

8. Übungsblatt

Ausgabe 09-12-2014 – Abgabe 16/17-12-2014 – Besprechung 07-01-2015

1. Aufgabe [6 Punkte]: Biot-Savart'sches Gesetz und Helmholtzspule

- (a) Eine unendlich dünne, kreisförmige Leiterschleife mit Radius R werde von einem Strom I durchflossen. Berechnen Sie die magnetische Flussdichte auf der Symmetrieachse. [3P]
- (b) Betrachten Sie eine weitere Leiterschleife im Abstand d mit gleicher Ausrichtung. Beide Leiterschleifen werden von einem Strom I in gleicher Richtung durchflossen. Berechnen Sie die magnetische Flussdichte auf der gemeinsamen Symmetrieachse. [1P]
- (c) Wie muss der Abstand d gewählt werden, damit das Magnetfeld auf der gemeinsamen Symmetrieachse in der Mitte zwischen den beiden Leiterschleifen möglichst homogen wird? [2P]

2. Aufgabe [6 Punkte]: Vektorpotential eines homogenen Magnetfeldes

In der Vorlesung ist gezeigt worden, dass ein Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ als Rotation eines Vektorpotentials $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ dargestellt werden kann, $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$. Da die Rotation eines Gradienten identisch verschwindet, ist die Wahl des Vektorpotentials nicht eindeutig, d.h., für beliebige skalare Funktionen $\Gamma(\mathbf{r})$ erzeugen die Vektorpotentiale $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\Gamma(\mathbf{r})$ das gleiche Magnetfeld. Diese Freiheit der Wahl des Vektorpotentials nennt man *Eichfreiheit*. Eine Funktion $\Gamma(\mathbf{r})$, die verschiedene Vektorpotentiale ineinander überführt, wird als *Eichtransformation* bezeichnet. Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, erfüllt die Definition

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r',$$

des Vektorpotentials einer Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ die sogenannte Coulombbeziehung $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$. Betrachten Sie nun das konstante, homogene Magnetfeld in z -Richtung, $\mathbf{B} = (0, 0, B)$.

- (a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (0, xB, 0)$ ein Vektorpotential für $\mathbf{B}$ ist. [1P]
- (b) Finden Sie ein Vektorpotential $\mathbf{A}'(\mathbf{r})$ für $\mathbf{B}$, das in x -Richtung orientiert ist und geben Sie eine Eichtransformation an, die $\mathbf{A}'$ in $\mathbf{A}$ überführt. [3P]
- (c) Zeigen Sie, dass auch $\mathbf{A}''(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$ ein Vektorpotential für $\mathbf{B}$ ist und geben Sie wieder eine Eichtransformation an, die $\mathbf{A}''$ in $\mathbf{A}$ überführt. [2P]

3. Aufgabe [8 Punkte]: Magnetfeld und Vektorpotential

Ein unendlich dünner Draht in der Form eines geschlossenen Quadrats der Seitenlänge $2a$ liege in der x - y -Ebene mit Mittelpunkt im Ursprung. Es werde von einer Stromstärke I gegen den Uhrzeigersinn durch flossen.

- (a) Wie lautet die zugehörige Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$? [1P]
- (b) Benutzen Sie den in der Vorlesung abgeleiteten Zusammenhang

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r',$$

um aus der Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ das Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ im gesamten Raum zu berechnen. [4P]

- (c) Berechnen Sie das Magnetfeld $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ auf der z -Achse. [3P]