) = \Re[z(t)]$ erhalten.

- Zur allgemeinen Lösung dieser inhomogenen, gewöhnlichen, linearen Differentialgleichung 2. Ordnung benötigen wir eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung plus die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Letztere ist uns schon von vorher bekannt,

$$z_h(t) = e^{-\lambda t} e^{\pm i\bar{\omega} t}, \quad (12.20)$$

mit

$$\lambda = \frac{b}{2m} \quad \text{und} \quad \bar{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}, \quad (12.21)$$

falls $\lambda < \omega_0$ ist.

- Die partikuläre Lösung gewinnen wir über den Ansatz

$$z_p(t) = z_0 e^{i\omega t}, \quad (12.22)$$

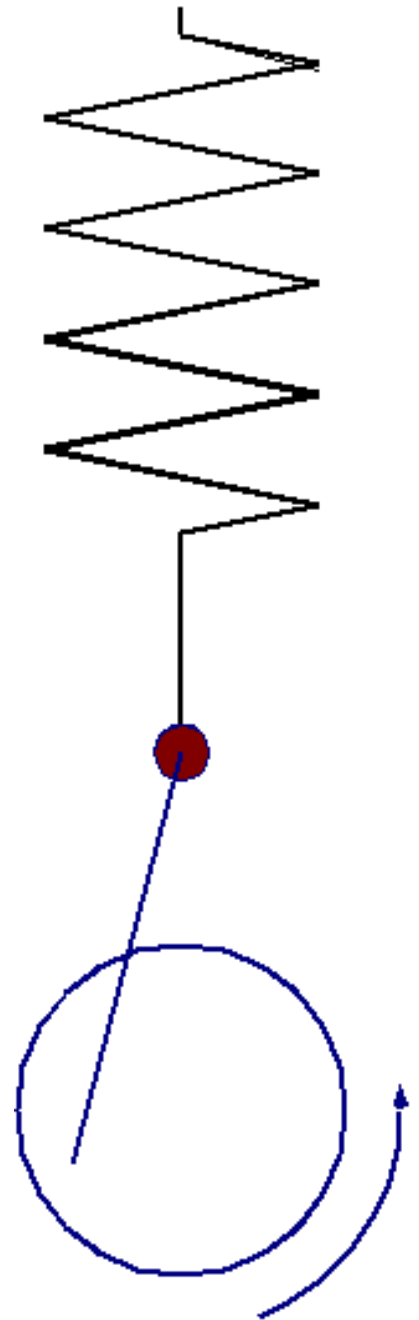
der auf die Gleichung

$$(-m\omega^2 + ib\omega + k)z_0 = c \quad (12.23)$$

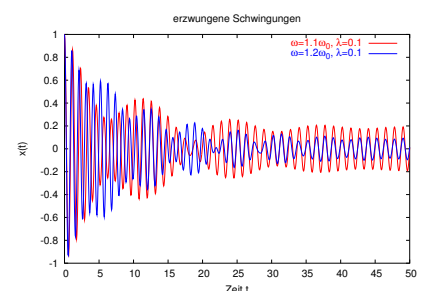
führt, aus der wir

$$z_0 = \frac{c/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\omega\lambda} = \frac{c/m [(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\omega\lambda]}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2} \quad (12.24)$$

erhalten.



erzwungene Schwingung: Federpendel mit periodischem Antrieb



Erzwungene Schwingungen mit schwacher Dämpfung; deutlich sichtbar sind der Einschwingvorgang und Schwebungen

- Die Zerlegung

$$z_0 = Ae^{-i\delta} = |z_0|e^{-i\delta} \quad (12.25)$$

führt unter der Annahme $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ auf die Amplitude

$$A = \frac{c/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\lambda^2}}, \quad (12.26)$$

und die Phase δ ist durch

$$\tan \delta = \frac{2\omega\lambda}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (12.27)$$

gegeben. $A \geq 0$ und $0 \leq \delta < \pi$ wegen $\lambda \geq 0$.

- Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist demnach

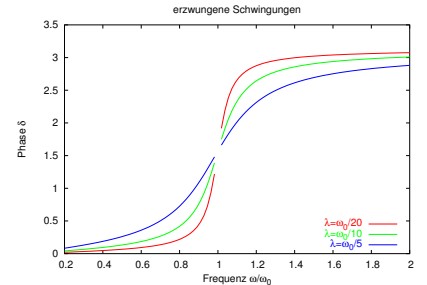
$$x_p(t) = A \cos(\omega t - \delta), \quad (12.28)$$

was auf die allgemeine Lösung

$$x(t) = A \cos(\omega t - \delta) + \bar{A}e^{-\lambda t} \cos(\bar{\omega}t - \bar{\delta}) \quad (12.29)$$

führt. A und δ sind bereits festgelegt, wogegen $\bar{A}$ und $\bar{\delta}$ noch zur Erfüllung der Anfangsbedingungen zur Verfügung stehen.

- Für $t \gg 1/\lambda$ entfällt der zweite Term wegen der exponentiellen Dämpfung. Nach einer *Einschwingung* schwingt der Oszillator dann mit derselben Frequenz wie die äußere Kraft, aber um die Phase δ verschoben. Für $\omega = \omega_0$ ist $\delta = \pi/2$.



Phase δ der erzwungenen Schwingung nach dem Einschwingen für verschiedene Werte der Dämpfung λ

12.2.2 Resonanz und Halbwertsbreite

- Die Amplitude A aus (12.26) zeigt das typische *Resonanzverhalten*. Sie erreicht ein Maximum bei der Frequenz

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}, \quad (12.30)$$

das die Höhe

$$A_{\max} = \frac{c/m}{2\lambda \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \quad (12.31)$$

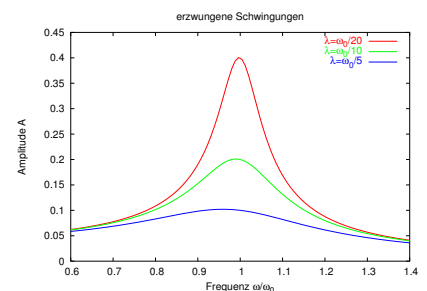
erreicht.

- Die Halbwertsbreite der Resonanz ist durch die Bedingung

$$A^2(\omega) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} A_{\max}^2 \quad (12.32)$$

bestimmt, die für

$$\omega_{1,2} = \omega_{\max} \pm 2\lambda \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad (12.33)$$



Resonanzverhalten der Amplitude erzwungener Schwingungen

erfüllt ist. Im Fall schwacher Dämpfung, $\lambda \ll \omega_0$, ist

$$\omega_{\max} \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2} \right) \approx \omega_0 \quad (12.34)$$

und

$$\omega_{1,2} \approx \omega_0 \pm \lambda, \quad (12.35)$$

d.h. die Halbwertsbreite ist

$$\Gamma = 2\lambda \quad (12.36)$$

im Grenzfall schwacher Dämpfung.

12.2.3 Grenzfall schwacher Dämpfung

- In diesem Fall kann die allgemeine Lösung in der Form

$$x(t) = A \cos(\omega t - \delta) + e^{-\lambda t} (C_1 \cos \bar{\omega} t + C_2 \sin \bar{\omega} t) \quad (12.37)$$

geschrieben werden.

- Die Anfangsbedingungen legen die verbleibenden Konstanten fest,

$$\begin{aligned} x(t=0) &= A \cos \delta + C_1 = x_0 \\ &\Rightarrow C_1 = x_0 - A \cos \delta \\ \dot{x}(t=0) &= A\omega \sin \delta - \lambda C_1 + C_2 \bar{\omega} = v_0 \\ &\Rightarrow C_2 = \frac{1}{\bar{\omega}} (v_0 + \lambda x_0 - A\lambda \cos \delta - A\omega \sin \delta). \end{aligned}$$

- Im Grenzfall $\lambda \rightarrow 0$ gilt $\delta \rightarrow 0$, und

$$C_1 \rightarrow x_0 - A, \quad C_2 \rightarrow \frac{v_0}{\omega_0}, \quad A \rightarrow \frac{c/m}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (12.38)$$

Die allgemeine Lösung nimmt dann die Gestalt

$$x(t) = \frac{c/m}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) + x_0 \cos \bar{\omega} t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \quad (12.39)$$

an.

- Für $\omega \rightarrow \omega_0$ geht der erste Term gegen den Grenzwert

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{\cos \omega t - \cos \omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega^2} = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{t \sin \omega t}{2\omega} = \frac{t}{2} \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0}, \quad (12.40)$$

was sich anhand der Regeln von l'Hospital feststellen lässt.

- Im Spezialfall $x_0 = 0$ erhält man dann die Lösung

$$x(t) = \left(\frac{v_0}{\omega_0} + \frac{ct}{2m\omega_0} \right) \sin \omega_0 t. \quad (12.41)$$

Der zweite Term in Klammern wächst linear mit der Zeit, und man spricht von einem *säkularen Anwachsen* der Amplitude.

12.2.4 Beispiel: Die natürliche Breite von Spektrallinien

- Ein Beispiel für eine erzwungene Schwingung ist ein Elektron in einer Atomhülle, das durch einfallende elektromagnetische Strahlung angeregt wird.
- Näherungsweise beschreiben wir das Atom als Dipol, d.h. das Elektron bewegt sich längs der x -Achse um den Atomkern. Das elektrische Feld der einfallenden Strahlung kann dann in der Form

$$E(t) = E_0 \cos \omega t \quad (12.42)$$

geschrieben werden.

- Der Atomkern übt eine Rückstellkraft auf das Elektron aus, die näherungsweise linear ist; das Elektron schwingt also harmonisch um den Atomkern. Die Kreisfrequenz der Schwingung sei ω_0 .
- Das elektrische Feld übt eine Kraft auf das Elektron aus, die Lorentzkraft

$$F_e(t) = qE(t) = qE_0 \cos \omega t, \quad (12.43)$$

wobei die Elementarladung q in den so genannten *cgs*-Einheiten angegeben wird,

$$q = 4.8 \times 10^{-10} \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-1}. \quad (12.44)$$

- Die Lorentzkraft beschleunigt das Elektron. Da beschleunigte Ladungen strahlen, verliert das bestrahlte Atom Energie, wodurch die Schwingung gedämpft wird. In der klassischen Elektrodynamik beträgt diese Dämpfung

$$b = \frac{2q^2}{3c^3} \omega_0^2 \quad (12.45)$$

(Einheiten beachten!), wobei $c = 3.0 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist. Die Dämpfungskonstante ist also

$$\lambda = \frac{b}{2m_e} = \frac{q^2}{3m_e c^3} \omega_0^2, \quad (12.46)$$

wobei die Elektronenmasse $m_e = 9.11 \times 10^{-28} \text{ g}$ ist.

- Wenn das Atom durch ein kontinuierliches Spektrum elektromagnetischer Strahlung beleuchtet wird, erzeugt es eine *Absorptionslinie*, deren Profil durch das Quadrat der Resonanzkurve (12.26) gegeben ist,

$$A^2 = \frac{q^2 E_0^2 / m^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \lambda^2}, \quad (12.47)$$

das auch als Lorentzprofil bezeichnet wird.

- Die Breite dieser Linie ist also $\Gamma = 2\lambda$, oder

$$\Gamma = \frac{2q^2}{3m_e c^3} \omega_0^2. \quad (12.48)$$

Sie heißt *natürliche Linienbreite*.

- Der Kreisfrequenz ω entspricht eine Lichtwellenlänge von $\ell = 2\pi c/\omega$, d.h. die natürliche Linienbreite ist

$$\Gamma = \frac{8\pi^2 q^2}{3m_e c} \ell_0^{-2} = 0.22 \text{ s}^{-1} \left(\frac{\text{cm}}{\ell_0} \right)^2. \quad (12.49)$$

Für Wellenlängen im Bereich des sichtbaren Lichts ist $\ell_0 \approx 5 \times 10^{-5} \text{ cm}$, also $\Gamma \approx 10^8 \text{ s}^{-1}$.

- Umgerechnet in Wellenlängen entspricht dem eine Breite von

$$\delta\ell = \left| \frac{d\ell}{d\omega} \right|_{\ell_0} \Gamma = \frac{2\pi c}{\omega_0^2} = \ell_0 \frac{\Gamma}{\omega_0}. \quad (12.50)$$

Mit $\omega_0 = 2\pi c/\ell_0 \approx 3.8 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ für $\ell_0 \approx 5 \times 10^{-5} \text{ cm}$ folgt zum Beispiel $\delta\ell \approx 1.3 \times 10^{-12} \text{ cm} \approx 1.3 \times 10^{-4} \text{ \AA}$.

12.2.5 Allgemeine Lösung für erzwungene Schwingungen

- Für harmonisch getriebene Schwingungen konnten wir die partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung durch den Ansatz (12.22) erraten. Es gibt aber ein allgemeines Konstruktionsverfahren, das bei beliebigen äußeren Kräften anwendbar ist.
- Wir gehen von der ungedämpften Gleichung

$$m\ddot{x} + kx = F(t) \quad \text{bzw.} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} \quad (12.51)$$

aus und schreiben sie in der Form

$$\frac{d}{dt} (\dot{x} + i\omega x) - i\omega (\dot{x} + i\omega x) = \frac{F(t)}{m}. \quad (12.52)$$

Dies legt nahe, die neue Funktion

$$\xi(t) = \dot{x}(t) + i\omega x(t) \quad (12.53)$$

einzuführen, durch die sich die Ausgangsgleichung auf eine Differentialgleichung 1. Ordnung reduziert,

$$\dot{\xi} - i\omega \xi = \frac{F(t)}{m}. \quad (12.54)$$

- Die dazugehörige homogene Gleichung, $\ddot{\xi} - i\omega\xi = 0$, hat offenbar die Lösung $\xi = Ae^{i\omega t}$. Die Lösung der inhomogenen Gleichung erhalten wir, indem wir die Konstante A variieren, also anstelle von A eine Funktion der Zeit erlauben, $\xi(t) = A(t)e^{i\omega t}$. Eingesetzt in (12.54) ergibt dies

$$(\dot{A} + iA\omega)e^{i\omega t} - i\omega Ae^{i\omega t} = \dot{A}e^{i\omega t} = \frac{F(t)}{m}, \quad (12.55)$$

oder, durch einfache Integration, die Amplitude

$$A(t) = \int_0^t \frac{F(t')}{m} e^{-i\omega t'} dt'. \quad (12.56)$$

Die gesamte Lösung für beliebige äußere Kraft lautet dann

$$\xi(t) = \xi_0 + e^{i\omega t} \left(\int_0^t \frac{F(t')}{m} e^{-i\omega t'} dt' \right). \quad (12.57)$$

- Daraus kann schließlich die Lösung $x(t)$ gewonnen werden. Da $x(t)$ reell sein muss, folgt aus (12.53), dass $x(t)$ einfach gleich dem Imaginärteil von ξ geteilt durch ω sein muss.

12.2.6 Beispiel: Schwingung nach einem Kraftstoß

- Als Beispiel betrachten wir eine Kraft, die zwischen den Zeiten $t = 0$ und $t = \tau$ den konstanten Betrag F_0 hat und sonst verschwindet. Nach (12.57) ist dann

$$\xi(t) = \xi_0 + e^{i\omega t} \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \frac{iF_0}{m\omega} (e^{-i\omega t} - 1) & (0 \leq t \leq \tau) \\ \frac{iF_0}{m\omega} (e^{-i\omega \tau} - 1) & (t > \tau) \end{cases}. \quad (12.58)$$

- Wenn wir verlangen, dass der Oszillator anfangs in Ruhe ist, also $\dot{x} = 0 = \dot{x}$ bis $t = 0$, muss $\xi_0 = 0$ sein. Dann ist

$$\xi(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \frac{iF_0}{m\omega} (1 - e^{i\omega t}) & (0 \leq t \leq \tau) \\ \frac{iF_0}{m\omega} (e^{i\omega(t-\tau)} - e^{i\omega t}) & (t \geq \tau) \end{cases}, \quad (12.59)$$

woraus wir

$$x(t) = \frac{\Im \xi(t)}{\omega} = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) & (0 \leq t \leq \tau) \\ \frac{F_0}{m\omega^2} (\cos \omega(t - \tau) - \cos \omega t) & (t > \tau) \end{cases} \quad (12.60)$$

erhalten.