

Programm PEP1

Fakultät für Physik und Astronomie
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg
Wintersemester 2013/2014
Karlheinz Meier

1. Methoden der Experimentalphysik

2. Mechanik

- 2.1. Mechanik des Massepunktes
 - 2.1.1. Längen- und Zeitmessung
 - 2.1.2. Kinematik
 - 2.1.3. Newtonsche Dynamik
 - 2.1.4. Impuls und Stoßprozesse
 - 2.1.5. Mechanische Energie
 - 2.1.6. Kräfte und Wechselwirkungen
 - 2.1.7. Bezugssysteme
- 2.2. Mechanik starrer Körper
 - 2.2.1. Kinematik, Drehmoment
 - 2.2.2. Statik
 - 2.2.3. Rotation um eine feste Achse
 - 2.2.4. Drehimpuls
- 2.3. Mechanik deformierbarer Körper
 - 2.3.1. Feste Stoffe
 - 2.3.2. Ruhende Flüssigkeiten und Gase
 - 2.3.3. Strömende Flüssigkeiten und Gas

3. Thermodynamik

- 3.1. Phänomenologische Grundlagen
- 3.2. Kinetische Gastheorie
- 3.3. Grundbegriffe der Thermodynamik
- 3.4. 2. Hauptsatz der Thermodynamik
- 3.5. Aggregatzustände und Phasenübergänge
- 3.6. Reale Gase und tiefe Temperaturen

PEP1 - Experimentalphysik I

Mechanik + Wärme

Karlheinz Meier, WS 13/14

"physis" (gr.)

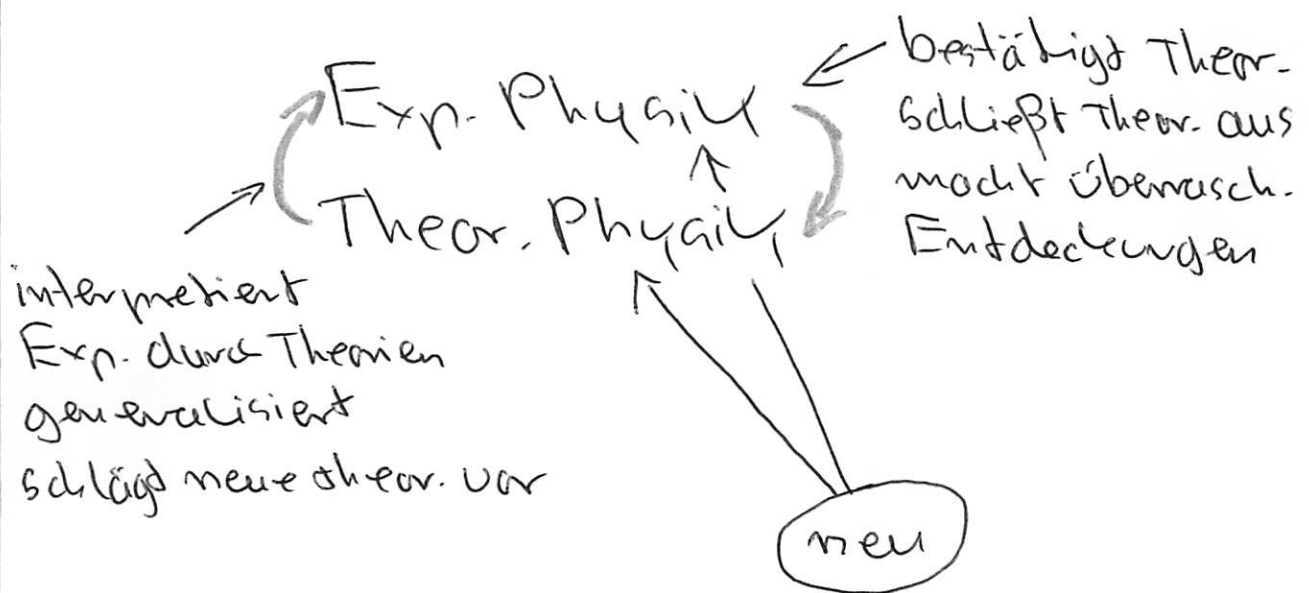
Die Welt ist ein Kampf zwischen
"nomos" (Ordnung + Gesetz) und
"physis" (Natur)

also: ursprünglich alle Naturerschein.
Dies ist heute noch in der Sprache
sichtbar:

- Physikus (Amtsarzt) (alt.)
 - physician (Arzt) (engl.)
 - physicist (Physiker) (engl.)
- ↑ SIE!

Ende 18. Jhd.: Physik wird ein
Teilgebiet der Naturwissenschaften
↳ Ausschuß der "Lebenswissenschaften"
Heute: Ausweitung → z.B. Biophysik

Def. Physik ist die Lehre von solchen
Naturvorgängen, die exp. Erforschung,
messender (quant.) Erfassung und
mathematischer Abstraktion zugänglich
sind sowie allgemeingültigen Gesetzen
unterliegen.



Simulationsphysik
simuliert komplexe
Systeme aus vielen Teilchen,
inspiriert Theoriebildung
↳ insb. Astro, Bio

Jetzt: PEP1 in 20 Minuten

Folie Vorlesungsplanung

Mechanik des Massepunktes

→ Abstraktion!

$$F = \underbrace{m_T \cdot a}_{\text{Trägheit}} = \underbrace{m_S \cdot g}_{\text{Gravitation (Erde)}}$$

$$m_T = m_S, \text{ dann } a = g \quad !?$$

DEMO Kugel + Papier

Mechanische Arbeit

Arbeit $\rightarrow$ gesp. Energie $\rightarrow$ Bew. En.
 $\hookrightarrow$ Verlust

DEMO beide Möglichkeiten

DEMO Flummiball

$\rightarrow$ Wärme

Helmholtz, HD, ~1850

Starrer Körper

räumliche Verteilung von Masse-
punkten $\rightarrow$ Form

DEMO Freier Fall und Rotation
starrer Körper

$\rightarrow$ Trägheitsmoment, Drehimpuls

Deformierbare Körper

Änderung der Form, Elastizität

DEMO Schaumstoff, Wasser, Luft

Wärme und Temperatur

Völlig neues Phänomen,
zunächst kein Bezug zur Mechanik
Kontext: Phänomenologie

DEMO Gas thermometer

$V \sim T$
 Zustandsgrößen $\rightarrow$ Q (Wärme) $\leftarrow$ Energie
 "Boyle-Mariotte"

Teil der Gasgleichung

Brücke zwischen Wärmelehre
und Mechanik

Idee: Extrem viele Teilchen

↳ Mittelwerte (Statistik!)

Boltzmann Ende 19. Jhd.

DEMO: Kugelwage

Durch 2 Inputs übertrag

Temperatur $\sim$ Bewegungsenergie

↑
Mittelwerte mechanischer
Größen!

1. Methoden der Exp. Physik

Experimente: planmäßige + quantitative
Beobachtung der Natur

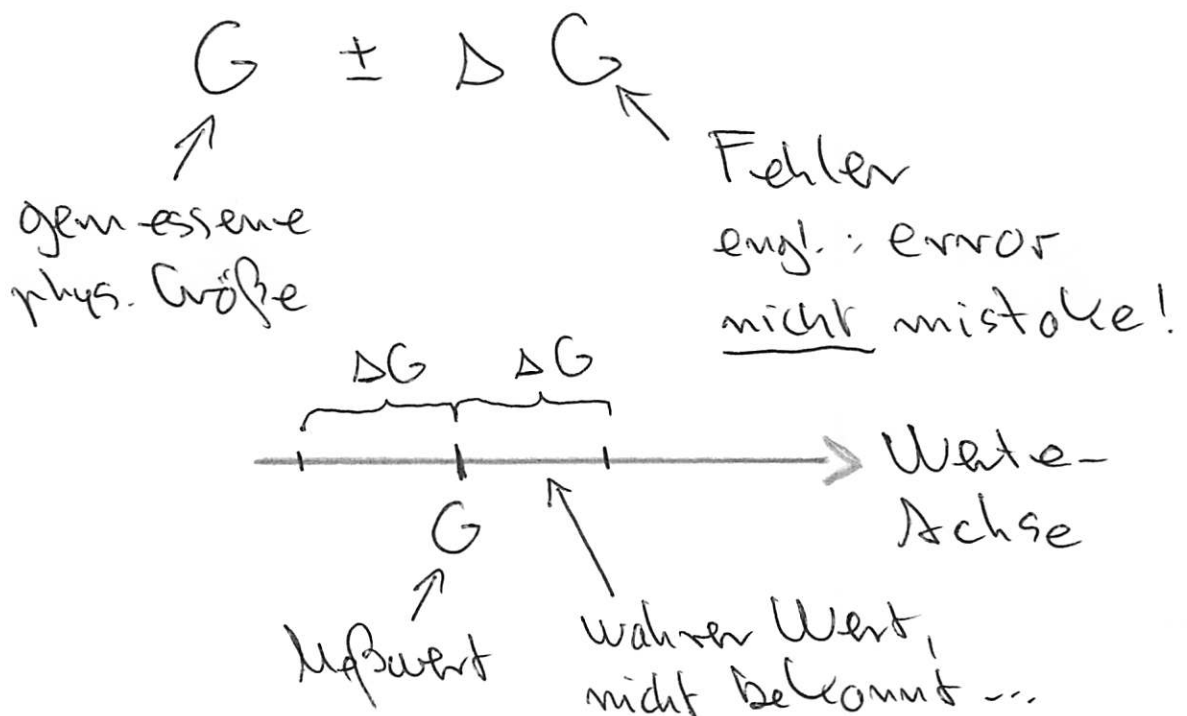
Dazu: Größen, die durch Messen oder
Zählen quantitativ bestimmt werden.

G : "physikalische Größe"

z.B. Länge, Zeit, Temperatur, ...

prinzipiell: beliebig genau meßbar
(→ später in der Quantenphysik (QEP)
grundsätzliche Einschränkungen der
Meßbarkeit)

ABER: Aus "technischen Gründen"
Einschränkungen der Meßgenauigkeit.



Gründe für Fehler:

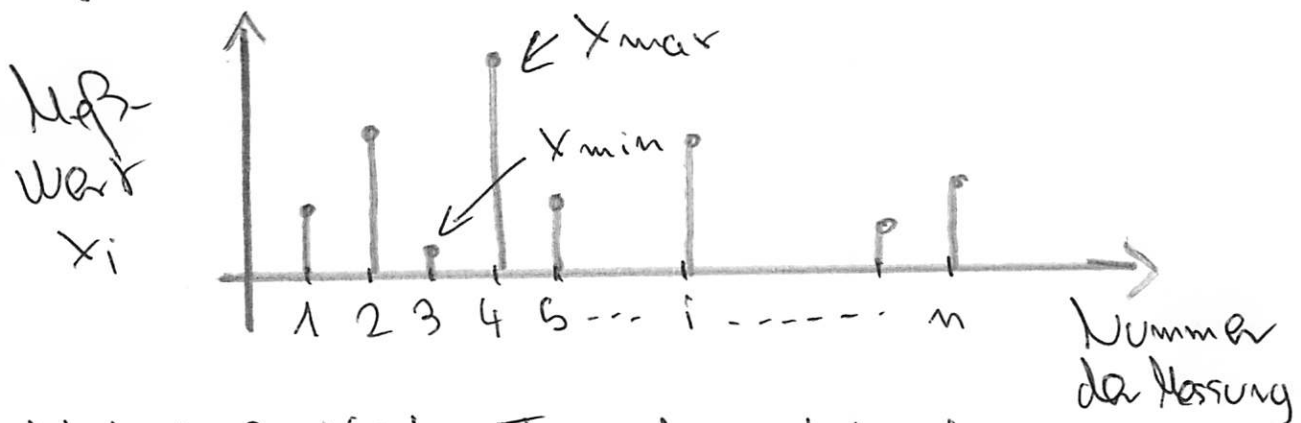
- unkontrollierte, zeitlich schwankende Einflüsse auf Messung
- Beeinflussung durch den Meßprozeß selbst (z.B. Thermometer)
- unverständliche Meßgeräte

DEMO Messung von Fallzeiten

→ Achtung: Verwendung in Übungsaufgabe

also: Messungen $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$
für eine phys. Größe

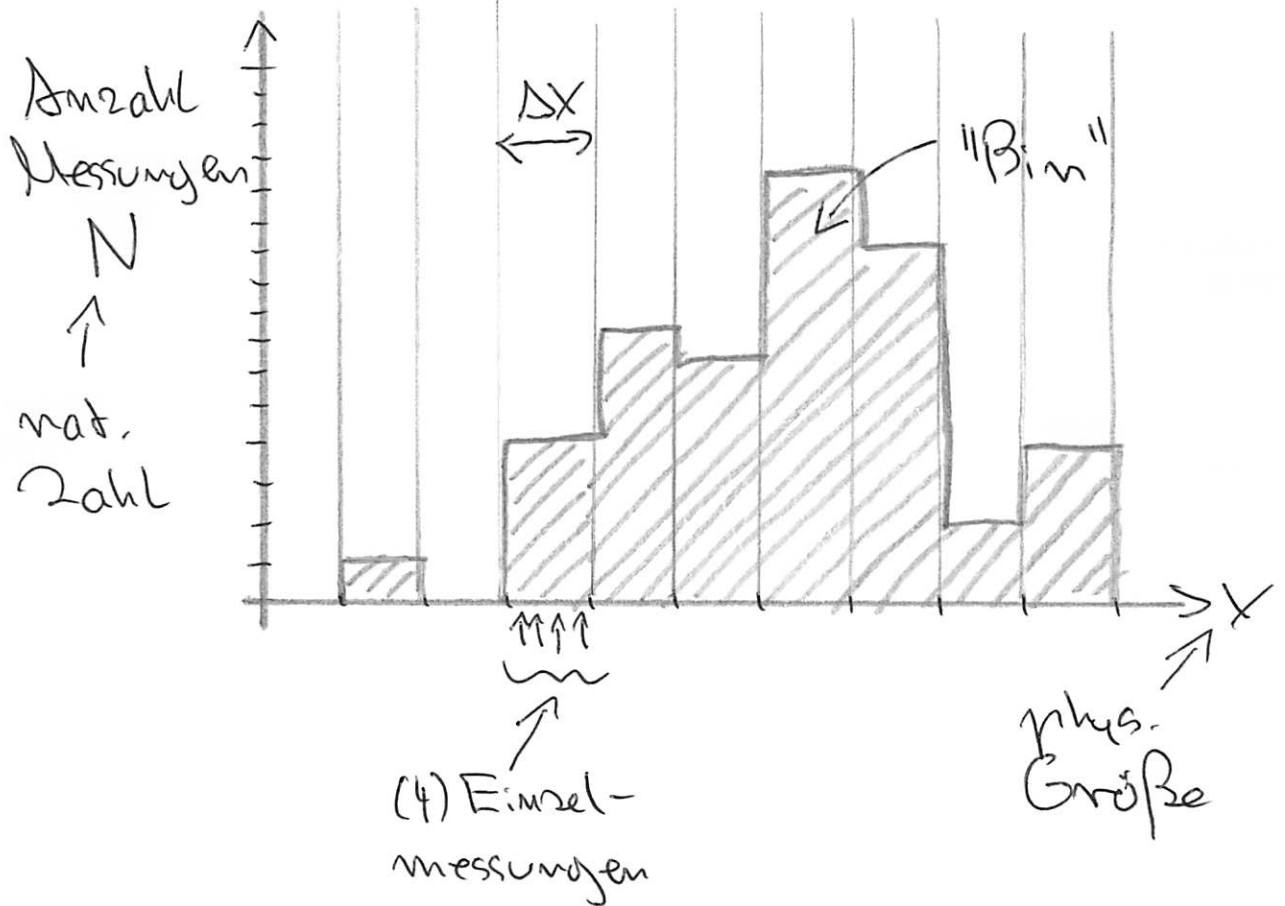
graphische Darstellung:



Vorteil: zeitliche Trends erkennbar
eher üblich:

- Häufigkeitsverteilung
- Histogramm

⑥ → Einsortieren in "Schubfächer" (Bins)



DEMO JAVA Applet

Wichtige Fragen für Physiker:

- Welcher Wert von x ist der beste Wert den wir angeben können?
- Wie groß ist der Fehler dieses besten Wertes?

Pionier: C.F. Gauß (1772-1855)

Nennen wir den (noch zu bestimmenden) besten Wert einmal $\bar{x}$ und betrachten:

$$(x_1 - \bar{x}), (x_2 - \bar{x}), \dots, (x_i - \bar{x}), \dots, (x_n - \bar{x})$$

"Differenzen der Einzelmessungen"

dann

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{(x_i - \bar{x})^2}_{\substack{\uparrow \text{"quadratischer Fehler einer} \\ \text{Einzelmessung"}}} \leftarrow \text{pos. + Wichtung großer Abweichungen}$$

Eigenschaften

Bei $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$ ist $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = 0$
und $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ minimal

→ Minimierung des quadratischen Fehlers der Einzelmessungen

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

"Mittelwert"

"arithmetisches Mittel"

engl. "mean" (aus average)

Schreibweise

$$\bar{x} = \langle x \rangle$$

Schauen wir $\Delta x_i^2 = (x_i - \bar{x})^2$
einmal genauer an.

Davon können wir den Mittelwert berechnen:

$$\overline{\Delta x_i^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

"mittlere, quadratische Fehler einer Einzelmessung"

Die Wurzel daraus hat einen Namen:

$$S_N = \sqrt{\overline{\Delta x_i^2}} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum (x_i - \bar{x})^2}$$

"Unkorrigierte Standardabweichung"

"Unkorrigierter Fehler einer Einzelmessung"

Korrektur? $\rightarrow$ Bessel

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

$\uparrow$ neu!

"Standardabweichung"

"mittlere Fehler einer Einzelmessung"

"r.m.s." = root-mean-square

Worum $n-1$?

2 Gründe:

$$(i) \underbrace{(x_i - \bar{x})^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{"sample mean"} \\ \text{aus Messungen}}} < \underbrace{(x_i - x_{\text{Wahrheit}})^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{"population"} \\ \text{mean}}}$$

Division durch $n-1$ statt durch n
macht s größer!

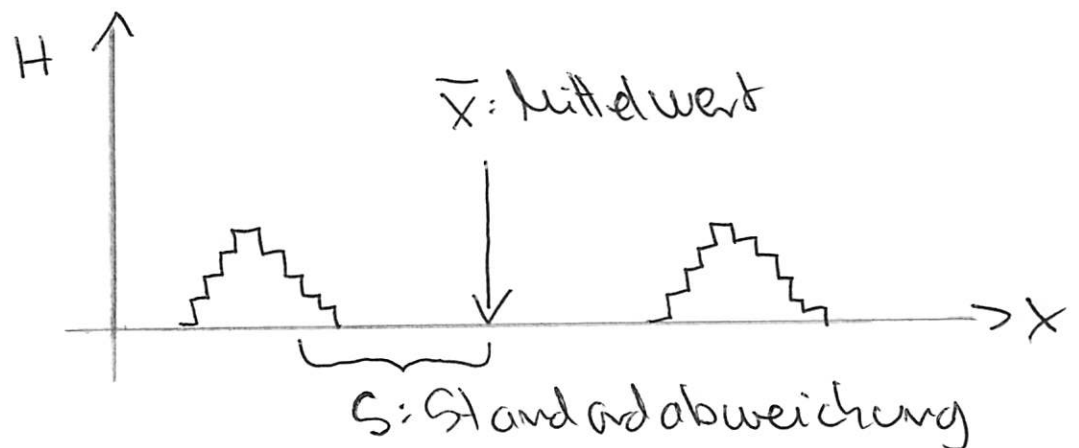
(ii) Wenn man $\bar{x}$ kennt und
zusätzlich $n-1$ Einzelmessungen,
kann man die n -te Messung berechnen.
 $n-1$: Anzahl der Freiheitsgrade

Also:

Eine beliebige Einzelmessung hat
im Mittel den Fehler s .

s ist somit für alle Einzelmessungen
gleich und sagt nichts über deren
Verteilung aus!

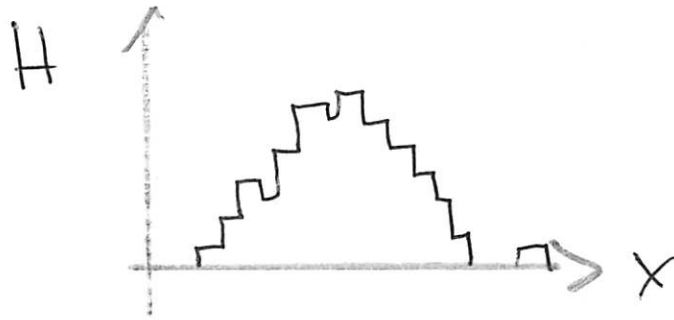
Extremes Beispiel:



In diesem Fall ist $\bar{x}$ wohl keine
besonders sinnvolle Größe...

Wir müssen uns über die Form
von Verteilungen Gedanken
machen!

Häufig sind Messungen etwa so verteilt:



Das ist ähnlich einer:

"Normalverteilung"

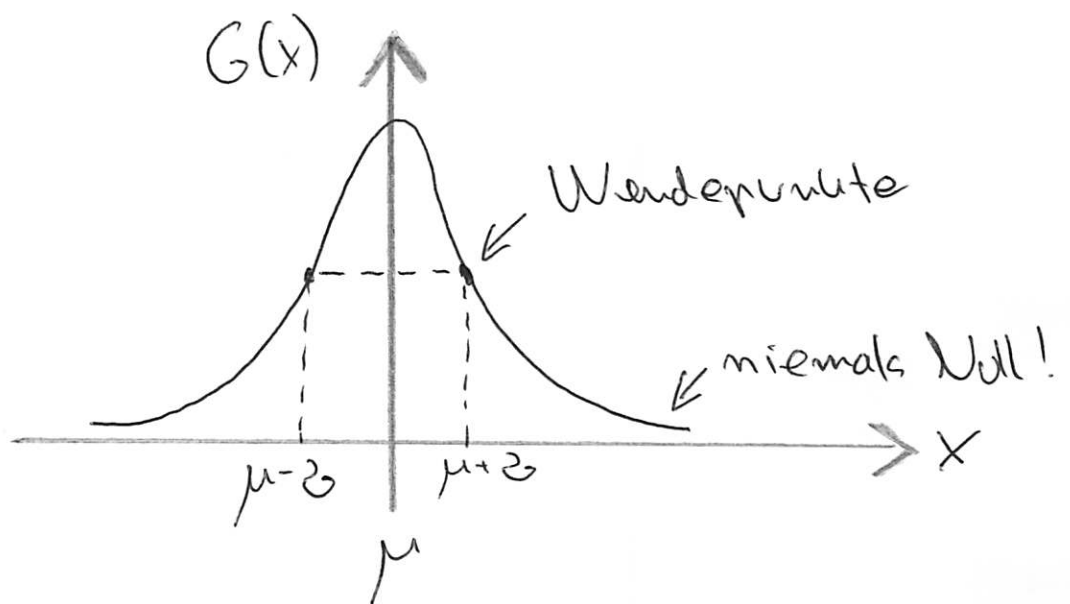
"Gaußverteilung"

"Gaußschen Glockenkurve"

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}$$

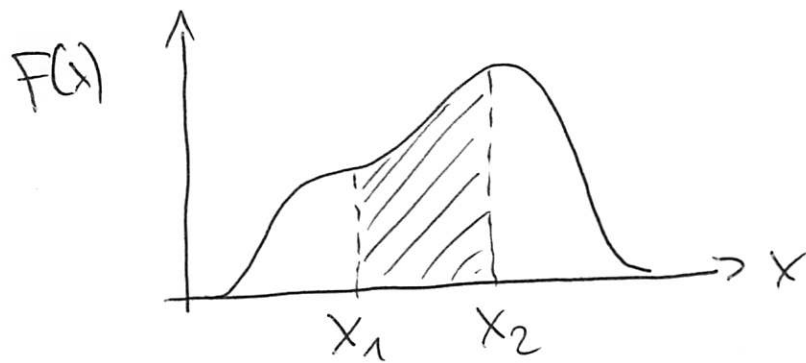
merke: $\sim e^{-x^2}$

σ und μ sind Parameter



Einschub für's Leben:

Was ist eine "Verteilung"



Def.

Eine Verteilung $F(x)$ liefert die Wahrscheinlichkeit, ein Meßergebnis (x -Wert) in einem Intervall $[x_1, x_2]$ zu finden:

$$P = \int_{x_1}^{x_2} F(x) \cdot dx$$

"Probability"

also muß gelten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cdot dx = 1$$

"Normierung"

Speziell auch für die Gauß Funktion:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x) \cdot dx = 1$$

(12)

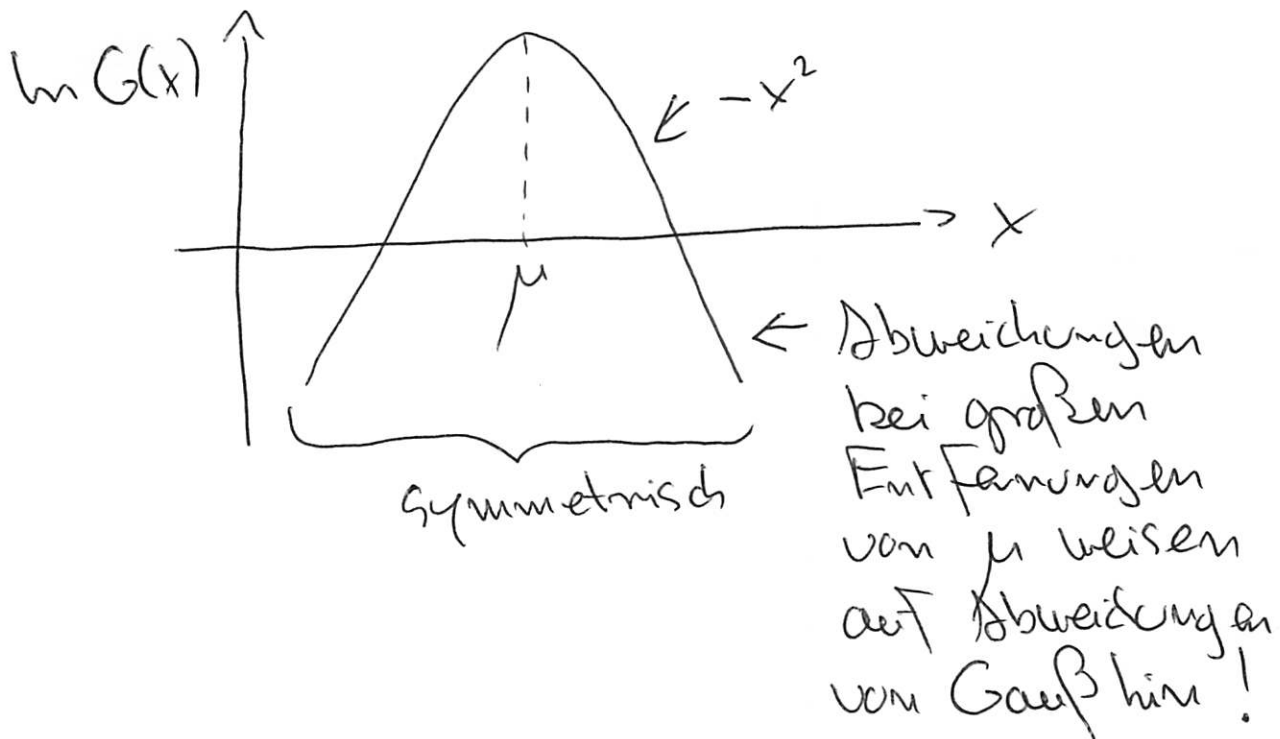
DEMO.

Diskrete Verteilung, Galton-Brett

und noch etwas für's Leben:

$$\ln e^{-x^2} = -x^2$$

Parabel auf dem Kopf



Es gibt keinen fundamentalen Grund aus den Meßdaten durch eine Gaußverteilung beschrieben werden müssen!
Ist dies auch nicht der Fall!

Aber wenn dies der Fall ist:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mu = \bar{x} \\ \sigma = s \end{array}}$$

Für G gilt:

$P = 68\%$ für $\pm 1 \sigma$ Intervall

$P = 95,5\%$ für $\pm 2 \sigma$ Intervall

$P = 99,7\%$ für $\pm 3 \sigma$ Intervall

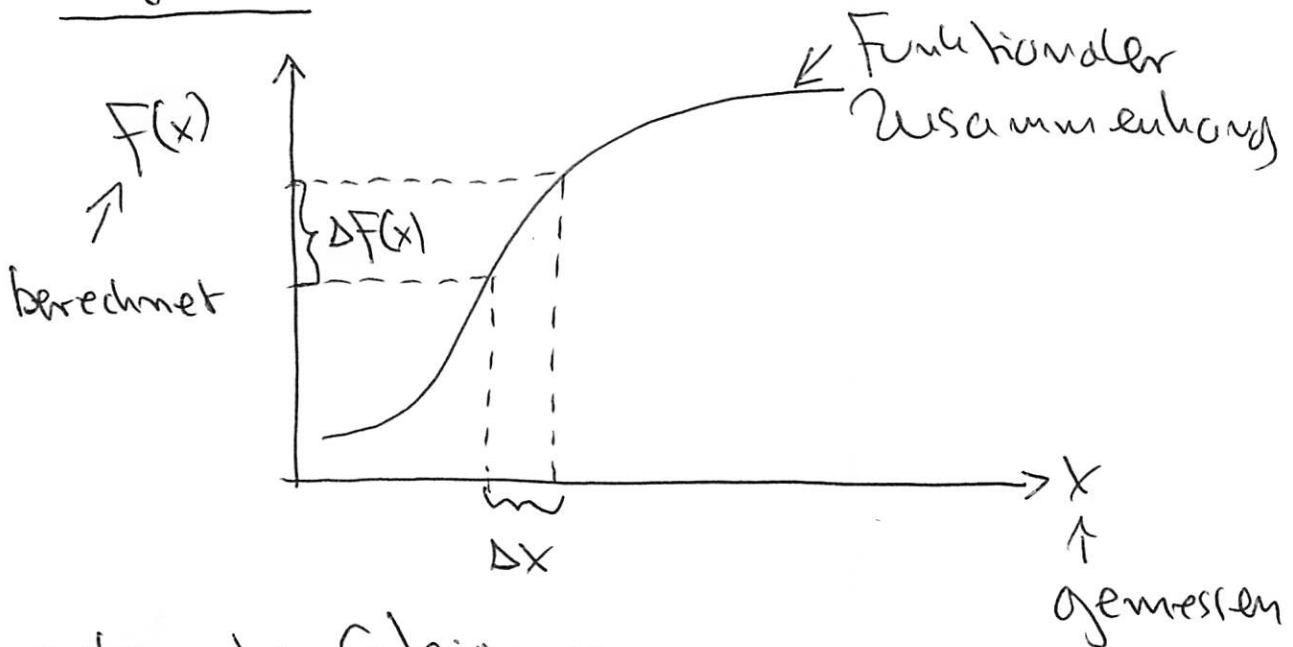
Was geschieht, wenn man aus fehlerbehafteten Größen etwas berechnet?

z.B. $A = r^2 \cdot \pi$ (Kreis)

$\uparrow$ $\uparrow$
Fläche (Area) gemessen

ΔA Δr
?

allgemein



relevant: Steigung

$$\Delta F(x) = \frac{dF(x)}{dx} \cdot \Delta x$$

"Fehlerfortpflanzung"

(→ Hinweis Reihentwicklung)

Mehrere fehlerbehaftete Größen?

$$F(x_1, \dots, x_n)$$

$$\Delta F(x_1, \dots, x_n) =$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n\right)^2} \quad (*)$$

(ohne Beweis)

Dies können wir benutzen, um eine abgeleitete Größe zu untersuchen:

"Fehler des Mittelwertes"

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \quad \uparrow \text{ Einzelmessungen}$$

abgeleitete
Größe

Annahme: $\Delta x_i = \Delta x$ gleich für alle i

Dann mit der Fehlerfortpflanzung (*)

$$\Delta \bar{x} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n \cdot (n-1)}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{n}}$$

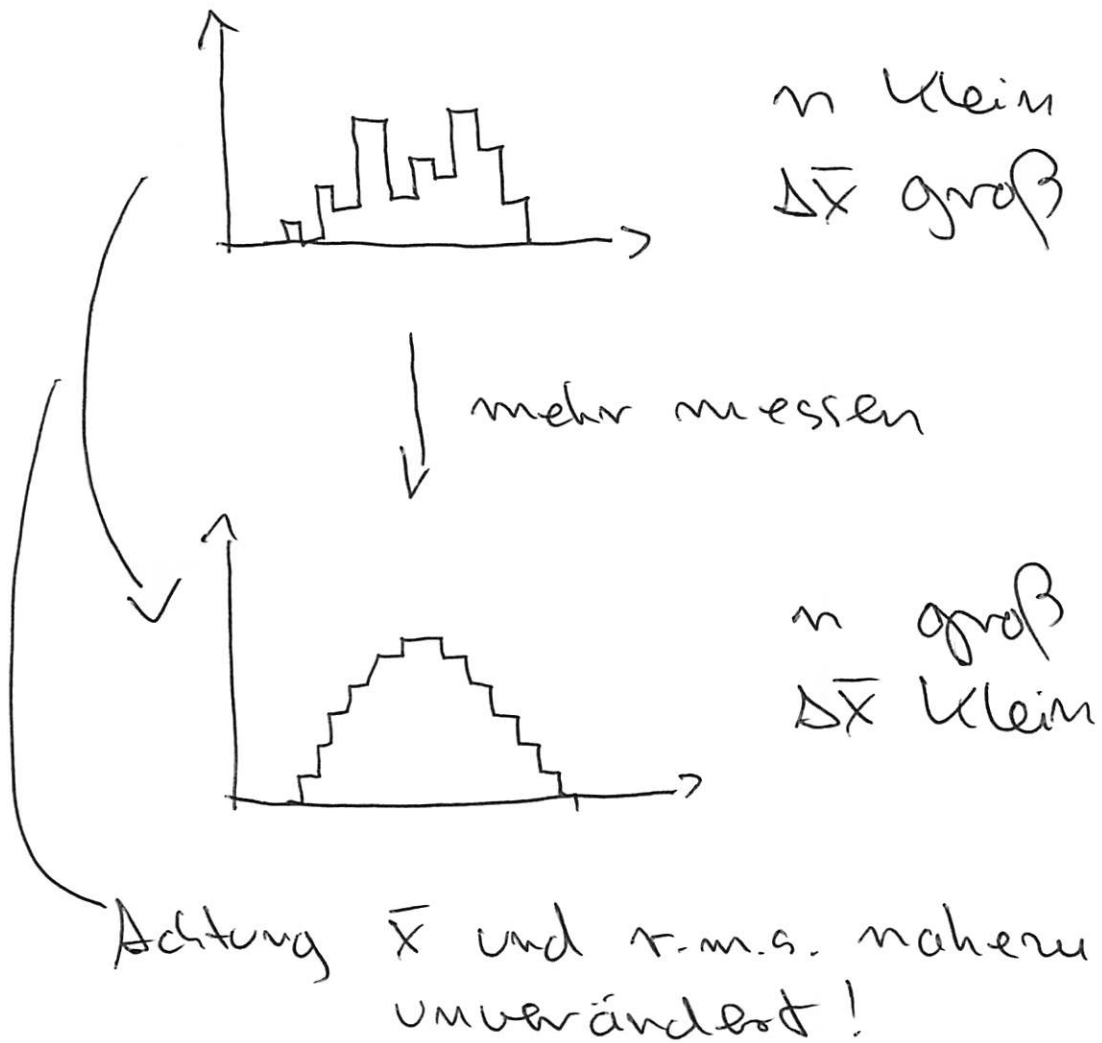
(bitte zu Hause nachrechnen)

Fürs Leben

$$\Delta \bar{x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{n}}$$

"Fehler des Mittelwertes"

Viel Messen lohnt sich!



also insbesondere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta \bar{x}}{\sqrt{n}} = 0 !$$

Man kann also alle Fehler zu Null machen mit ausreichender Geduld?

→ NEIN !!

DEMO Maßstäbe

Der Grenzwert gilt also nur für:

- statistische Fehler
- zufällige Fehler
- unkorielierte Fehler

zusätzlich gibt es aber:

Systematische Fehler

Gründe:

- fehlerhafte Meßgeräte
- unverständene Geräte
- Einflüsse von Außen

Folgen aus dem richtigen Leben

2. Mechanik

gr. mechanische Technik
"Maschinenkunst"

Kinematik: Wie bewegen sich Körper

Dynamik: Wann bewegen sich Körper

Statik: Wann bewegen sich Körper nicht

2.1. Mechanik des Massepunktes

Abstraktion: Keine Ausdehnung

DEMO: Klotz

insbesondere: Keine Rotation

2.1.1. Längen- und Zeitmessungen

zunächst - allgemeines zu phys. Größen.

Physikalische Größen haben eine Dimension: Die Art der phys. Größe.

Beispiele: Länge, Zeit, Masse, ...

Daraus kann man die Dimensionen weiterer phys. Größen ableiten, z.B.

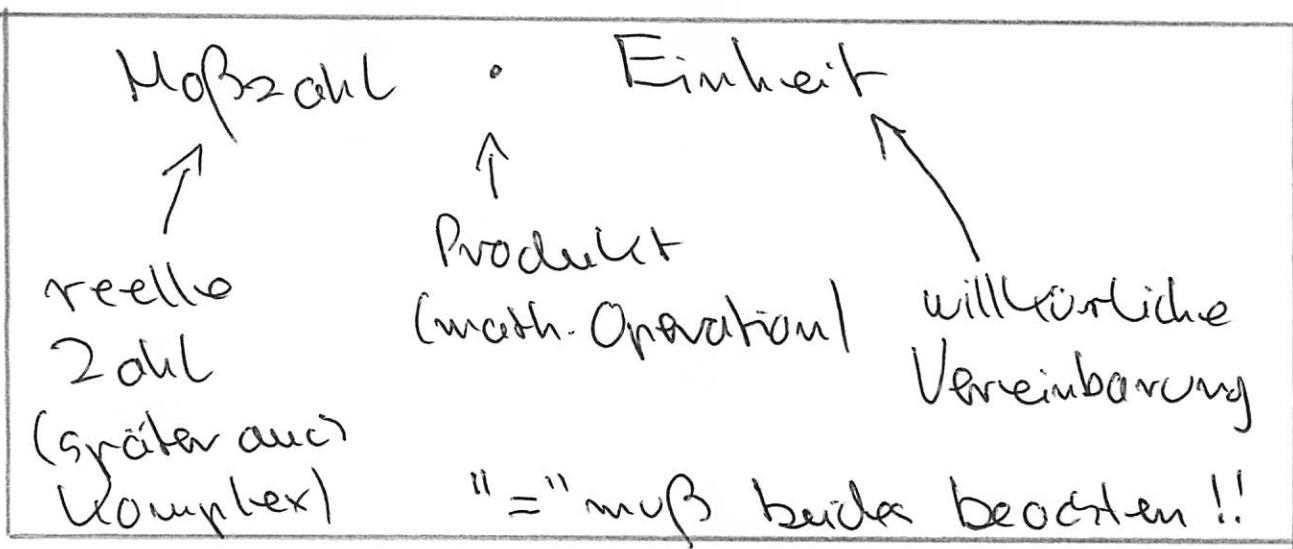
$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$$



Dimensionen

Dimensionen sind universell. Sie wären auf einem fremden Planeten gleich denen auf der Erde...

Für quantitative Aussagen brauchen wir etwas Neues:



z.B.

Länge eines Tages:

$$\begin{array}{ccccc}
 86400 & \cdot & 1\text{s} \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \text{Maßzahl} & & \text{math. Produkt} & & \text{Einheit}
 \end{array}$$

oder

$$\frac{\text{Dauer eines Tages}}{1\text{s}} = 86400$$

Einheit:

- willkürlich, aber
 - in hohem Maße reproduzierbar
- n.b.: Mit Sicherheit auf anderen Planeten anders...

2. 1.1.1. Zeitmessung

2 Konzepte:

- periodische Vorgänge
- bekannte Zeitabhängigkeiten

periodische Vorgänge:

Um- $\nearrow \frac{\Delta T}{T} = \text{klein!} = 10^{-2}$
sicherheit $\nwarrow$ Periodendauer

Grundidee: Perioden zählen

historisch: Astronomische Bezüge
mittlerer Sonnentag

$$1 \text{ d (ies)} = 86400 \text{ s}$$

$\uparrow$ Def. $\uparrow$

Folie: Sonnentage

$$1 \text{ a (unum)} = 365.25 \text{ d} \approx \boxed{\pi \cdot 10^7 \text{ s}}$$

$\uparrow$
fünf Leben!

Problem: unstabile Erdrotation
(Eis, Gezeiten, Klima)

1956: $1 \text{ s} = 1/315569259747$
des Jahres 1956

Problem: Übertragung auf andere Jahre

1967: atomare Bezugsgrößen

zunächst: Mikrowellen

Folie: Atomuhr

^{133}Cs (Cäsium)

$\lambda_{\text{Cs}} = 9\,192\,631\,770$ Periodendauern

$\sim 9\text{ GHz}$ (Telefon $\approx 1.8\text{ GHz}$)

$$\frac{\Delta T}{T} = 10^{-14}$$

In Vorbereitung: Zeitnormal aus
sichtbarem Licht (Nobelpreis
T. Hänsch, 2005)

$$\frac{\Delta T}{T} = 10^{-20}$$

Warum: Zunächst Fundamentale
Physik, z.B. Zeitabhängigkeit von
Naturkonstanten.

wichtige Größe:

$$\nu = f = \frac{1}{T} \quad \text{"Frequenz"}$$

$\nwarrow$ Periode

$$\text{Einheit} \quad \frac{1}{\text{s}} = 1 \text{ Hertz (Hz)}$$

$$\text{Dimension:} \quad \frac{1}{\text{Zeit}}$$

technisch wichtig (niedrige Kosten):
Schwingquarze

$$\frac{\Delta T}{T} = 10^{-6}$$

GHz-Bereich durch Schaltungstechnik
(→ Phase-Locked-Loops)

DEMO: Nutzung einer Quarzzeit-
er Geschwindigkeitsmessung

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{"laufender Vorgang"} \\ \uparrow \\ \text{Bem. auf "periodischen"} \\ \text{Vorgang"} \end{array} \right.$$

↑ Bem. auf "periodischen
Vorgang"

Fürs Leben:

$$\begin{array}{l} \text{Schallg. } c = c_s \approx 345 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3.6 \frac{\text{km}}{\text{h}} \end{array}$$

meßtechnisch wichtig:

"Oszilloskop"

$$\Delta t = \frac{\Delta s \leftarrow \text{messen (ablesen)}}{v \leftarrow \text{einstellen, dann}} \\ \text{Konstant}$$

ausrechnen

Vertikale Achse: el. Spannung

Phys. Größe $\sim$ Spannung

"Sensorik"

Ein Oszilloskop mißt die Zeitabhängigkeit physikalischer Größen

DEMO: Analoges Scope
Digitales Scope

Stand der Technik:

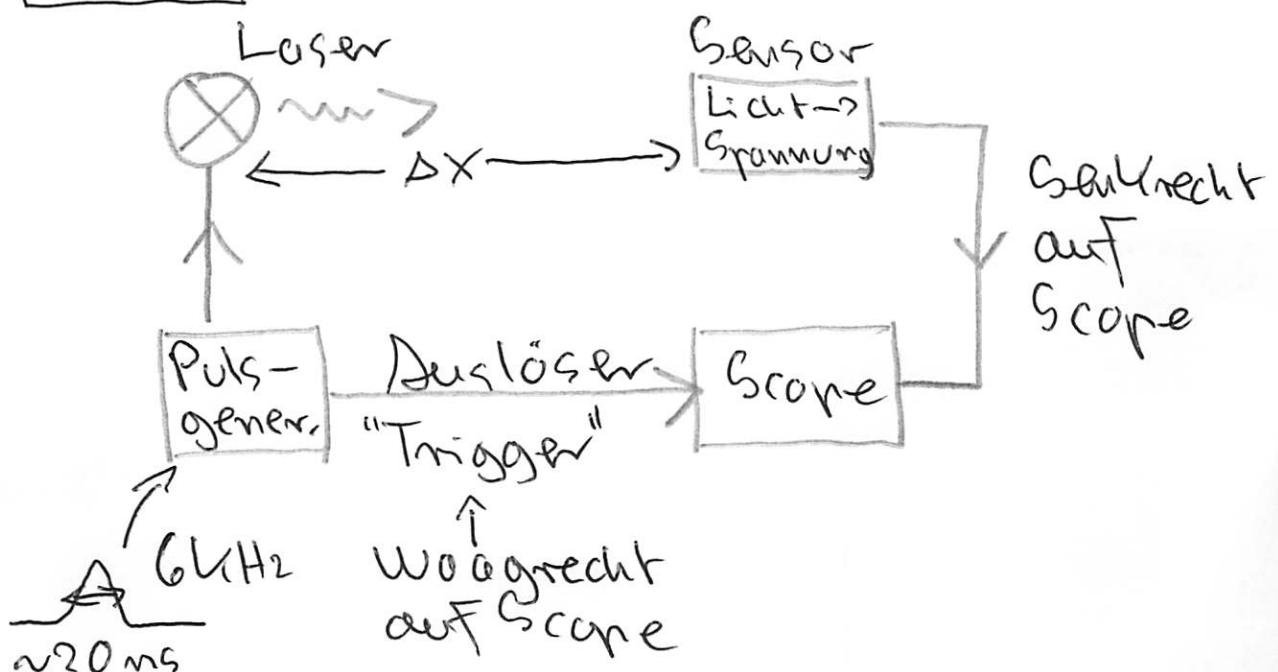
500 MHz $<$ 1000 €

2 GHz $\approx$ 10.000 €

50 GHz $\approx$ 100.000 €

Anwendung: Messung der Lichtgeschw.

DEMO



n.b. $20 \text{ ns} = 20 \cdot 10^{-9} \text{ s}$

Resultat: 4.5 m brauchen 15 ns

$$c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(Fürs Leben)

Demo: Kabel entspricht
60% von c
↑ auch fürs Leben...

Man kann Zeiten auch nicht
periodisch messen!

bekannte Zeitabhängigkeiten

radioaktive Zerfälle

Idee..

Änderung $\sim$ - was schon da ist
was $z.z.$

$N(t)$ $\sim$ proportional $\frac{dN(t)}{dt}$
 ↑ $\uparrow$ minus!
 Vorrat an Atomkernen die zerfallen können $\uparrow$ Abnahme durch Zerfälle

also:

$$N(t) = -F \cdot \frac{dN}{dt} \quad (\text{DGL})$$

"d": totales Differential im Diff.
Differentialquotienten

↳ algebraische Umformung
ist möglich!

$$dt = -F \cdot \frac{dN}{N}$$
$$\int_0^t dt' = -F \int_{N_0}^{N(t)} \frac{dN'}{N'}$$

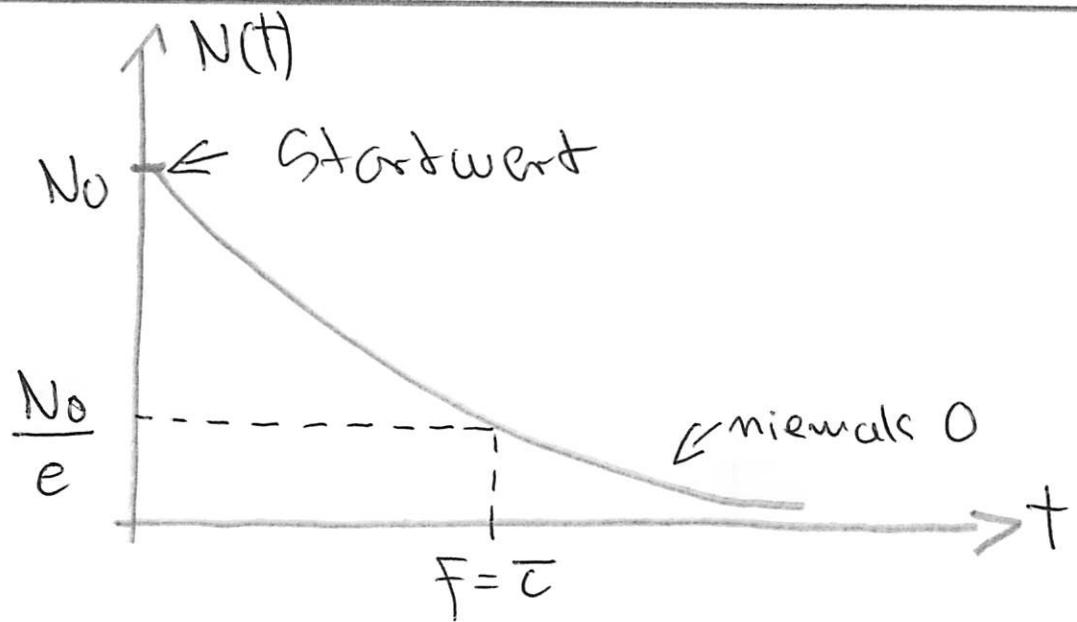
$$t = -F \cdot (\ln N(t) - \ln(N_0))$$
$$= -F \cdot \ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right)$$

also: $N(t) = N_0 \cdot e^{-\frac{t}{F}}$

was ist F ??

Physikalisch hidden eine Zeit !!

graphische Darstellung



τ : Lebensdauer

radioaktives Zerfallsgesetz

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

oder

$$\frac{dN(t)}{dt} = R(t) = -\frac{1}{\tau} \cdot e^{-t/\tau}$$

besonders
einfach
zu messen

"Rate"
"Aktivität"

↑
Einheit: $\frac{1}{s} = 1 \text{ Bq}$
↑
Bequerel

Aus der Umgangssprache:

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}}$$

↳ Halbwertszeit

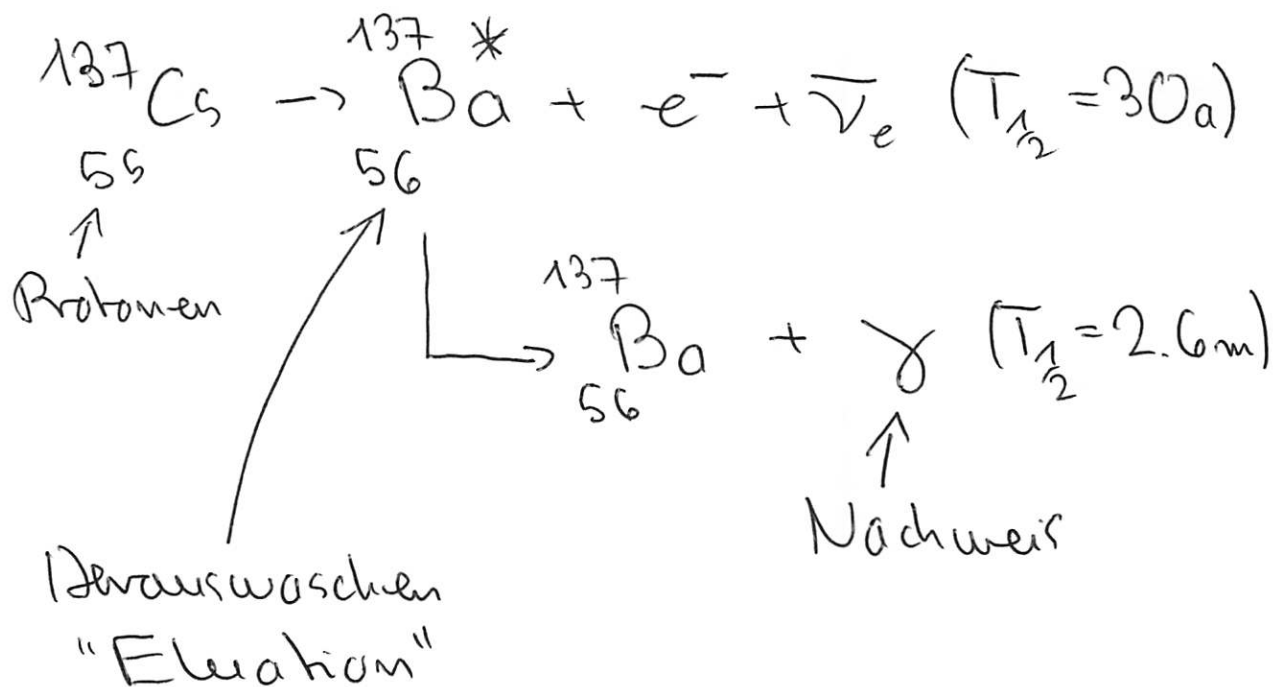
offensichtlich:

$$\bar{\tau} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \approx 0.69$$

$$\tau > T_{1/2}$$

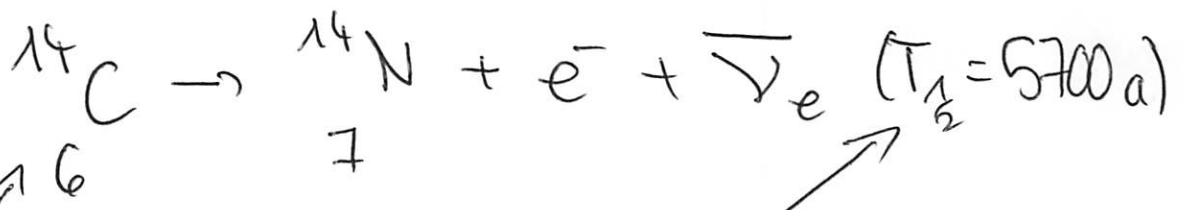
Was hat das mit Zeitmessung zu tun?

DEMO Barium γ -Zerfall



Anregung: log-Auftragung

Wichtig: ^{14}C -Methode

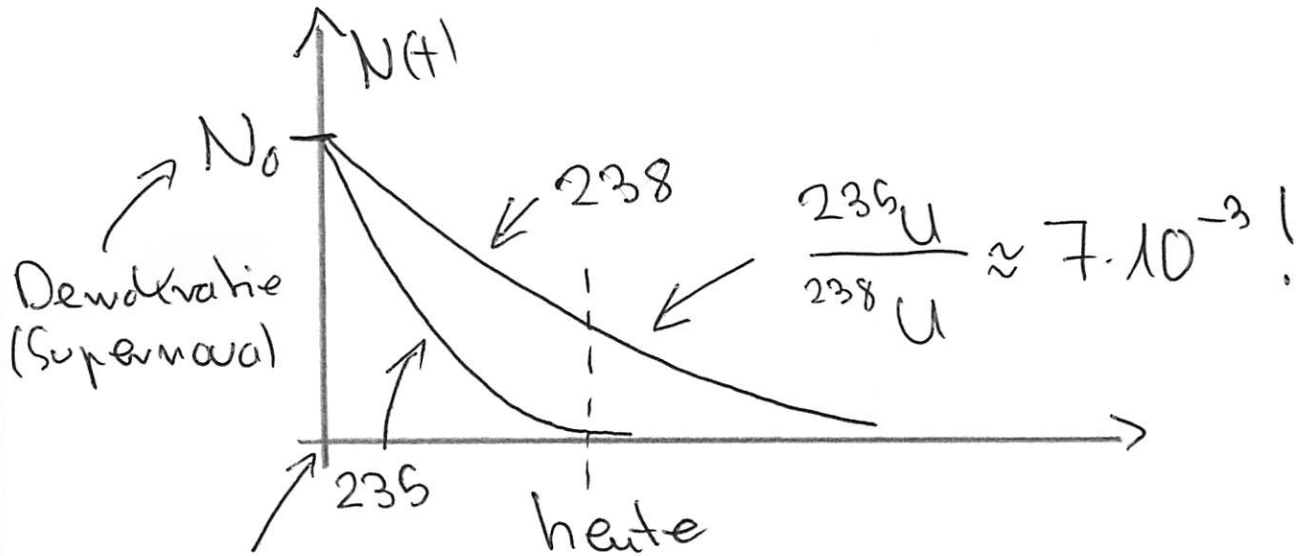


Kosmische Strahlung,
Einbau in lebende Substanzen
endet mit Tod $\rightarrow ^{14}\text{C}$ Zerfall

Archäologisch relevant

Spannend:

$$\left. \begin{array}{l} {}^{235}\text{U} : T_{1/2} = 0.7 \cdot 10^9 \text{ a} \\ {}^{238}\text{U} : T_{1/2} = 4.5 \cdot 10^9 \text{ a} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2- \\ \text{Zfälle} \end{array}$$



$t=0$

Entstehung der Erde aus
Supernova Überresten

DEMO Uranerz

Folie Uranerz

Alter der Erde etwa $4 \cdot 10^9 \text{ a}$

Alter Universum etwa $13.7 \cdot 10^9 \text{ a}$

Folien: Zeitskalen und Zehnerpotenzen

2.11.2. Längenmessung

ganz ähnlicher Weg:

zunächst astronomischer Bezug

Franz. Revolution: "zehnmillionster Teil eines Viertels des Erdumfanges"

Transfer in die Laboratorien durch "Urmeter" und Kopien davon

DENO: Heidelberger Urmeter

Fdie Urmeter

1960: Bezug auf atomphys. Größen
Von Anfang an sichtbares Licht
"rotes Kryptonlicht"

1m = 1650763,73 Wellenlängen
des $2p_{10} \rightarrow 5d_5$ Überganges

Genauigkeit:

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = 10^{-10}$$

Wellenlänge $\rightarrow \lambda$ $\uparrow$ schlechter als das Zeitnormal!

aktuell:

- Festlegung der Lichtgeschwindigkeit c auf einen (vernünftigen) Wert mit $\Delta c = 0$

$$c = 299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \pm 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- Nutzung der sehr guten Sekunden-Definition (wird in Kürze noch besser werden)
- Meter ist dann eine abgeleitete Einheit

DEMO Nomius

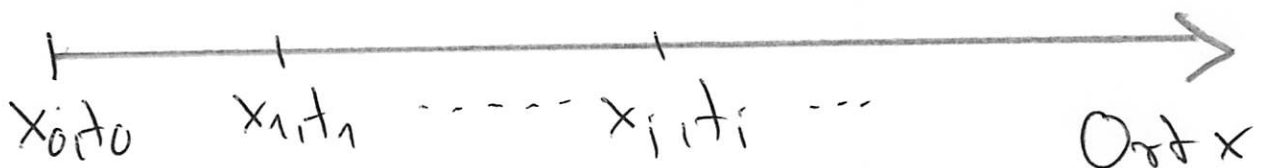
Folien Längenskalen und Zehnerpotenzen

2.1.2. Kinematik

2.1.2.1. Geradlinige Bewegung

Eine Raumdimension

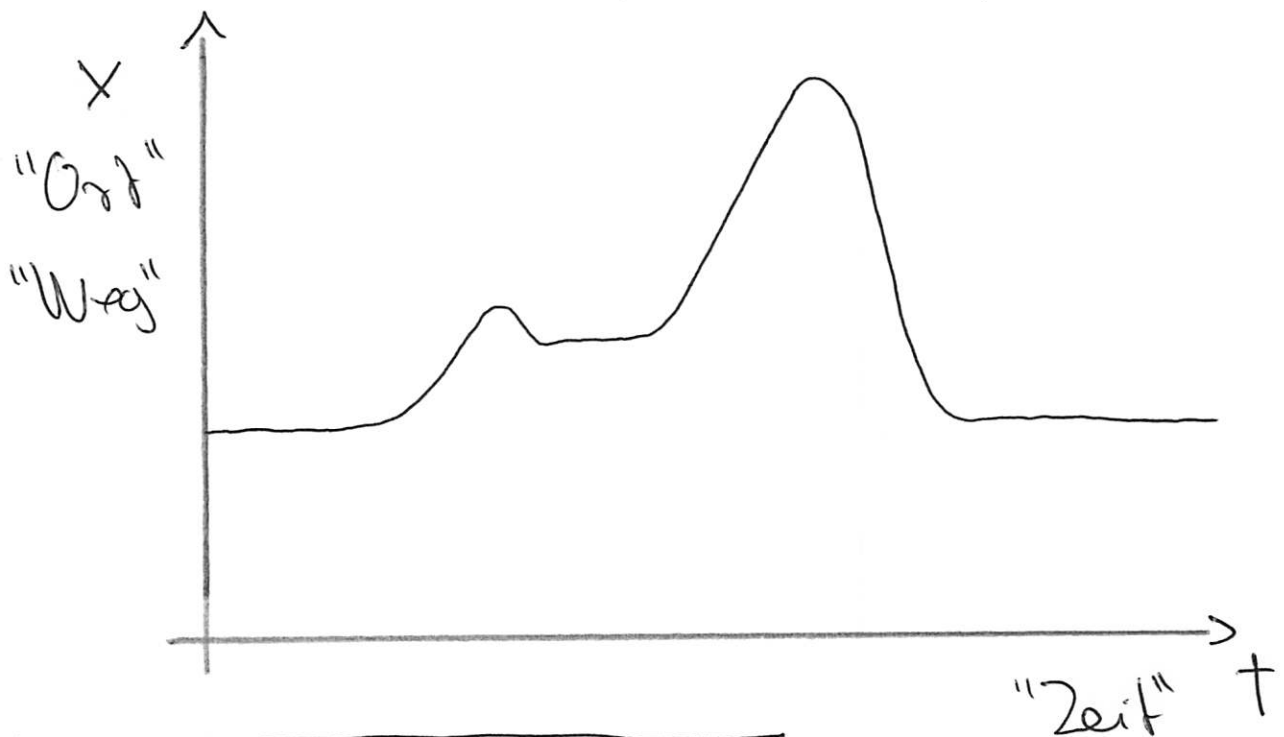
Darstellung zum Beispiel:



t_i ist hier ein Parameter auf der Ortsachse

$$x = F(t) = x(t)$$

Wichtig sind Weg-Zeit Diagramme:



DEMO: Ablaufen $x(t)$

Offensichtlich ist die Geschwindigkeit die Steigung im $x(t)$ Diagramm

$$\begin{array}{l} \nearrow \\ \text{Velocity} \end{array} V = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

Konvention für Zeitableitungen

Dimension: $\frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$ (immer)

Einheit: $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ (z.B.)

n.b. Die Dimensionen müssen auf beiden Seiten einer Gleichung mit physikalischen Größen gleich sein!

also: $x^2 + x = \frac{x}{t}$ muß falsch sein!
wichtiger Check bei allen
Übungsaufgaben!!

Auch v kann sich ändern: $v = v(t)$

Def. Beschleunigung

acceleration

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \dot{v} = \ddot{x}$$

Dimension: $\frac{\text{Weg}}{\text{Zeit} \cdot \text{Zeit}}$

Einheit: $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

a : Krümmung der $x(t)$ -Funktion

Es gibt einen wichtigen Spezialfall:

$$\left. \begin{aligned} x &= b' \cdot t^2 \\ x &= \frac{b}{2} \cdot t^2 \end{aligned} \right\} \text{"Parabel"}$$

$$v = \frac{b}{2} \cdot 2 \cdot t = b \cdot t \quad \left. \vphantom{\frac{b}{2} \cdot 2 \cdot t} \right\} \text{"Gerade"}$$

$$a = b \quad \left. \vphantom{a} \right\} \text{"Konstant"}$$

DEMO: Freier Fall Kugel

$$x = 0.45 \text{ m}, 0.9 \text{ m}, 1.35 \text{ m}, 1.8 \text{ m}$$

Auswertung Excel Tabelle

Also: Beim freien Fall ist im Rahmen unserer Meßgenauigkeit die Beschleunigung konstant.

experimentell:

$$a = g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \text{ "Ortsfaktor"}$$

$$x = \frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$v = g \cdot t$$

$$a = g$$

Ist das allgemein gültig?

DEMO: Holz, Stahl, Papier, Ballon

DEMO: Luftreibung

Abstraktion erstmals durch Galileo Galilei (1564-1642)

1589 (25 Jahre) "De Moto"

Folie Galilei

Nutzung der Infinitesimalrechnung

Isaac Newton (1643-1727)

G.W. Leibniz (1646-1716)

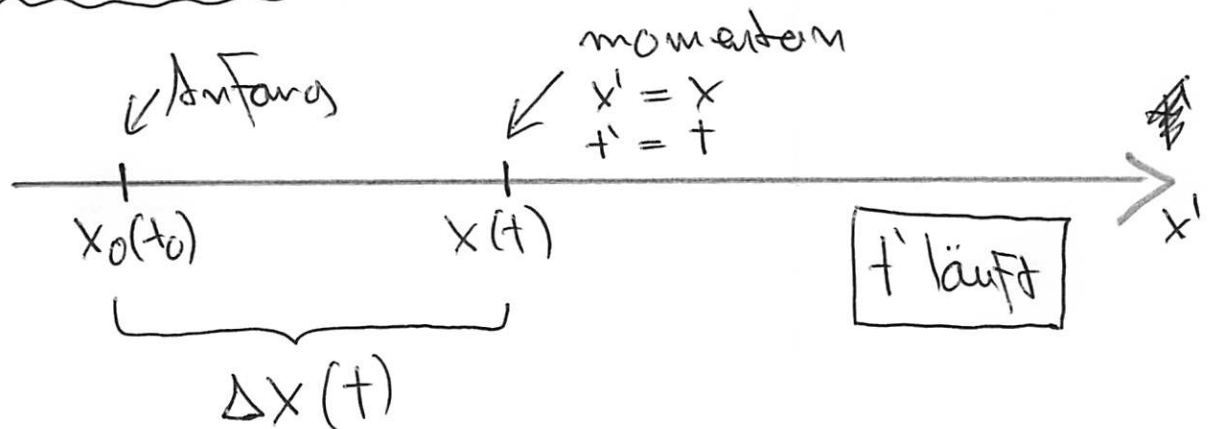
DEMO: Fallrinne, Fallketten

bisher: $x \rightarrow v \rightarrow a$ (differenzieren)

jetzt: $a \rightarrow v \rightarrow x$ (integrieren)

↑
Konstanten!?

Vom v nach x



$$\int dx' = x - x_0 = \Delta x$$

$x_0 \leftarrow$ z.B. 0, muß aber nicht
wir wissen:

$$dx = v \cdot dt$$

$$\text{oder } dx' = v \cdot dt'$$

also: x ————— t $\leftarrow$ gehören zusammen

$$\int_{x_0}^x dx' = \int_{t_0}^t v \cdot dt'$$

$$x - x_0 = \int_{t_0}^t v \cdot dt'$$

oder

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t v \cdot dt'$$

↑ to
Startwert Gewinn durch
Geschwindigkeit v

Das geht natürlich genau so für v :

$$v = v_0 + \int_{t_0}^t a \cdot dt'$$

↑ to
Startwert Gewinn durch
Beschleunigung a

Unser Spezialfall $a = g = \text{const.}$:

$$a(t) = g$$

$$v(t) = v_0 + g \cdot t$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

2.1.2.2. Bewegung im Raum

Bisher: Bahnkurve $x(t)$

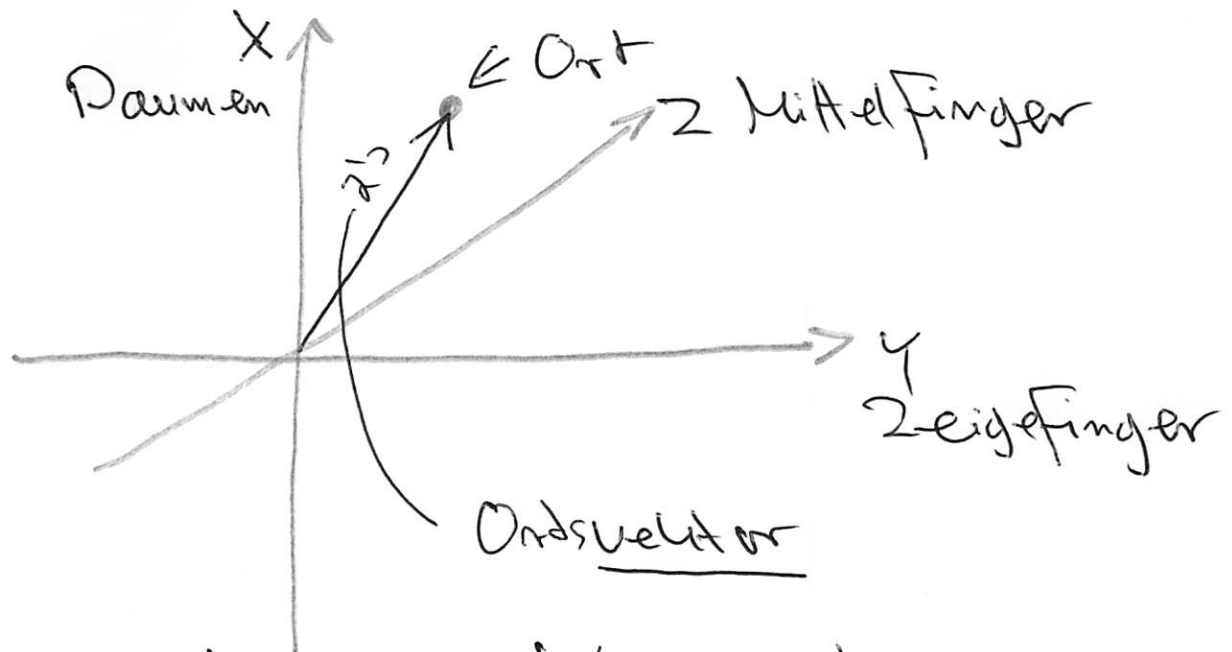
↑ ↑
"Skalar" "Skalar"

Skalar: Reelle Zahl $\cdot$ Einheit

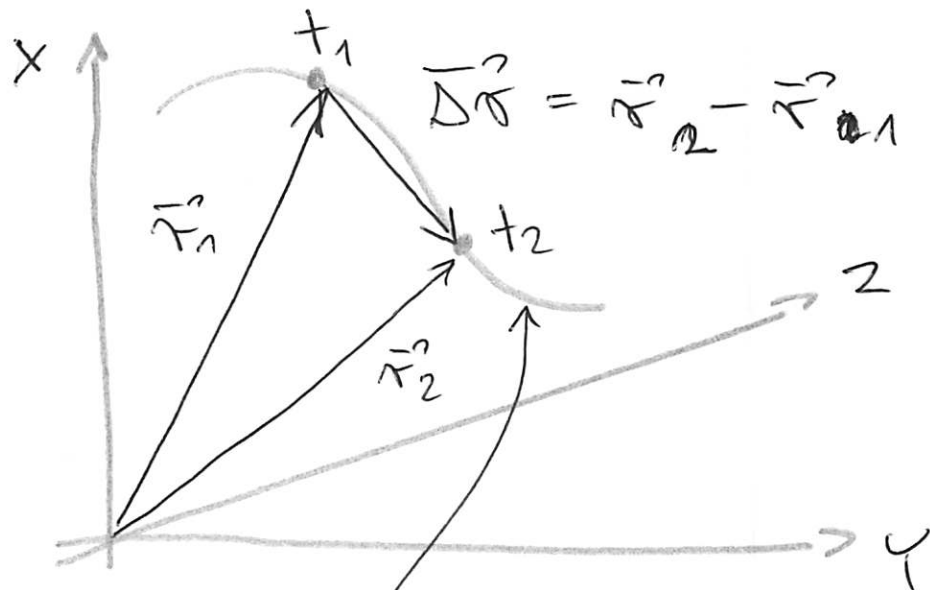
Jetzt: Bahnkurve in 3 Dimensionen

dazu: $\vec{r} = (x, y, z)$

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$
(kartesische)
Ortskoordinaten



rechtshändiges Koordinatensystem



Bahnkurve
"Trajektorie"

dann:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)}_{\text{Vektor}}$$

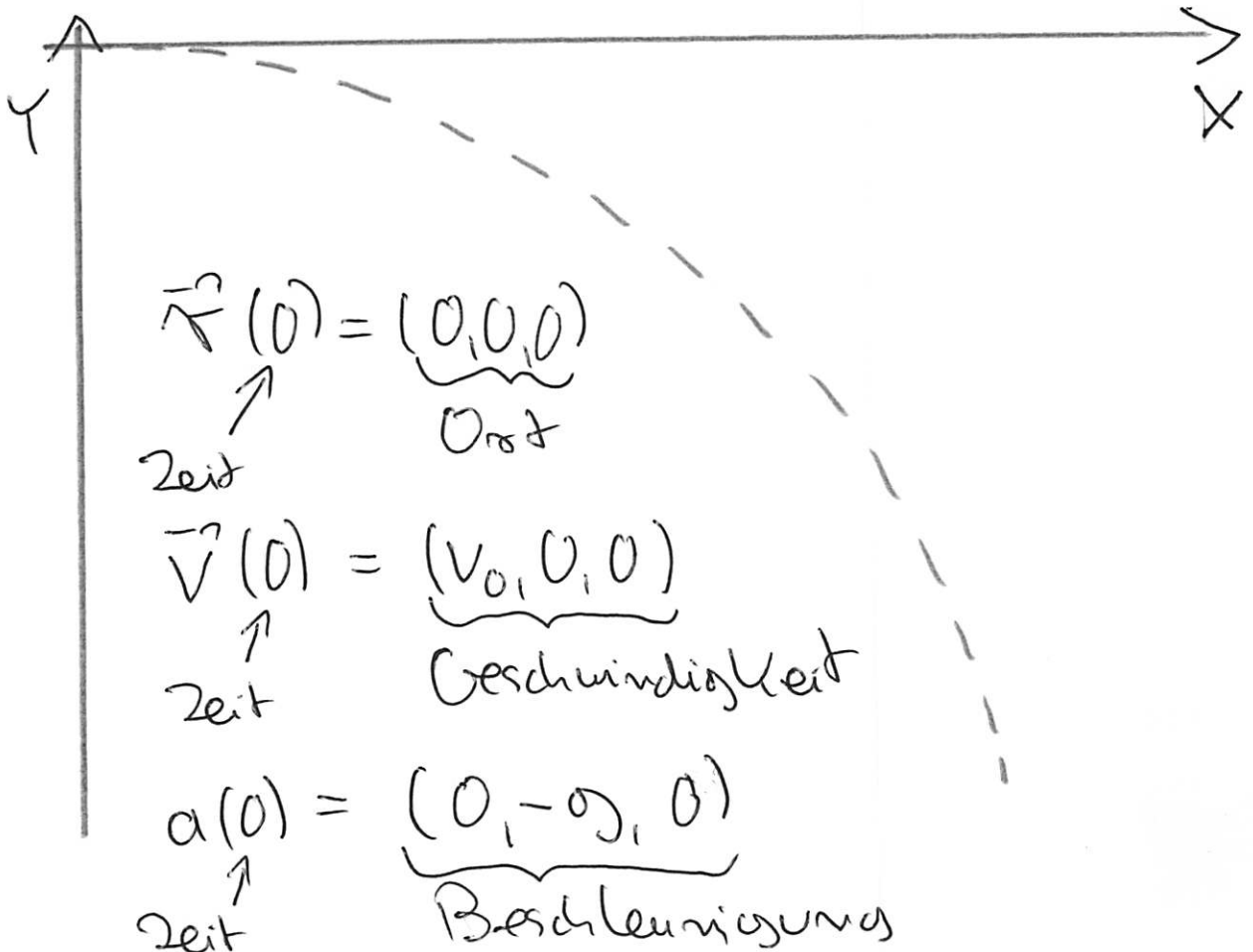
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \right)$$

wichtig: Die Richtungen von $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ sind im allgemeinen nicht gleich!

Dazu einige Beispiele

a) Horizontaler Wurf

DEMO: Papierkugel



Was passiert dann?

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} 0 \\ -g = \text{const. (warschon da)} \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} v_0 \text{ (warschon da)} \\ -g \cdot t \text{ (nimmt zu)} \\ 0 \end{cases}$$

$$\vec{x}(t) = \begin{cases} v_0 \cdot t \text{ (nimmt zu)} \\ -\frac{g}{2} \cdot t^2 \text{ (nimmt zu)} \\ 0 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} v_0 \cdot t \\ -\frac{g}{2} \cdot t^2 \\ 0 \end{cases}} \right\} \text{"Parabel"}$$

$$\vec{x}(t) = \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{linear}}}{v_0 \cdot t}, -\frac{g}{2} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{quadratisch}}}{t^2}, 0 \right)$$

Trajektorie = Parabel

Hier haben wir etwas angenommen:
 $x(t), y(t), z(t)$ sind unabhängig
voneinander!

Idemogenität des Raumes
"Superpositionsprinzip"

DEMO Kugelkosten

b) schiefer Wurf

$$\text{hier: } \vec{v}(0) = (v_{ox}, v_{oy}, 0)$$

$\uparrow$ $\uparrow$
Zeit $t=0$ neu!
 $\neq 0$

Lösung ist nun offensichtlich

$$\vec{x}(t) = (v_{ox} \cdot t, \underbrace{v_{oy} \cdot t - g \cdot t}_{\text{neu!}}, 0)$$

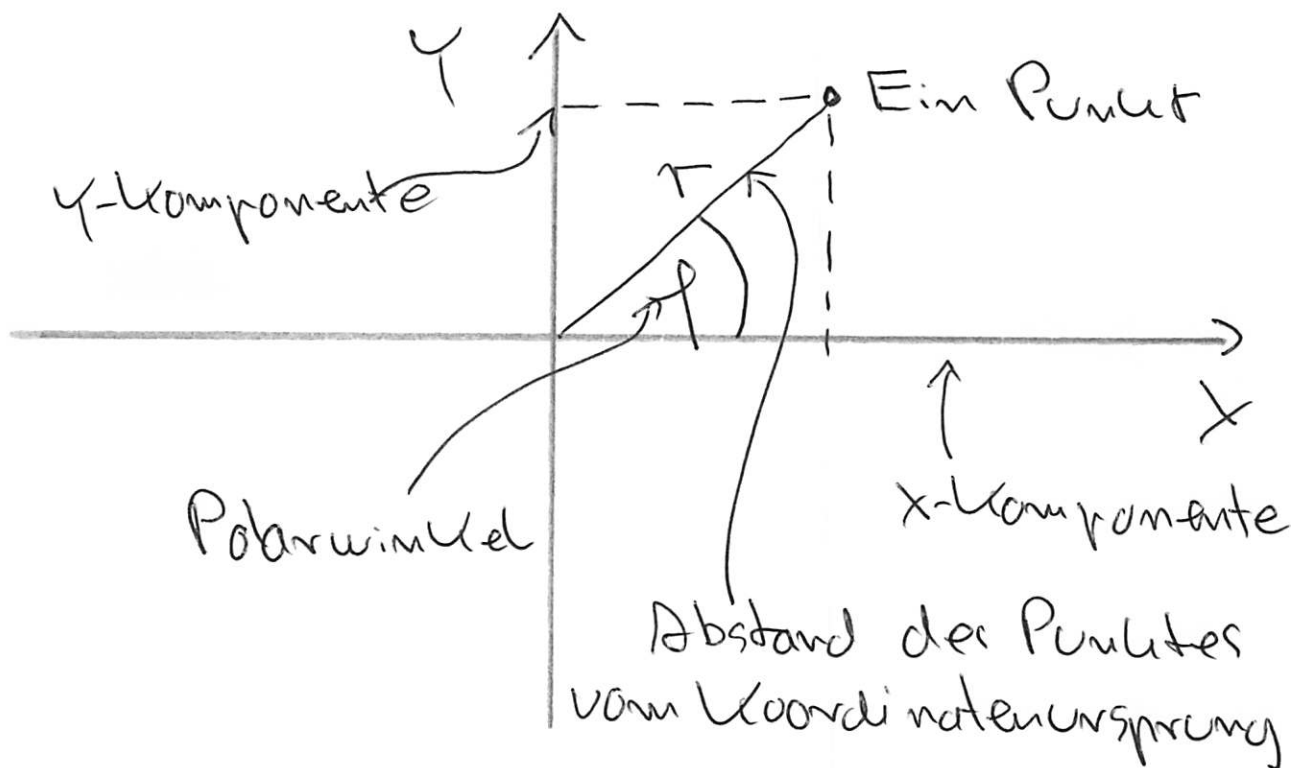
Interessant: Die "Wegabnahme" $-g \cdot t^2$ ist völlig unabhängig vom v_{ox} und v_{oy} !

DEMO Löwenschuß

c) Kreisbewegung

DEMO: LM auf Kreis

Ein Kreis ist immer in einer Ebene
Die nennen wir bequemerweise
die (x,y) -Ebene



also: 2 Alternativen für die beiden Koordinaten des Punktes

(x, y) oder (r, φ)
 Kartesisch Polarkoordinaten

Bei einer Bewegung: $x(t), y(t), r(t), \varphi(t)$
 speziell bei einer Kreisbewegung:

$$x(t)^2 + y(t)^2 = r^2 = \text{const.}$$

Die Wahl einer guten K.G. kann einem das Leben sehr vereinfachen!

$$x(t) = r \cdot \cos \varphi(t)$$

$$y(t) = r \cdot \sin \varphi(t)$$

$$\dot{x}(t) = -r \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \sin \varphi(t)$$

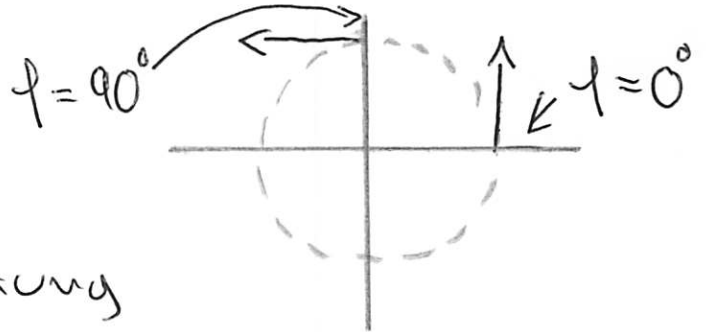
$$\dot{y}(t) = r \cdot \dot{\varphi}(t) \cdot \cos \varphi(t)$$

Länge (Betrag) von $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y})$?

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = r \cdot \dot{\varphi}(t)$$

In welche Richtung zeigt $\vec{v}$?

z.B. bei



$\varphi = 0^\circ$ in y -Richtung

$\varphi = 90^\circ$ in $-x$ -Richtung

also: $\vec{v}$ zeigt tangential

Def.

$$v = r \cdot \dot{\varphi}(t)$$

"Bahngeschwindigkeit"

$$\omega = \dot{\varphi}(t)$$

"Winkelgeschwindigkeit"

$$v = \omega \cdot r \quad (\text{Beträge})$$

DEMO: Drehung einer Stange

Jetzt speziell: gleichförmige Kreisbew.

$$\dot{\varphi}(t) = \omega = \text{const.}$$

hier: Periodendauer T

$$\nu = f = \frac{1}{T} \quad \text{"Frequenz"}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \nu$$

$\uparrow$ voller Winkel 360°

nun zur Beschleunigung:

$$\dot{x}(t) = -r \cdot \omega \cdot \sin \varphi(t)$$

$$\dot{y}(t) = \omega \cdot \cos \varphi(t)$$

$$\uparrow \dot{\varphi}(t) = \text{const.}$$

dann:

$$\ddot{x}(t) = -r \cdot \omega^2 \cdot \cos \varphi(t)$$

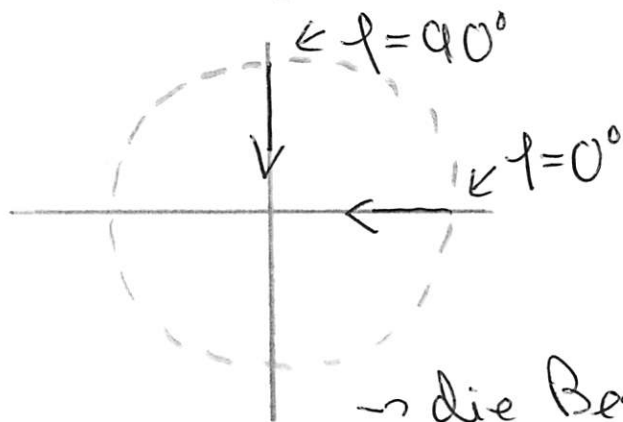
$$\ddot{y}(t) = -r \cdot \omega^2 \cdot \sin \varphi(t)$$

Betrag dieses Vektors $(\ddot{x}, \ddot{y})$:

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r} \neq 0 !$$

Eine Beschleunigung bei konstantem Geschwindigkeitsbetrag!

Richtung?



z.B.

$\varphi = 0$: -x-Richtung

$\varphi = 90^\circ$: -y-Richtung

→ die Beschleunigung bei der gleichförmigen Kreisbewegung ist betragsmäßig konstant und zeigt immer zum Mittelpunkt des Kreises.

Def.

Bei der gleichf. Kreisbewegung
ist

$$a_{zp} = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r}$$

die "Zentripetalbeschleunigung"

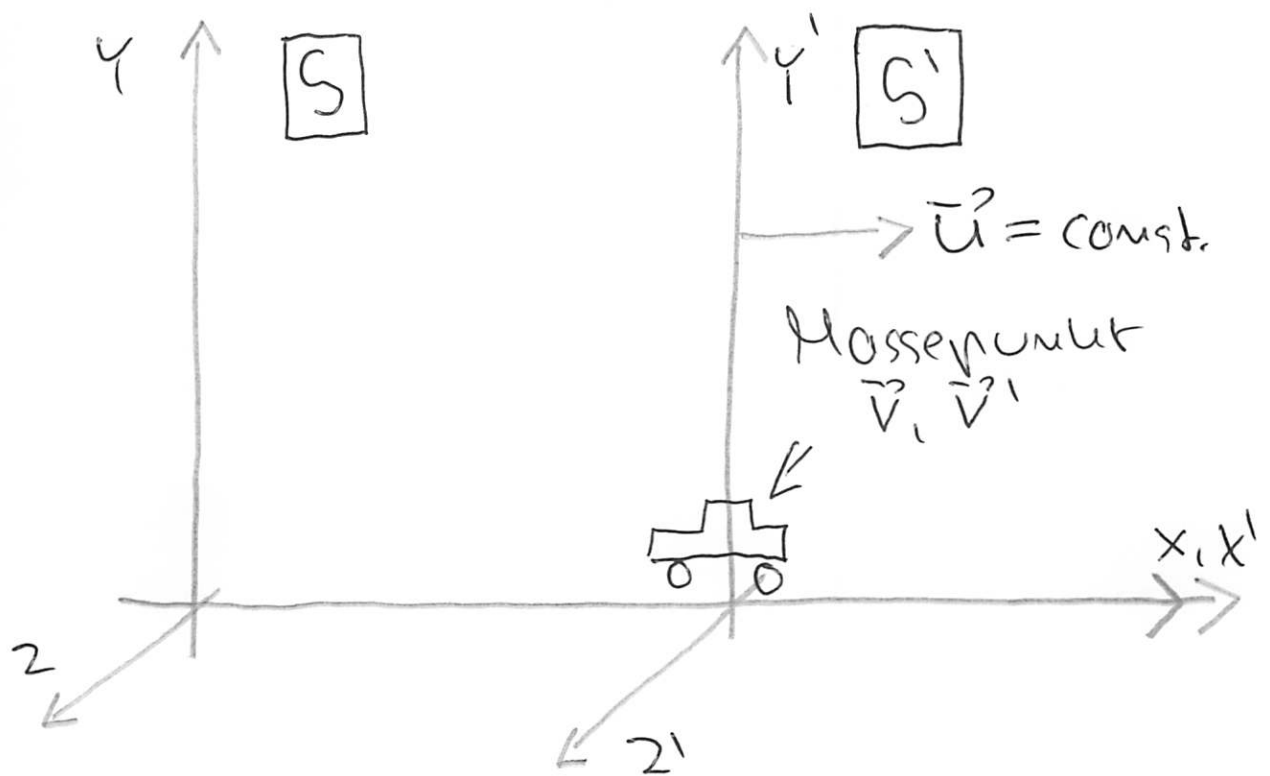
Wichtig: Wir sagen hier noch nichts
über die Ursache oder Auswirkung
dieser Beschleunigung!

z.B. Schienen	}	mögliche Ursachen	}
Muskelkraft			
Gravitation			
⋮			
Fliehkkräfte	}	Auswirkung	

↳ später: Newtonsche Dynamik

Zum Abschluß des Kapitels über
Kinematik müssen wir uns noch
mit einem sehr fundamentalen
Thema befassen:

"Beugssysteme"



neu: $\vec{u}$ ist die Geschwindigkeit des Systems S' im System S

Def.

S : "Laborsystem"

S' : "Bewegtes System"

(später: Schwerpunktsystem)

Wir machen uns das Leben nunächst besonders leicht:

$$\vec{u} = (u, 0, 0) \text{ (nur } x\text{-Richtung)}$$

$$u = \text{const. (keine Beschleunigung)}$$

$$S = S' \text{ für } t = 0$$

Was jetzt kommt, spiegelt unsere tägliche Erfahrung wieder:

$$x' = x - \underbrace{ut}$$

Weg des Koordinatensyst.
muß abgezogen werden

$$\left. \begin{array}{l} y' = y \\ z' = z \end{array} \right\} S' \text{ bewegt sich in } x\text{-Richtung}$$

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u} \quad \left. \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{Erwis} \\ \text{bewegendes} \\ \text{Objekt} \end{array} \right\} \text{ "Additionstheorem"} \\ \text{von Geschwindigkeiten} \\ \text{aus Ableitung der} \\ \text{ersten Gleichung}$$

"Galilei-Transformationen"

Geht natürlich auch andersrum:

$$x = x' + ut$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$

legendäre Eselsbrücke:

"Links ein Strich - rechts ein Strich"

scheint alles offensichtlich, aber ...:

Wenn man genau hinschaut ist das
alles Falsch! (Relativitätstheorie)

Später: Die Galilei-Transformationen sind eine Näherung der relativistischen Lorentz-Transformationen für den Fall $v \ll c$.

DEMO: Kamerawagen

2.1.3. Newtonsche Dynamik

Frage: Worum bewegen sich Dinge?

Newton 1686 (Folie)

"Philosophia Naturalis Principia
Mathematica"

Grundlage der Newtonschen Mechanik
sind 3 Axiome (!!)

Axiom: Grundsatz, der nicht logisch
aus bestehenden Sätzen abgeleitet
werden kann

→ Experimente + Beobachtungen!

→ Naturgesetze

→ Später: Rückführung auf
fundamentale Konzepte

wichtiger Grundgedanke:

Geschwindigkeit = "Bewegungszustand"

offensichtlich: Abhängig vom Bezugssystem

Nun: Betrachte Änderungen der Bewegungszustandes

↳ Beschleunigungen " a "

Beobachtung:

Gegenstände mögen $v = \text{const}$ $a = \dot{v}$

Gegenstände sind träge

Trägheit (engl. Inertia)

DEMO: $v = \text{const}$, auf Luftkissenbahn
Spielzeugauto, Hinweis Reibung

Eine weitere wichtige Beobachtung:
Trägheit hat etwas mit "Stoffmenge" zu tun.

DEMO: Hammer

→ schwierig, eine große Änderung an einer großen Stoffmenge zu bewirken

→ Änderungen an kleinen Stoffmengen sind viel einfacher

DEMO: geheimes Experiment

Versuch einer Formalisierung
"Phänomenologie"

<u>Stärke Wechselwirkung</u>	~	"Änderung
<u>Maß Stoffmenge</u>		Bew. Zustand
neue Größen, zu definieren		präzise definiert $\dot{V} = a$

Stoffmenge

"Feste Teilchen" · Volumen
"Poren"
"Dichte"

Def.: Träge Masse

Stärke Wechselwirkung

Kraft (K)
engl. Force (F)

Strategie

Lege die Masse durch eine Meß-
Vorschrift fest, dann erzwinge die
Definition der Kraft.

Kraft = Masse · Beschleunigung

↑ ↑ ↑

neu erzwingt ohne wohl bekannt
weitere Falschen neue Meß-
verschrift

Also: Klasse braucht eine Meßvorschrift
→ Einheit

Historisch: $1 \text{ kg} \rightarrow 10^{-3} \text{ m}^3 = 1 \text{ L Wasser}$
 Trägheit hiervon

Nebenbedingung: dest. Wasser bei 4°C

Dann: Mechanischer Äquivalent (Folie)

Heute: $5,0188 \cdot 10^{25}$ Atome von $^{12}_6\text{C}$

Wichtige abgeleitete Größe

Dichte 9

(gender: Massendichte)

Dimensionen: $\frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}$

Einheit : 1 kg/m^3

Folie: Messenskalen in der Physik

Jetzt wissen wir auch was Kraft ist:

$$F = \text{Kraft}$$

$$\text{Dimensionen: } \frac{\text{Masse} \cdot \text{Länge}}{\text{Zeit} \cdot \text{Zeit}}$$

$$\text{Einheit: } 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 1 \text{N}$$

↗
Newton

Wurück zu unseren Erzeugnissen der Gleichung:

$$F = m \cdot \dot{v} = m \cdot a$$

↑ ↑ ↑

Richtungen → parallel (Experiment!)

$$\vec{F} = m \cdot \vec{\dot{v}} = m \cdot \vec{a}$$

↑ ↑ ↑
"Vektor" "Skalar" "Vektor"

Achtung!

- Dies war keine "Herleitung"
- Es gibt keine "Herleitung"
- Es ist ein Naturgesetz

Aus praktischen Gründen benennen wir:

$\vec{G}$ = Gewichtskraft

$$\vec{a} = \vec{g}$$

$\vec{g}$ = Fallbeschleunigung

$$\vec{G} = m \cdot \vec{g} = \vec{F}_G$$

Physikalischer Grund für $\vec{g}$?

↳ Erde, Gravitation

Das bisher gefundene Wissen wird in 2 Newton'schen Axiomen formuliert:

I. Trägheitsgesetz

Ohne Einwirkung äußerer Kräfte behält ein Körper seinen Bewegungszustand

$$\vec{v} = \text{const. wenn } \vec{F} = 0$$

(Anmerkung: Bei Massenpunkten gibt es nur äußere Kräfte)

II. Bewegungsgleichung

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

DEMO: Beschleunigtes Bewegungssystem

Also: In beschleunigten Bez.-Systemen gilt das Trägheitsprinzip nicht!

Def. Ein Bewegungssystem in dem das Trägheitsprinzip gilt, nennt man Inertialsystem (IS)

Ist der Hörsaal ein IS?

→ Fast... (z.B. Fahrbahn), aber nicht ganz genau (z.B. Erdrotation)

Das Inertialsystem ist also auch ein idealisiertes Konzept.

noch etwas:

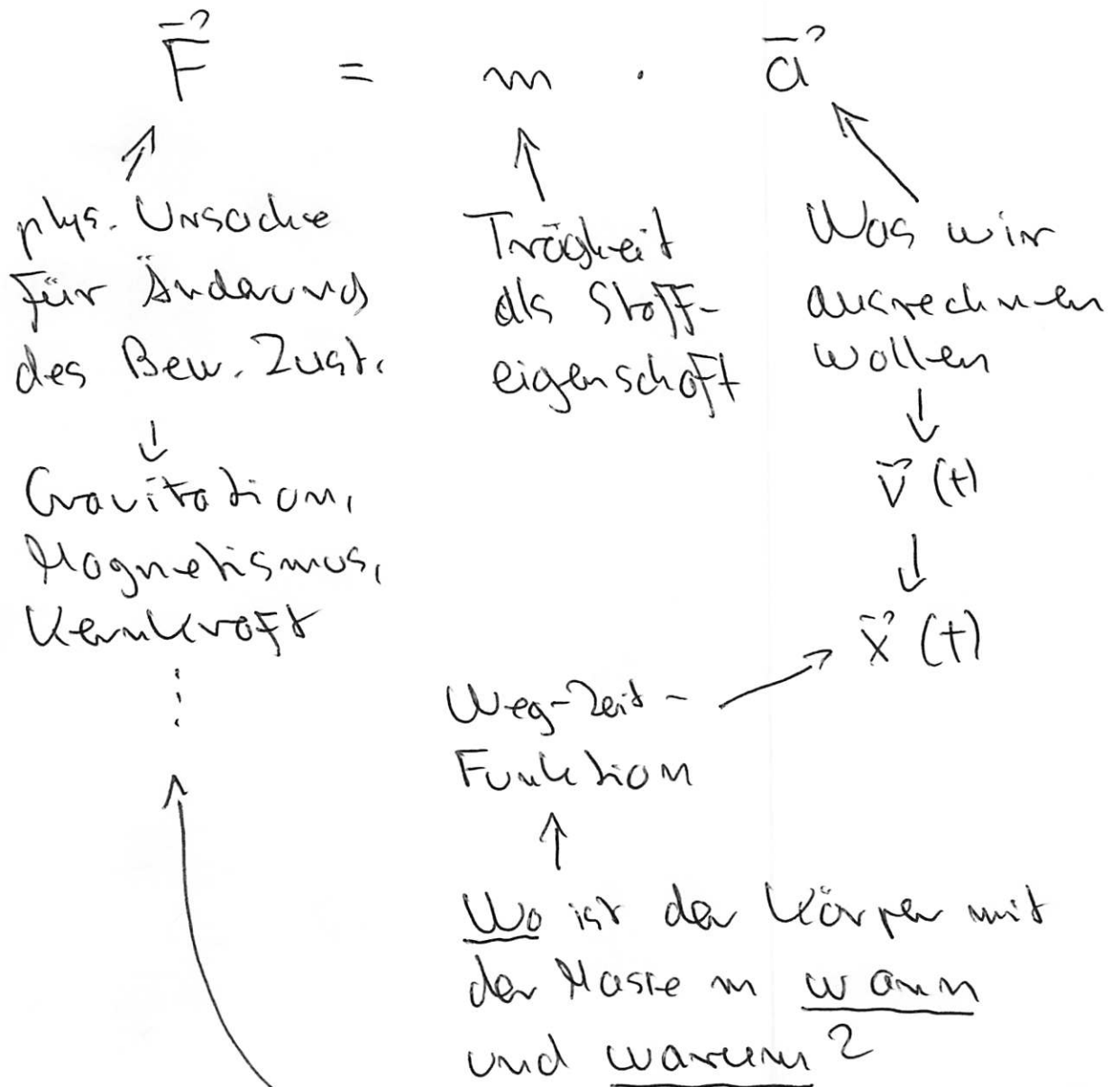
Das Trägheitsprinzip ist "Galilei-invariant"

Bedeutet: Wenn das TP in einem System gilt, gilt es in allen anderen Systemen S' , die sich gegenüber S mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{u}$ bewegen:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u} \quad (\text{Add. Theorem})$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 const. const.

Jetzt wollen wir uns mit dem wichtigen Prinzip einer "Bewegungsgleichung" befassen.

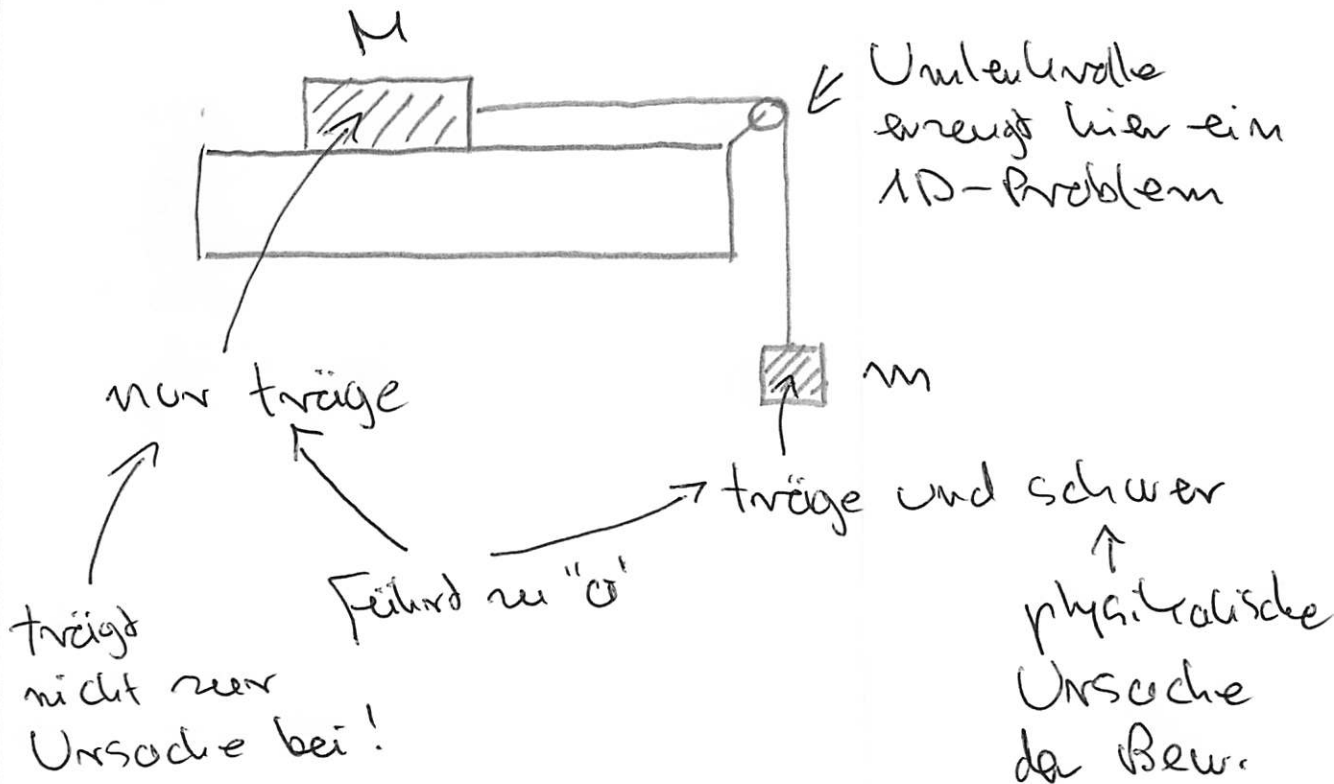


Klassische Mechanik macht
Vorhersagen



Ein Konkretes, nicht ganz triviales
Beispiel:

DEMO Luftkissenbahn



Bewegungsgleichung:

$$\underbrace{m \cdot g}_{\text{phys. Ursache}} = \underbrace{(m + M)}_{\text{gesamte Trägheit}} \cdot \underbrace{a}_{\text{was uns interessiert}}$$

also:

$$a = \underbrace{\frac{m}{m + M}}_{\text{Konstant}} \cdot g$$

also 2. B.

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{m}{m + M} \cdot g \cdot t^2$$

noch eine wichtige Anmerkung:
Auch $F = m \cdot \vec{a}$ ist Galilei-invariant

$$\vec{a}' = \vec{a} \text{ bei Wechsel} \\ \text{zwischen Inertialsystemen}$$

Achtung: Das ist dramatisch anders
bei beschleunigten Bewegungssystemen!

Jetzt: Es gibt noch ein 3.
Newton'sches Axiom.

III - Actio = Reactio

Übt ein Körper 1 auf einen
Körper 2 die Kraft $\vec{F}_{12}$ aus,
dann übt Körper 2 auf Körper 1
die Kraft $\vec{F}_{21}$ aus und es

gilt:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$
$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|$$

oops! Wie kann man dann
überhaupt irgendetwas in Bewegung
setzen?

DEMO: Meier vs. Roth

Meier vs. Weihachtsmann

Erinnern wir uns:

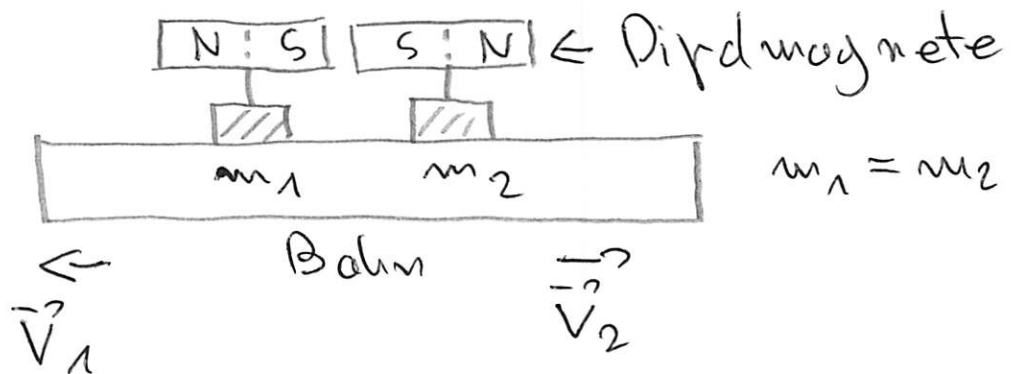
Die Änderung des B.Z. ist gegeben durch:

$$\underline{F} \leftarrow \text{hier } F_{12} = -F_{21}$$

$m \leftarrow$ u.U. sehr verschieden!

Ein Experiment mit gleichen Massen

DEMO Sprengschlitten



Nebenbemerkung

Magnetische Kräfte haben einen abstandsabhängigen Betrag "Reichweite". Speziell bei magn. Dipolen entlang ihrer Achse:

$$F_{\text{Dip}} \sim \frac{1}{x^3}$$

schneller Abfall

kurze Reichweite

↳ Massen bei größerem Abstand praktisch Kräftefrei!

Wir messen:

$$\vec{V}_1 = -\vec{V}_2$$

Beträge $V_1 = V_2$

Vereinfachte Annahme:

$$\vec{V} = \vec{a} \cdot \underbrace{\Delta t}_m$$

↑ Wechselwirkungszeit

$$\text{Konstant} = \Delta \vec{V} / \Delta t$$

Dann: $\vec{a}_1 = -\vec{a}_2$

wegen $m_1 = m_2$

$$\vec{F}_1 = \vec{a}_1 \cdot m = -\vec{a}_2 \cdot m = -\vec{F}_2$$

interessant:

Wenn $m_1 \neq m_2$, gilt natürlich
trotzdem $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$

$$\underbrace{\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{V_1}{V_2}}_{\boxed{\text{DEMO}}}$$

Wir werden nun unseren neuen
Zusammenhang zwischen F, m, a
auf die Kreisbewegung anwenden.

$$F = m \cdot a$$

$$\hat{L} \quad a = \omega^2 \cdot r \quad \left. \begin{array}{l} \text{Zentri-} \\ \text{petal} \\ \text{beschl.} \\ \text{(Beträge)} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{v^2}{r}$$

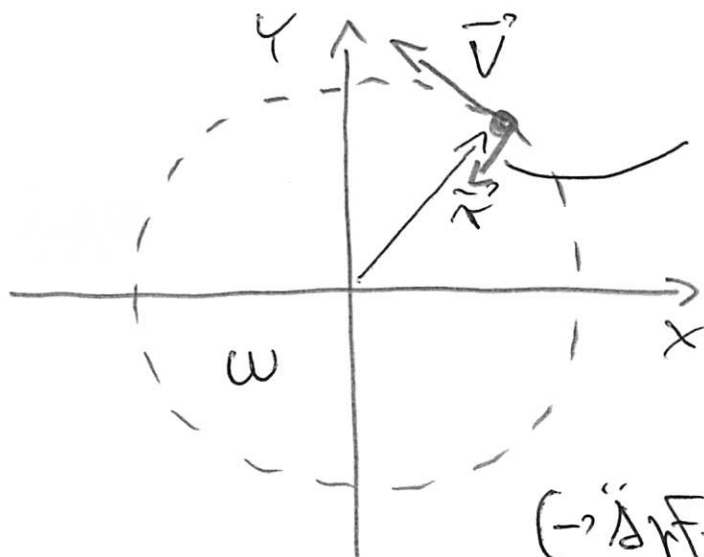
Damit:

$$\vec{F}_{zp} = - m \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

entgegen
 $\vec{r}$

Einheitsvektor
in $\vec{r}$ -Richtung

$$\vec{a}_{zp} = - \frac{v^2}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$



$\vec{F}_{zp}, \vec{a}_{zp}$

Achtung,

andere

Einheiten!!

(→ Äpfel + Birnen!)

DEMO Schleifscheibe
→ Abschalten von $\vec{F}_{zp}$

Bahngeschw. ist
tangential!

Wir wollen nun eine ganze Reihe von Beispielen für die Newtonsche Bewegungsgleichung und ihre Lösungen durchgehen.

① Freier Fall

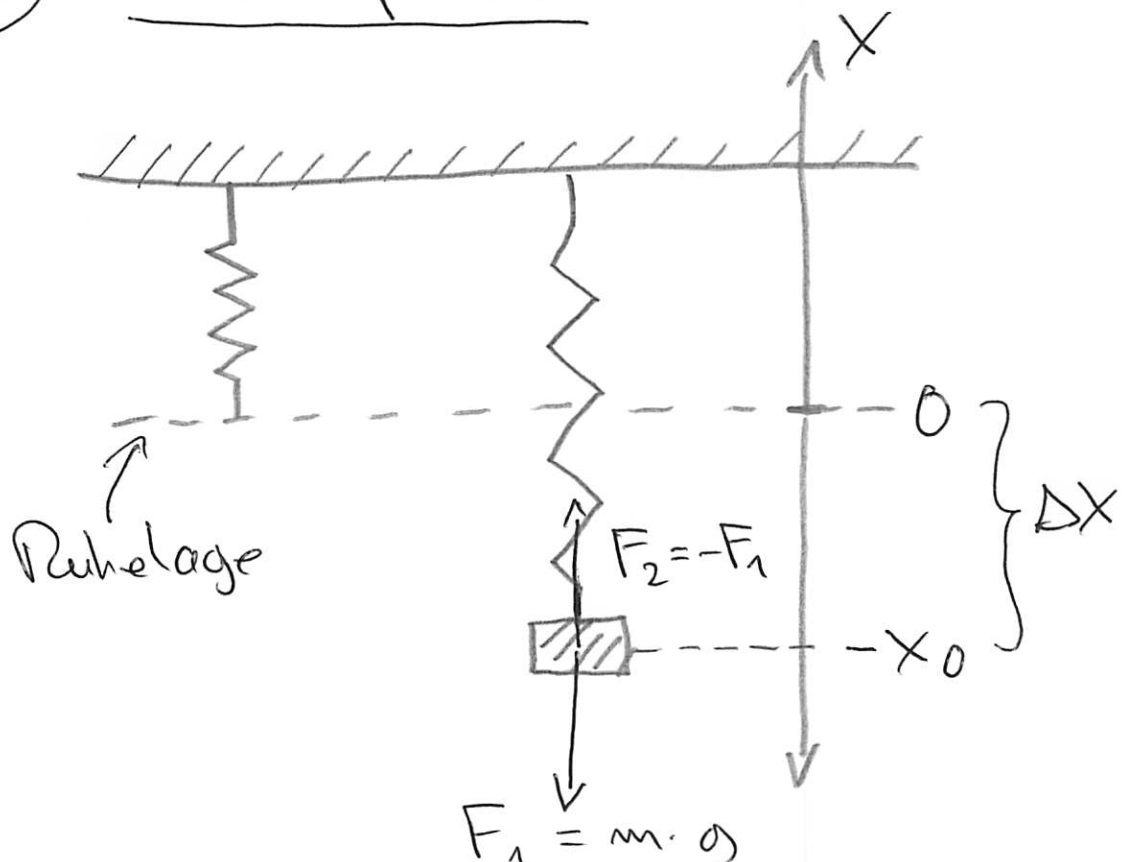
$$\underbrace{m \cdot \ddot{x}}_{\text{Wirkung}} = \underbrace{m \cdot g}_{\text{Ursache}}$$

Lösung: $x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2$

Können der trägen gegen die schwere Masse!

↳ muß experimentell verifiziert werden!

② Federpendel



Beobachtung: Trotz g fällt die Masse nicht.
Neue Kraft!

DEMO: Hookesches Gesetz bei
Spinalfeder

Formal:

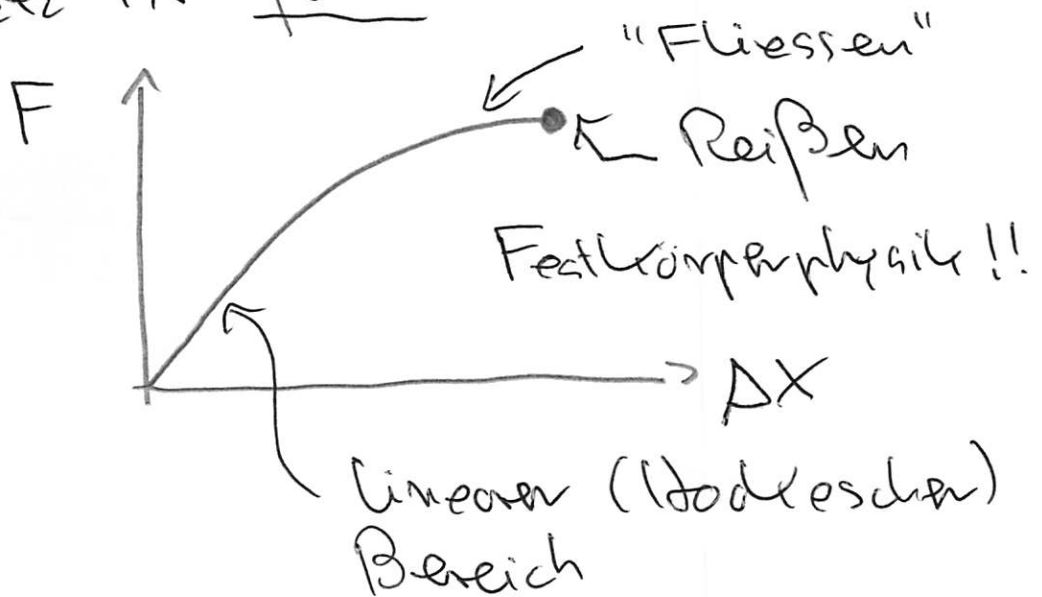
$$\vec{F} = -k \cdot \Delta \vec{x}$$

"Hookesches Gesetz"

"rücktreibende Kraft"

k : Federkonstante

In der Praxis: Das Hookesche
Gesetz ist falsch ...



Wieder: Idealisierung ist ein ganz
wichtiges Prinzip in der Physik!
Dies ist eine sehr wichtige Idealisierung!

Was sagt Newton dazu?

$$F = m \cdot \ddot{x} = \underbrace{-m \cdot g}_{\substack{\text{Schwerkraft} \\ \text{V.2. durch} \\ \text{Koord. Syst.}}} + \underbrace{k \cdot (x_0 - x)}_{\substack{\text{Feder-} \\ \text{Kraft}}}$$

Nun ist das Vorzeichen von $x_0 - x$ wichtig!

$x > x_0$ (pos. Auslenkung)

$$x_0 - x < 0$$

Kraft in Richtung von $\vec{g}$

Kraft gegen Auslenkung

↑ Federkraft!

$x < x_0$ (neg. Auslenkung)

$$x_0 - x > 0$$

Kraft gegen Richtung von $\vec{g}$

Kraft gegen Auslenkung

$x = x_0$ (Keine Auslenkung)

$$x_0 - x = 0$$

Keine Federkraft durch
Auslenkung

Damit können wir die Bewegungsgleichung wie folgt schreiben:

$$F = m \cdot \ddot{x} = \underbrace{-k \cdot x_0 + k \cdot x_0 - k \cdot x}_{x_0 \text{ spielt keine Rolle so lang die Feder linear ist}}$$

$$\underbrace{m \cdot \ddot{x}}_{\text{Trägheit}} = \underbrace{-k \cdot x}_{\text{Physik der Elastizität}}$$

"Schwingungsgleichung"
(extrem wichtig!)

$$\text{DEMO Vergleich} \quad \begin{aligned} m \cdot \ddot{x} &= m \cdot g \\ m \cdot \ddot{x} &= -k \cdot x \end{aligned}$$

offensichtlich wollen wir $x(t)$!

$$\underbrace{\ddot{x} \sim -x}$$

homogene, gewöhnliche
Differentialgl. 2. Ordnung

Einfach durch einen Ansatz zu lösen:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Dimensionen:

A : Länge

$$\omega: \frac{1}{\text{Zeit}}$$

φ : Phase (Winkel)

Wir erwarten (2. Ordnung):

2 frei wählbare Konstanten
(wie beim freien Fall: x_0, v_0)

A, ω, φ ?!

Nachsehen:

$$\dot{x}(t) = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{x}(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$



gut!

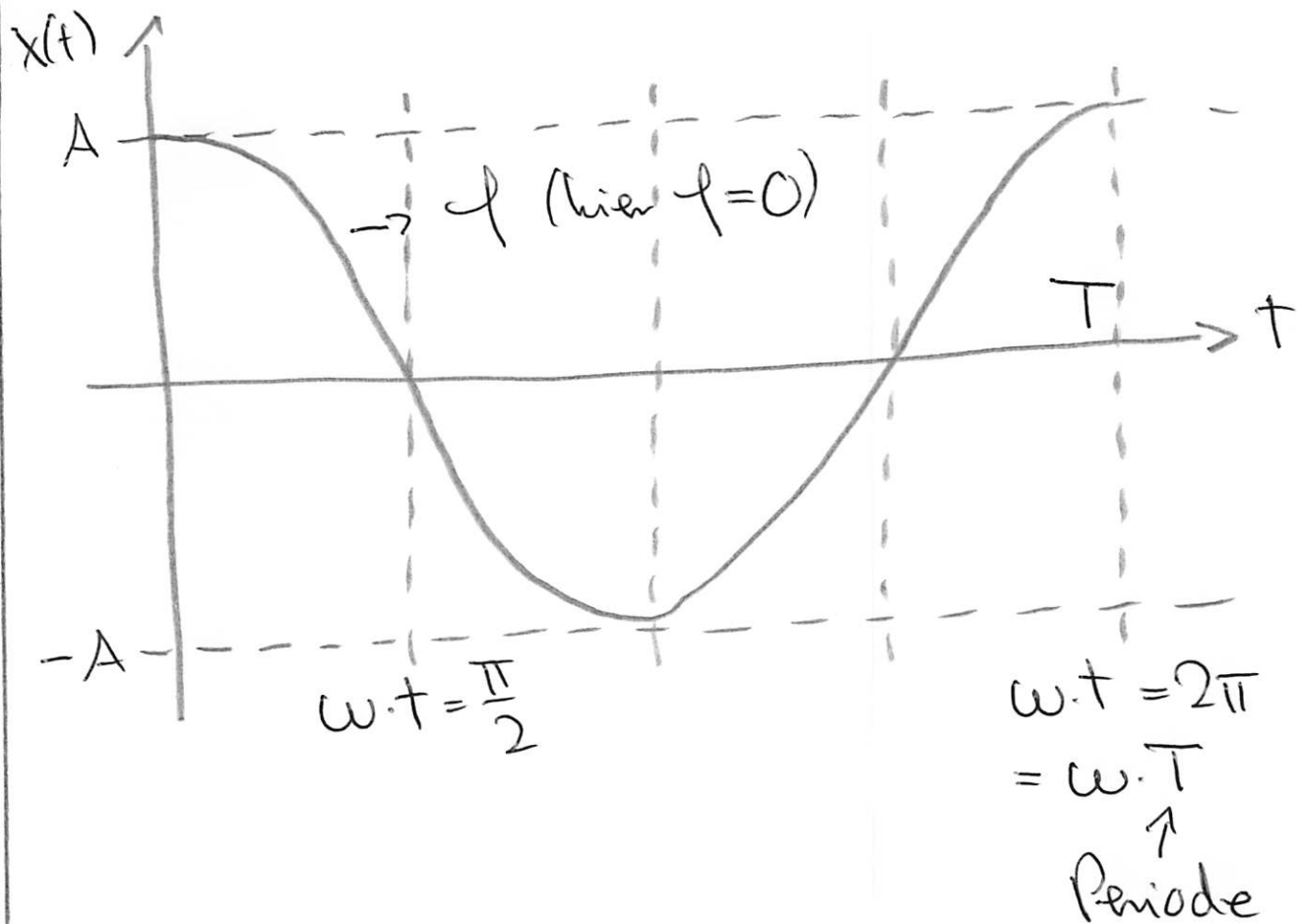
Einsetzen in Bew. Gleichung:

bleibt: $m \cdot \omega^2 = k$

oder: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Wahl der "Physik"
(Feder, Masse)

ω ist also keine frei wählbare Anfangsbedingung
Was ist es dann?



Also:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

↳ "harmonische Schwingung"

A : Amplitude

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \nu : \text{Kreisfrequenz}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ oder } T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

= Eigenfrequenz (Physik des Systems)

φ : Phase

Lineares Kraftgesetz $\leftrightarrow$ harmonisch

noch mal zu ω :

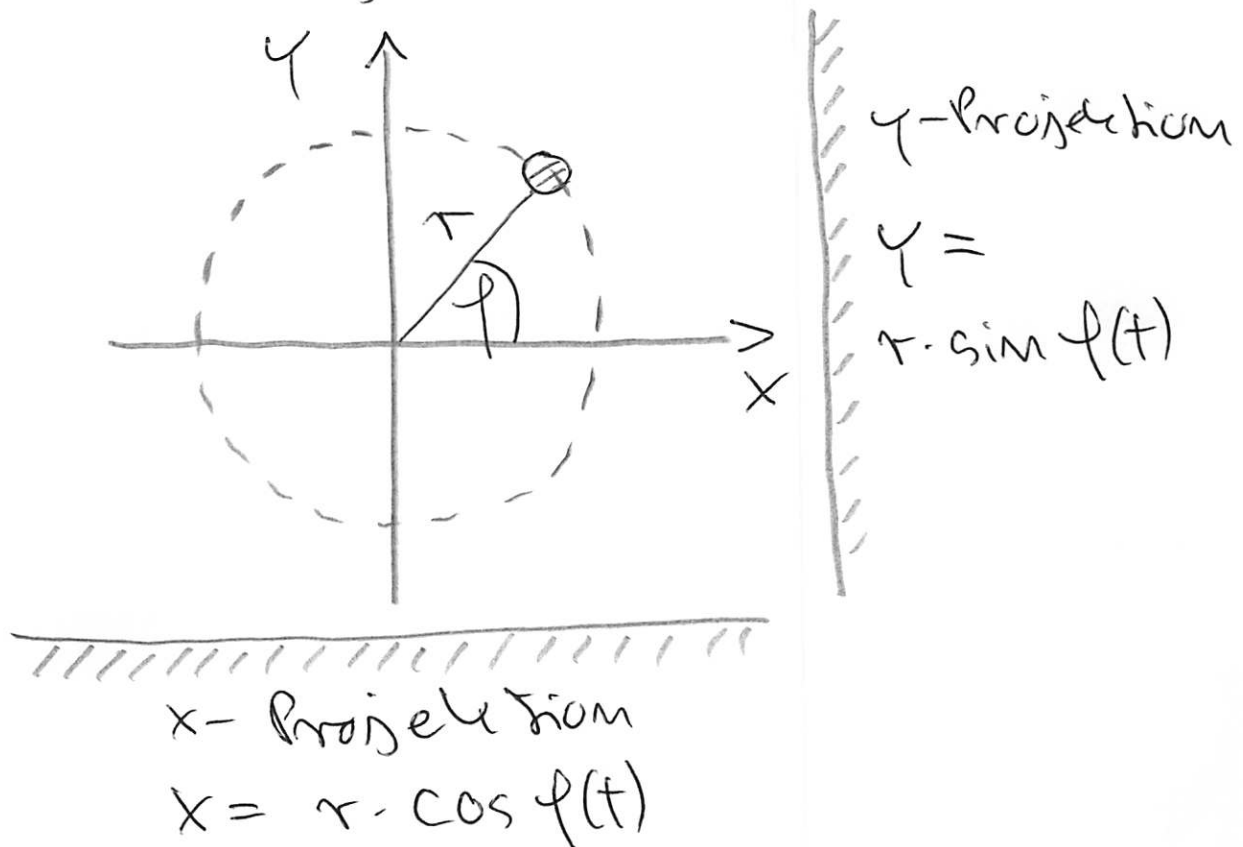
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \nu$$

"Kreisfrequenz"

Wie bei der Kreisbewegung ---!

Aber ist hier ein "Kreis"?

Erinnerung



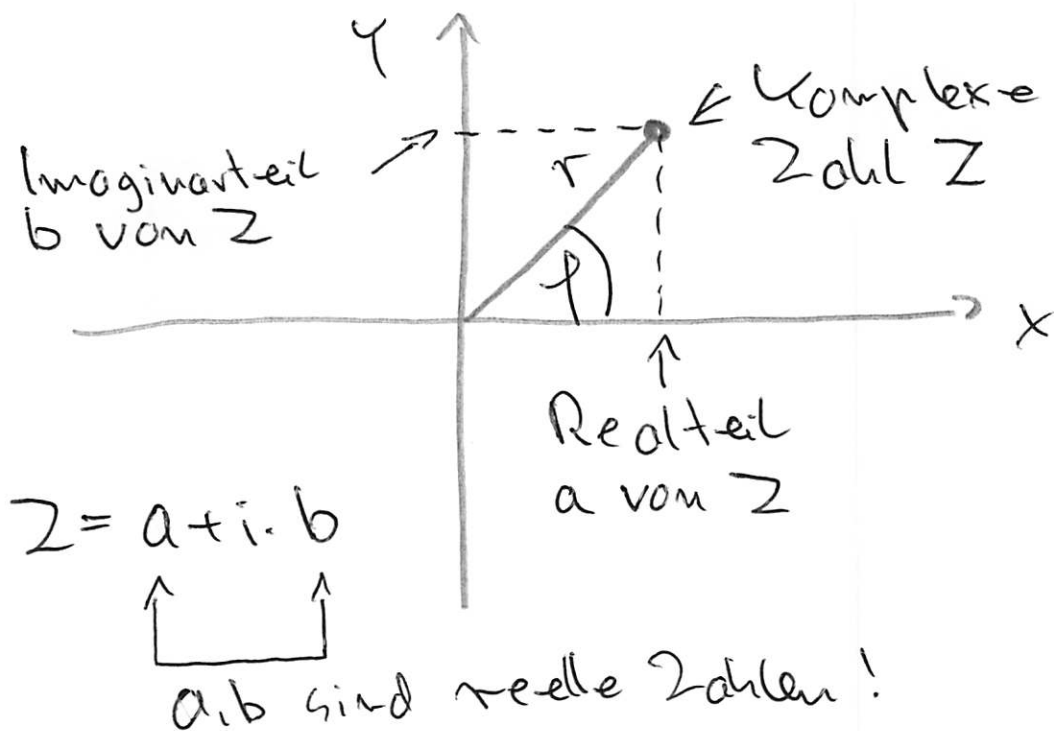
DEMO: Federpendel und
rotierende Scheibe
in der Projektion

hier, $\varphi(t) = \omega \cdot t$

↑
nicht unsere "Phase" ---

Eine Kreisbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ergibt in der Projektion eine harmonische Schwingung.

So etwas kennen wir auch in der Mathematik:



Z kann man auch anders schreiben:

$$Z = r \cdot \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$$

oder

$$Z = r \cdot e^{i\varphi} \quad \text{"Euler-Bezeichnung"}$$

Also: $Z = r \cdot e^{i\omega t}$ beschreibt die "gleichförmige Kreisbewegung" der Position einer komplexen Zahl in der komplexen Ebene.

Damit können wir die allg.
Lösung auch anders formulieren:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{i\omega t} + C_2 \cdot e^{-i\omega t}$$


Superposition mit zwei
Anfangsbedingungen

Ist die Welt "komplex"?

Nein, nicht in der klassischen Physik!

$x(t)$ ist reell, wenn

$$C_1 = C_2^* = C$$

↑ komplex konjugiert

$$x(t) = C \cdot e^{i\omega t} + C^* \cdot e^{-i\omega t}$$


$$a + b \cdot i$$

$$a - b \cdot i$$

Jetzt: Verwende für jede Exp. Fkt.,
die Eulersche Formel

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \cdot \sin \omega t$$

$$e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \cdot \sin \omega t$$

Dann

$$x(t) = \underbrace{2a \cdot \cos \omega t}_{C_1} - \underbrace{2b \cdot \sin \omega t}_{C_2}$$

mit dem Additionstheorem

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

Kann man benennen:

$$C_1 = A \cdot \sin \varphi$$

$$C_2 = A \cdot \cos \varphi$$

Und dann:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

wahl bekannt (geratene Lösung...)

3. Gedämpfte Schwingung

In der Realität sind natürlich alle (klassischen) Schwingungen gedämpft

DEMO

Dämpfung durch "Energieverlust"
(Reibung, Magnetfelder, ...)

Immer nur wenn sich die schwingende Masse bewegt! $\rightarrow$ Reibung = $F(v)$

Ein möglicher Ansatz ist die lineare v -Abhängigkeit

Reibungskraft
NEU

muß in die
Newton Gleichung!

$\sim$
 $\nearrow$
bremsend

$\checkmark$
 $\nearrow$
Bewegung
(linear)

Gilt z.B. nicht für:

- Schiffe
 - Flugzeuge
 - Taucher
- } Turbulenzen:
 $\sim v^2$
 $\sim v^3$
⋮

Eigentlich fast nie...

Trotzdem wagen wir mal folgenden

Ansatz:

$$\underbrace{m \cdot \ddot{x}}_{\text{Newton}} = - \underbrace{k \cdot x}_{\text{Elastiz.}} - \underbrace{\beta \cdot \dot{x}}_{\text{NEU: Reibung}}$$

"Material" ↖

DEMO: Galvanometer

Also:

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{\beta}{m}}_{\substack{\uparrow \\ 2 \cdot \delta \\ \text{Name ...}}} \cdot \dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\substack{\uparrow \\ \omega^2}} \cdot x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\delta \cdot \dot{x} + \omega^2 \cdot x = 0$$

Exponentialansatz:

$$x = C \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

Einsetzen ergibt charakt. Gleichung:

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$$

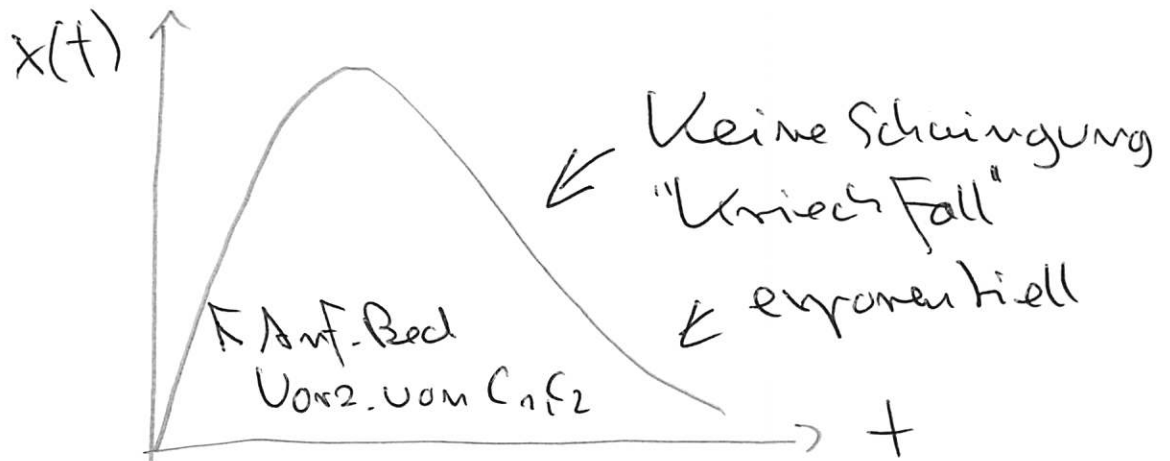
Das ist eine quadratische mit
Fallunterscheidungen

Anderer ausgedrückt:

$$(\lambda + \delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2}) \cdot (\lambda + \delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2}) = 0$$

$\delta^2 > \omega^2$ (starke Dämpfung)

$$x(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(C_1 \cdot e^{\sqrt{\delta^2 - \omega^2} \cdot t} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{\delta^2 - \omega^2} \cdot t} \right)$$

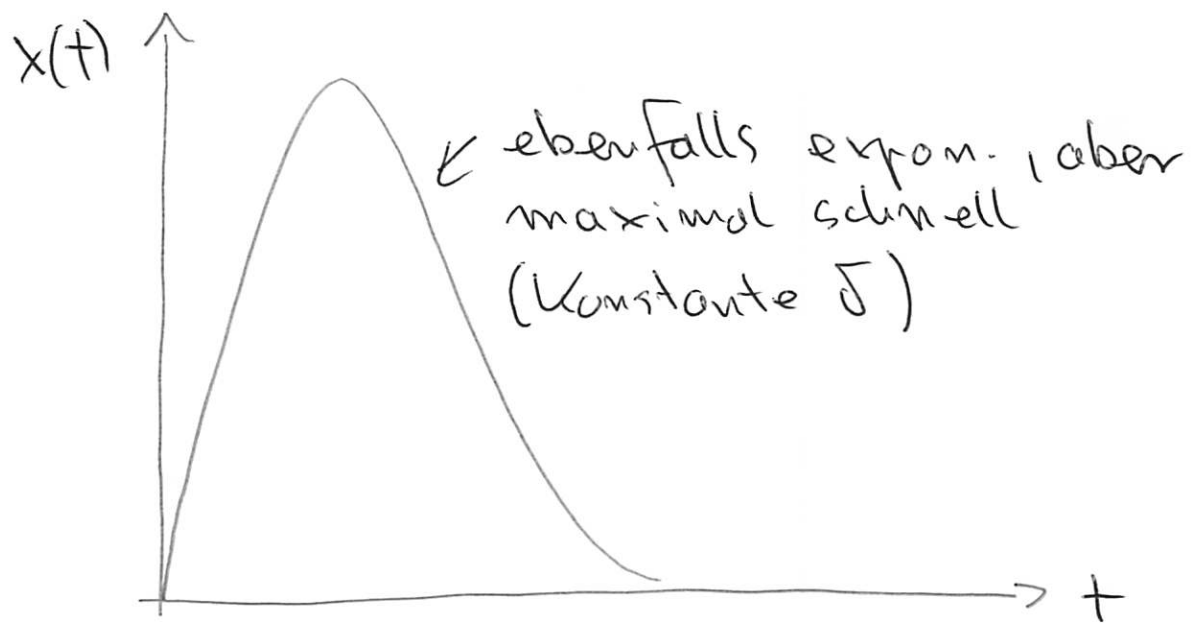


DEMO

$\delta^2 = \omega^2$ (kritische Dämpfung)

In diesem Fall reduziert
sich die charakteristische
Gleichung: $(\lambda + \delta)^2 = 0$

$$x(t) = C_1 \cdot e^{-\delta \cdot t} + C_2 \cdot t \cdot e^{-\delta \cdot t}$$



wichtig für schwingende Systeme die man gern beruhigen möchte!

- optische Tische
- Zeigermessgeräte
- Fahrzeuge

DEMO

$$\underline{\delta^2 < \omega^2} \text{ (Schwingfall)}$$

Dämpfung ist so schwach, daß vollständige Oszillationen erfolgen.

Einsetzen und Verwendung der Euler-Beziehung ähnlich wie bei der ungedämpften Schwingung.

$$x(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot (C_1 \cdot \cos \omega_D \cdot t + C_2 \cdot \sin \omega_D \cdot t)$$

$$\text{hier ist: } \omega_D = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$$

↑
Dämpfung

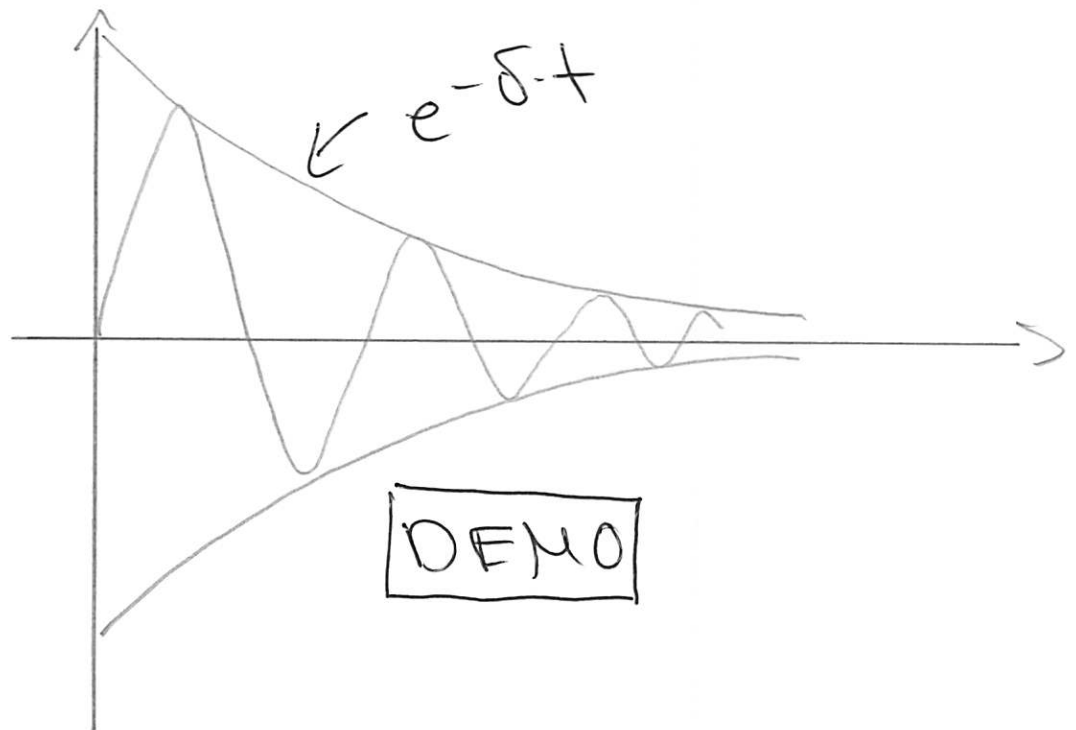
Eine reduzierte Eigenfrequenz!

Unter Verwendung des Additionstheoreme für $\sin/\cos$ erhält man:

$$x(t) = A \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

↑
Phase

(geht auch mit $\cos$ -Funktion)



④ Angeregte Schwingungen

bisher:

$$m \cdot \ddot{x} = -kx - \beta \cdot \dot{x}$$

jetzt

$$m \cdot \ddot{x} = -kx - \beta \cdot \dot{x} + \underbrace{F_e(t)}$$

NEU, externe
Kraft mit eigener
zeitabhängigkeit

oder:

$$\ddot{x} + 2 \cdot \delta \cdot \dot{x} + \omega \cdot x = \frac{F_e}{m}$$

↳ inhomogene Gleichung

Das haben wir gelernt...:

$$x(t) = x_{si}(t) + x_{ah}(t)$$

↑
spezielle Lösung
inhom. Gleichung

↑
geschickt wählen

↑
allgem. Lösung
hom. Gleichung

↑
haben wir gerade
gemacht! 😊

↓
System folgt Anregung,
z.B. bei harm. Anregung:

$$x_{si}(t) = A \cdot \cos(\omega_e t + \phi)$$

↑
anregende
Frequenz
"extern"

↑
mögliche Phasen-
verschiebung
zwischen An-
regung und Schwingung.

offen nicht löslich:

$$x_{ah}(t) = B \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_p t + \varphi)$$

↑
Diese Lösung verschwindet
mit der Zeit!

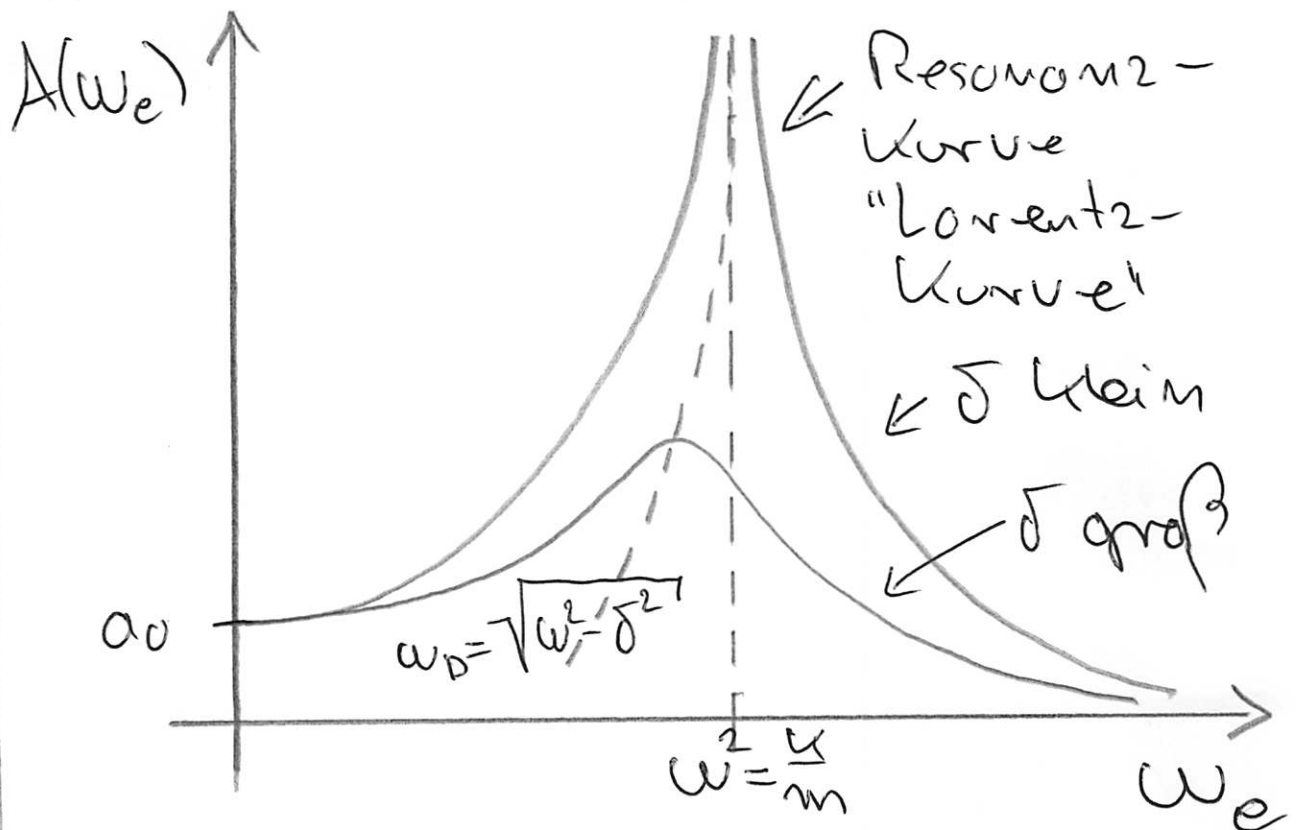
Wenn wir nur lang genug
warten, bleibt nur noch $x_{si}(t)$!
"Einschwingvorgang"

Wenn wir diesen Ansatz in die
Bew. Gleichung einsetzen, erhalten
wir:

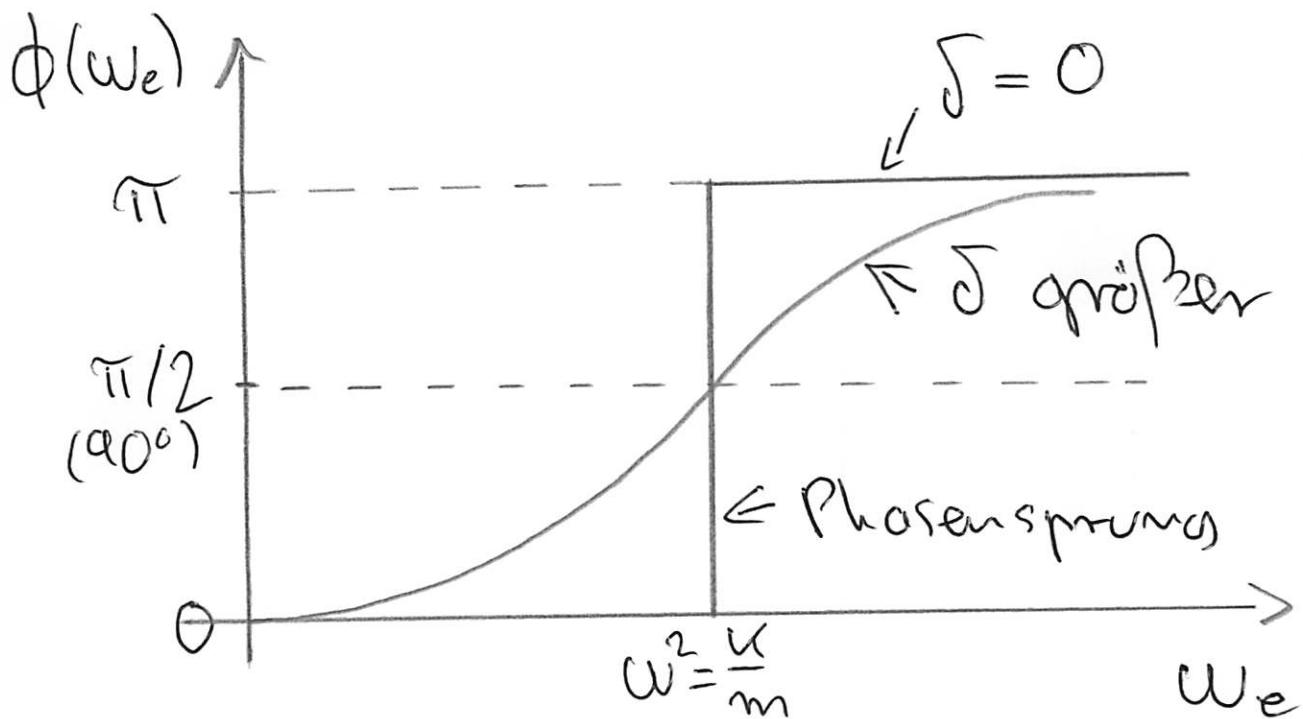
$$x_{si}(t) = \underbrace{A(\omega_e)}_{\uparrow} \cdot \cos(\omega_e t + \underbrace{\phi(\omega_e)}_{\uparrow})$$

↳ Amplitude und rel. Phase sind
von der anregenden Frequenz
abhängig ?

Wie ? Hier nur graphisch :



Film

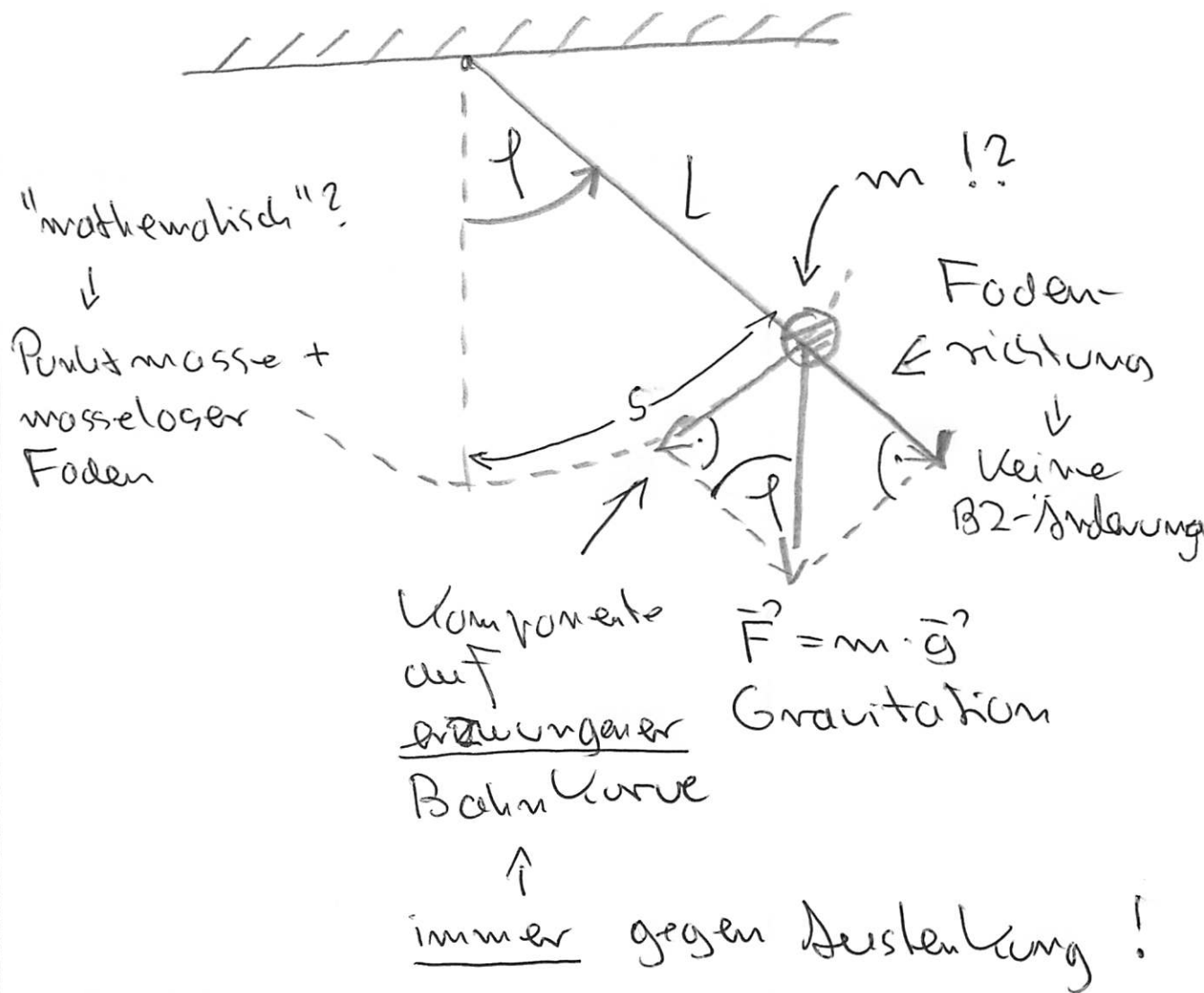


- Bei kleinen externen Frequenzen sind Anregung und Schwingung in Phase
- Bei großen externen Frequenzen sind Anregung und Schwingung gegenphasig (180°)
- Auf der Resonanz ist die Phasenw. 90°

DEMO Schaukel

DEMO Pulsches Rod

5. Das mathematische Pendel



**DEMO: Kräftezerlegung und
Zwangsbedingungen**

Prüfungsfrage: Hängt die rücktreibende
Kraft linear von der Auslenkung ab?

$$F = -m \cdot g \cdot \sin \varphi$$

$$\varphi = \frac{s}{l} \text{ (Bogenmaß)}$$

Wir können s "Auslenkung" nennen

$$F = -m \cdot g \cdot \sin\left(\frac{s}{L}\right)$$

↑ nicht linear ☹️

aber:

$$\sin \varphi = \frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$$

"Ungerade Funktion": $\sin(x) = -\sin(-x)$

wenn wir nur den ersten Term verwenden:

$$\underbrace{m \cdot \ddot{s}}_{\text{NII}} = - \underbrace{m \cdot g \cdot \frac{s}{L}}_{\text{Gravitation (am Faden)}}$$

Das ist eine Schwingungsgleichung!

Die Lösung trägt einen anderen Namen: $s(t)$

Die Lösung ist dann klar:

$$s(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{mit } \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \text{ oder } T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Eigenfrequenz eines
mathematischen Pendels
nicht masseabhängig!
(wie Feder Fall...)

6. Gravitation auf großen Distanzen

Folie: Brahe, Kepler, Newton

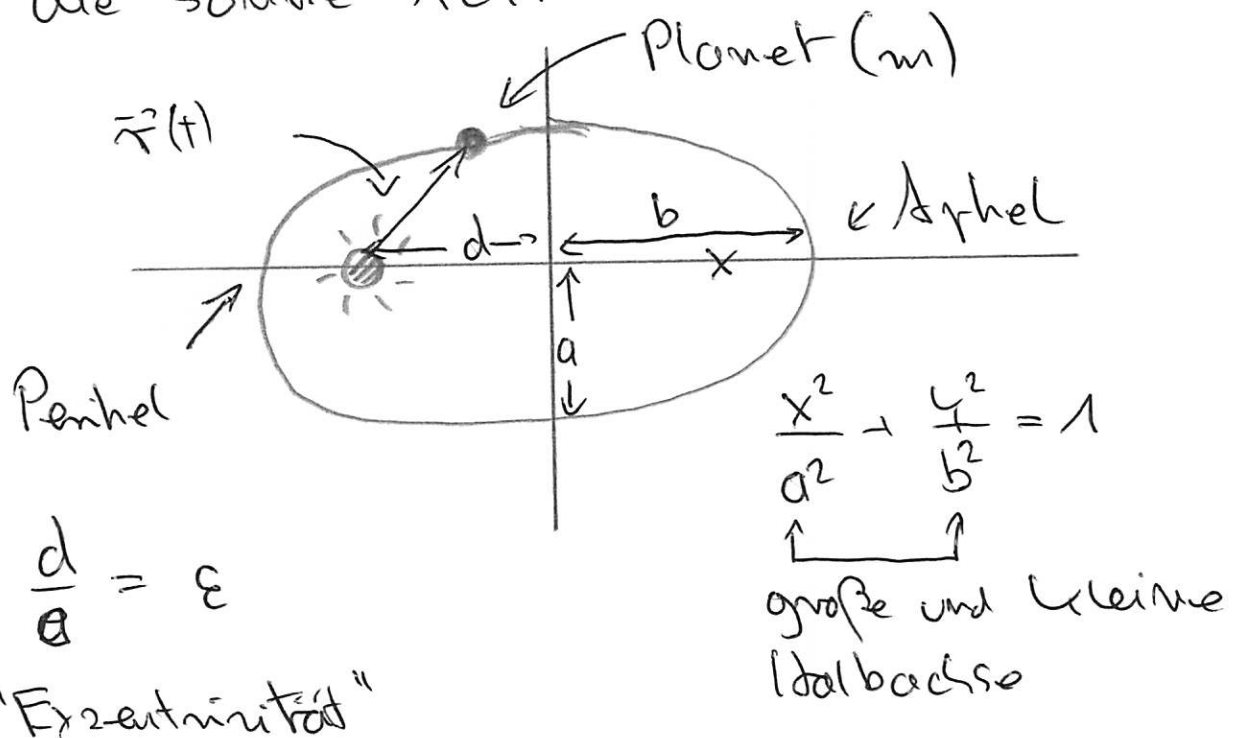
wichtig: Planomenologie!

Beschreibung (mathematisch) einer bestimmten Naturerscheinung

→ Keine Generalisierung → Newton!

Kepler-Gesetze

① Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht



Wenn $\epsilon = 0$, dann $a = b = |\vec{r}(t)|$: Kreis

② Der Ortsvektor $\vec{r}(t)$ überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen
also z.B. $\dot{\vec{r}}(t) = 0$ für $\epsilon = 0$

3. $\frac{a^3}{T^2} = \text{const.}$ Für alle geschlossenen Bahnen
 $\uparrow$ Umlaufzeit

Jetzt drehen wir den Spieß um:
 Wir wissen von Brahe und Kepler wie die Bewegung erfolgt. Welche physikalische Kraft brauchen wir dafür?

$$m \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{\text{neu}}$$

/ "neue Physik"

Kreisbewegung

$$m \cdot \omega^2 \cdot r = F_{\text{neu}} = F_G$$

$\uparrow$ Konst. $\uparrow$ Gravitation

$$m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r = F_G$$

Kepler: $\frac{a^3}{T^2} = \frac{r^3}{T^2}$ für Kreis

damit muß gelten: $F_G \sim \frac{1}{r^2}$ (weil:)

Für $m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r = C \cdot \frac{1}{r^2}$ $\swarrow$

ist $\frac{r^3}{T^2} = \frac{C}{m \cdot 4\pi^2} = \text{const.}$
Kepler

Diese Gleichung ist interessant, sie sagt etwas über die Stärke und die Ursache der Gravitation aus!

Newton: "Masse" ist auch Ursache der Gravitation. (später mehr)

$$\vec{F}_G = - \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$\vec{F}_G$ ↑ anziehend
 γ ↑ Grav. Konst.
 $\frac{m \cdot M}{r^2}$ ↑ geteilt, so dass $m_S = m_T$
 $\frac{\vec{r}}{r}$ ↑ radial
 $\frac{1}{r^2}$

"Zentralkraft"

Wichtige Annahmen!

- "Naturgesetz", aber nur bewiesen für Distanzen im Sonnensystem bis hinunter zu $\sim 100 \mu\text{m}$

↳ große Distanzen?

Ist die dunkle Materie nur "Unverständliche" Gravitation?

MOND: Modifizierte Newtonsche Dynamik!?

↳ kleine Distanzen?
(extra Raumdimensionen?)

- Wir wissen nur: $m_T \sim m_S$ (in etwa...)
Die "Gleichheit" wird durch die Wahl der Gravitationskonstanten erzwingen

γ muß gemessen werden, ergibt sich nicht aus der Planetenbewegung, da die Masse des Planeten herausfällt.

$$\gamma = 6.67259 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

Warum können wir in unseren Fallexperimenten eine nicht ortsabhängige Gravitationskraft annehmen?

$$m \cdot \ddot{x} = \underbrace{m \cdot g}_{\gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}} \leftarrow \text{Erde Masse}$$

$\uparrow$ Erdradius + Fallhöhe

$\text{Erdradius} \approx 6000 \text{ km}$

→ Fallhöhe vernachlässigen

2.1.4. Impuls + Stoßgesetze

bisher: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ Bewegungsgleichung
→ benötigt Kenntnis der Kräfte !

Es gibt einen Trick, wie man ohne Kenntnis der Kräfte Vorhersagen machen kann

DEMO - Ball

Erhaltungsgrößen E

→ physikalische Größen mit

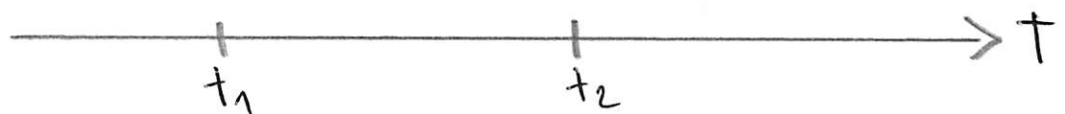
$$E(t) = \text{const.}, \quad \dot{E}(t) = 0$$

(egal was passiert ...)

Beispiele: Energie, Ladung,
Baryonenzahl (?), Parität (?), ...

Achtung: Erhaltungssätze muß man
experimentell überprüfen!

Dann kann man aber Vorhersagen
machen!



$$E_1 = E_2$$



u.U. Summen aus vielen
Beiträgen (Teilchen)!

D-F.

Impuls (engl. momentum
nicht impulse !!)

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Dimension

$$\frac{\text{Masse} \cdot \text{Länge}}{\text{Zeit}}$$

Mit dieser zunächst völlig willkürlichen
Definition:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= m \cdot \vec{a} \\ &= \vec{F} \end{aligned}$$

(für $m = \text{const.}$)

oder $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$

"Die Kraft ist die zeitliche
Ableitung des Impulses"

oder: Der Impuls ändert sich nicht,
so lang keine Kräfte wirken

Nun wollen wir eine eher wenig
verwendete physikalische Größe
einführen.

offensichtlich: $d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt$

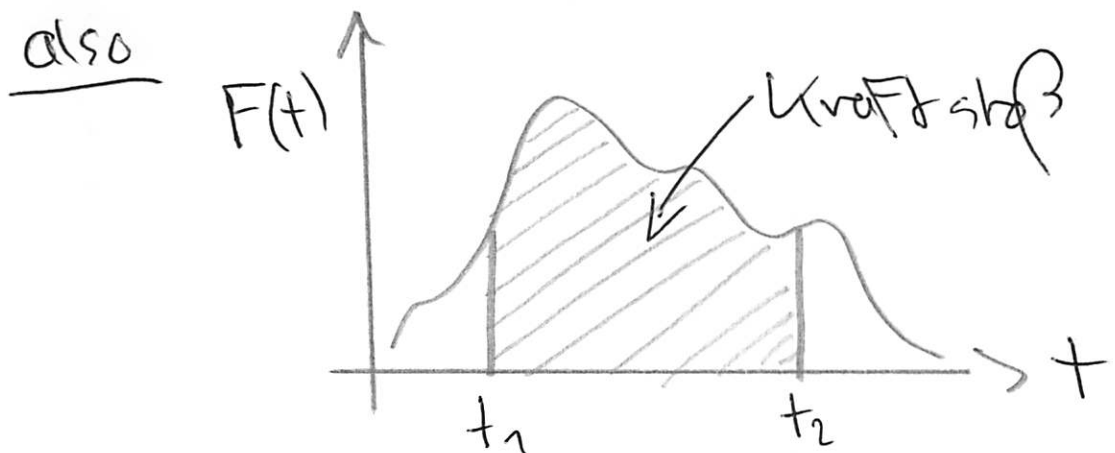
Jetzt ändern wir $\vec{p}$ nicht differentiell
sondern um einen makroskopischen
Betrag:

$$\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_2$$

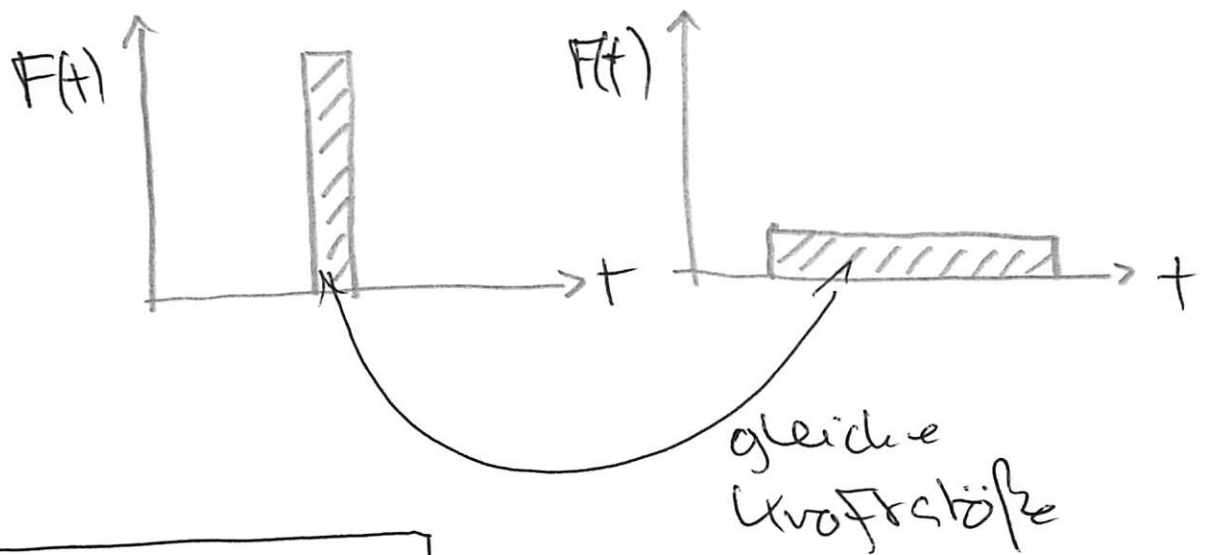
$$\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt$$

Def. $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt$: "Kraftstoß"

engl. Impulse ...



Extrembeispiele:

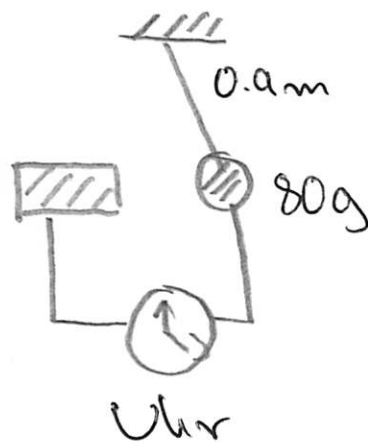


DEMO Teller

DEMO Stoßpende

Stoß $v \rightarrow -v$

$$\Delta p = m \cdot \Delta v = 2 \cdot m \cdot v$$



Abschätzung:

$$v \approx 0.66 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\Delta t \text{ gemessen} \approx 100 \mu\text{s}$$

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

$$F \approx 1056 \text{ N}$$

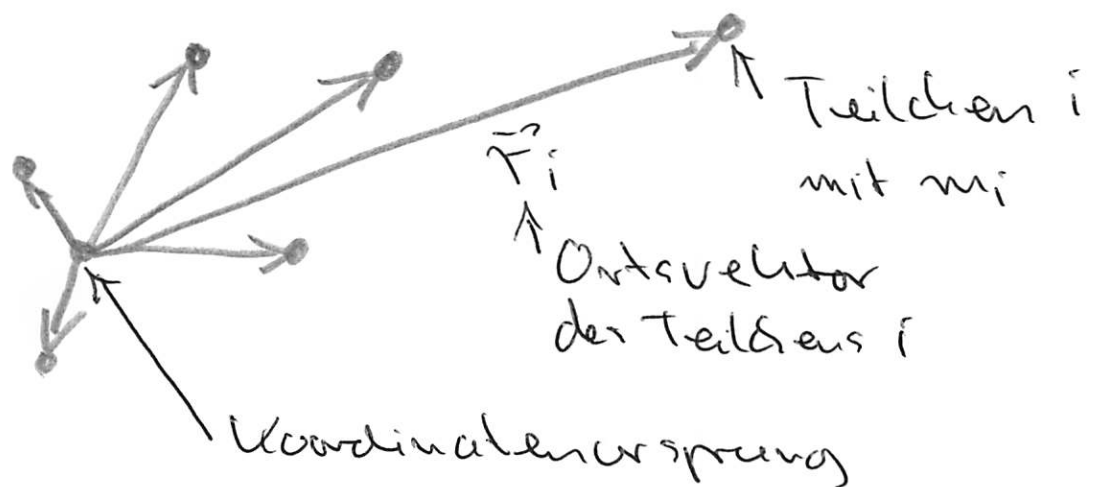
Nun machen wir einen ganz wichtigen Schritt!

Wir betrachten "Vierteilchen-Systeme" (aus Massepunkten)

DEMO: Dozent springt auf
verschiedene Arten auf
Rollwagen

- Impuls kann übertragen werden
- Vektorcharakter

Nun betrachten wir viele Teilchen;



Gesamtmasse: $M = \sum_{i=1}^n m_i$

Def. Schwerpunkt

"masse gewichtete Durchschnitts
Koordinate aller Teilchen"

$$\vec{r}_s = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{M}$$

Schwerpunkt

engl. center-of-mass oder
center-of-gravity (cog)

Beispiel 4 Massen:

m •

• m

← Schwerpunkt (dort ist
in diesem Fall keine Masse)

m •

• m

Betrachten wir nun die Bewegung
dieses Schwerpunktes (auch wenn dort
ggfs. gar keine Masse ist)

$$\vec{V}_S = \frac{d\vec{r}_S}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}_i}{dt}}_{\vec{v}_i}$$

Schwerpunkt-
geschwindigkeit

also:

$$\vec{V}_S = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$$

Definieren wir noch eine neue Größe:

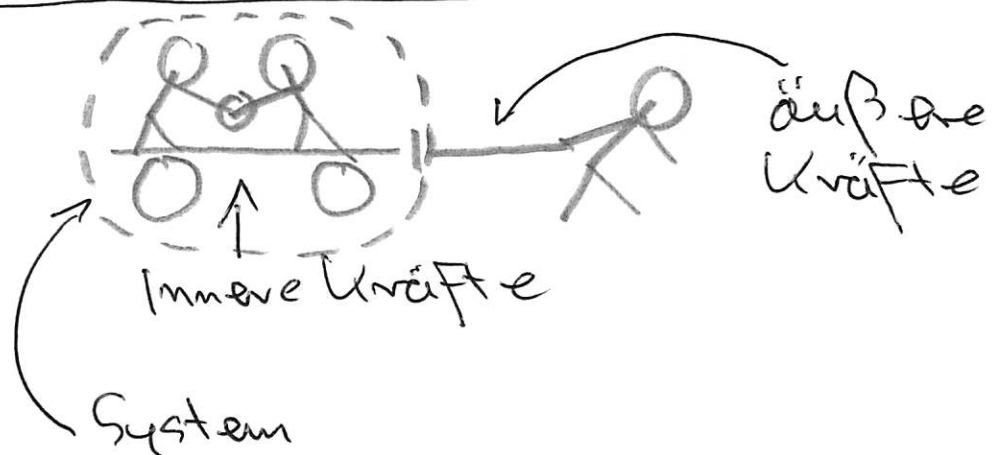
Def. Schwerpunktsumpuls

$$\vec{P}_S = M \cdot \vec{V}_S = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$$

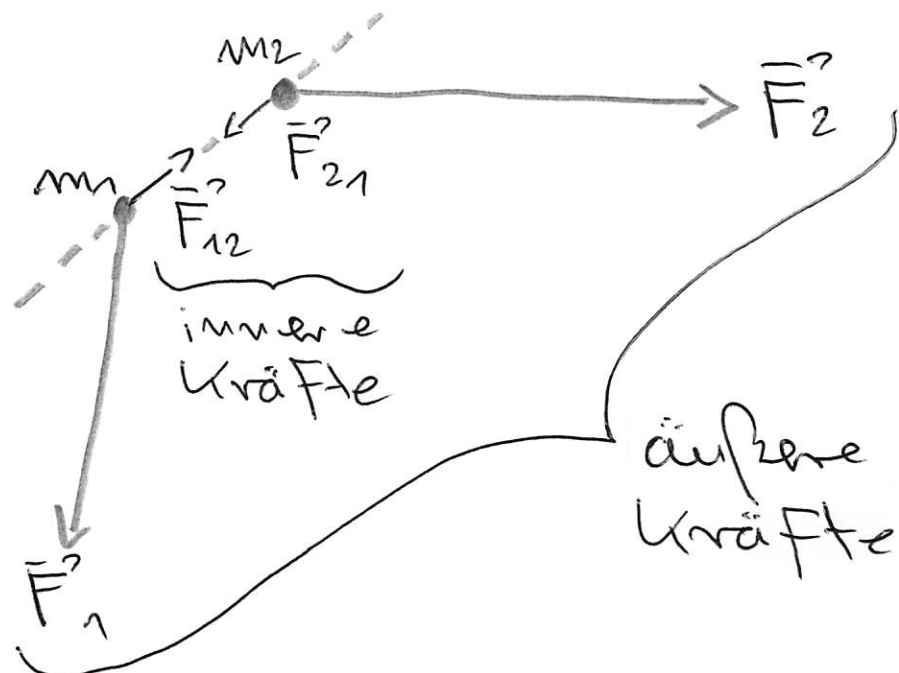
Wie bewegt sich ein solches
"Zweiteilchen System" unter dem
Einfluß von Kräften?

Def: Innere Kräfte sind
zwischen den Massepunkten,
äußere Kräfte kommen von
außerhalb des Systems

DEMO KM und DR auf Wagen



Beispiel Zweiteilchen System:



Für den Schwerpunkt:

$$\dot{\vec{r}}_S = \dot{\vec{r}}_1 + \dot{\vec{r}}_2 = \underbrace{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}_{\text{extern}} + \underbrace{\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}}_{=0}$$

allgemein gilt:

$$\dot{\vec{r}}_S = M \cdot \ddot{\vec{r}}_S = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

(eine Newtonsche BGL)

Der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob dort die ~~Gesam~~ Gesamtmasse M unter dem Einfluß aller äußeren Kräfte steht.

DEMO: gekoppelter Federwagen auf Luftschiene mit markiertem SP

DEMO: Dozent spielt Münchhausen

Def. Ein System ohne äußere Kräfte

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

bezeichnet man als

"abgeschlossenes System"

dann gilt: $\dot{\vec{r}}_S = 0$

oder $\dot{\vec{r}}_S = \sum_{i=1}^n \dot{\vec{r}}_i = \text{const.}$

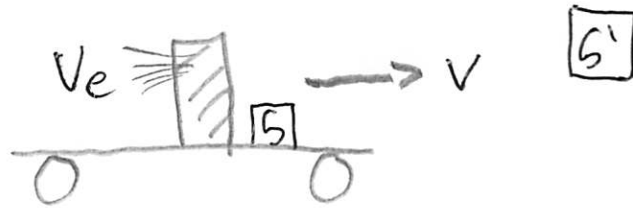
"Impulserhaltung", "Impulssatz"

Jetzt eine allgemeinere Verwendung des Impulssatzes:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) \\ &= m \cdot \dot{\vec{v}} + \underbrace{\vec{v} \cdot \dot{m}}_{? \rightarrow \text{nein!}}\end{aligned}$$

Änderung der Masse!

DEMO Raketenwagen



v_e : Austrittsgeschwindigkeit der Luft ("exit") im Flaschensystem

v_e' : Austrittsgeschwindigkeit der Luft im Laborsystem

Galilei: $v_e' = v_e - v$

nun ist: $m = m(t)$

→ Masse Rakete nimmt ab

→ Geschw. Rakete nimmt zu

→ Masse außerhalb Rakete nimmt zu

Impulssatz im Labor ($p(t) = m \cdot v$):

$$p(t+dt) = \underbrace{(m+dm) \cdot (v+dv)}_{\text{Rakete}} + \underbrace{dm \cdot v_e}_{\text{Luft}}$$

↳ $\text{Gesamt} = \text{Labor}$

$$= m \cdot v + m \cdot dv + \underbrace{dm \cdot dv}_{\sim 0} + dm \cdot v + dm \cdot v_e$$

Betrachte: $dp = p(t) - p(t+dt)$

damit bleibt (unter Verwendung von Galilei):

$$dp = -m \cdot dv - v_e \cdot dm$$

Impulserhaltung:

$$\frac{dp}{dt} = 0 = -m \cdot \frac{dv}{dt} - v_e \cdot \frac{dm}{dt}$$

"Schub"

Keine äußeren Kräfte:

$$-\frac{dv}{dt} - \frac{v_e}{m} \cdot \frac{dm}{dt} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v_e}{m} \cdot \frac{dm}{dt}$$

Integration:

$$\int_0^{v(t)} dv = -v_e \cdot \int_{m_0}^{m(t)} \frac{1}{m} \cdot dm$$

$m_0 \leftarrow$ "Tankfüllung"

also:

$$v(t) = -v_e \ln \left(\frac{m(t)}{m_0} \right)$$

oder

$$v(t) = v_e \cdot \ln \left(\frac{m_0}{m(t)} \right)$$

linear,
wichtig!

logarithmisch,
weniger wichtig

"Raketengleichung"

OEMO: Wasserrakete

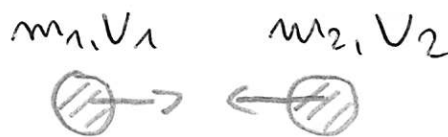
Nun nur wichtigen Prozessen in der
Physik:

"Stoßprozesse"

wichtig: Atom-, Kern-, Teilchenphysik...

Beispiel: Zentraler Stoß zwischen
2 Körpern in einer Dimension.

Vorher:



nachher:



Achtung: Der "'" bedeutet "nachher",
also zunächst keine Koordinaten-
transformation.

Da es keine äußeren Kräfte gibt:

$$\underbrace{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}_{\text{vorher}} = \underbrace{m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2'}_{\text{nachher}}$$

Eine Gleichung, zwei Unbekannte

$$v_1', v_2'$$

Keine eindeutige Vorhersage aus der Impulserhaltung

→ Da die Physik eindeutig ist (Exp.!), brauchen wir eine weitere Einschränkung! → "Energie"

Nutzen wir nunächst einige Exp. auf der Luftschiene:

hier nunächst immer: $m_1 = m_2 = m$

$$v_1 > 0$$

$$v_2 = 0 \text{ (Ruhender Stoß)}$$

a) im elastischen Stoß ("Klebstoff")

$$\underbrace{v_1' = v_2'}_{\text{Kleben zusammen}} = v' \leftarrow \text{nur eine Unbek. !}$$

$$\text{Beobachtung: } v' = \frac{v_1}{2}$$

Das sagt auch der Impulssatz voraus:

$$m \cdot v_1 + 0 = \underbrace{(m+m)}_{\text{kleben}} \cdot v'$$

$$v' = \frac{v_1}{2}$$

Das ist eine kinematische Vorhersage
ohne eine Newtonsche Bewegungsgleichung!

b) elastischer Stoß

$$\left. \begin{array}{l} v_1' = 0 \\ v_2' = v_1 \end{array} \right\} \text{Beobachtung}$$

Das ist mit der Impulserhaltung
verträglich:

$$m \cdot v_1 + 0 = m \cdot v_1' + m \cdot v_2'$$

$$v_1 = v_1' + v_2'$$

aber es ist keine eindeutige
Vorhersage. $v_1' = v_2' = \frac{v_1}{2}$ ginge
auch, ist aber in der Natur nicht
realisiert!

Nun: Genauere Analyse des
elastischen Stoßes:

Dann betrachten wir zwei Koordinatensysteme

- Laborsystem (Luftschiene)
- Schwerpunktsystem (c.m.s.)

Offensichtlich: $\vec{V}_S = 0$ im c.m.s.

Galilei:

$$\begin{array}{ccccc} \vec{w}_i & = & \vec{v}_i & - & \vec{V}_S \\ \nearrow & & \uparrow & & \nwarrow \\ \text{Masse } i & & \text{Masse } i & & \text{Geschw. des} \\ \text{im c.m.s.} & & \text{im Labor} & & \text{Schwerpunktes} \\ & & & & \text{im Labor} \end{array}$$

Elastischer Stoß von 2 Körpern
im c.m.s.:

$$m \cdot w_1 + m \cdot w_2 = 0$$

Bedingung beim el. Stoß:

$$\left. \begin{array}{l} v_1' = 0 \\ v_2' = v_1 \end{array} \right\} \text{im Labor (Schiene)}$$

Galilei sagt dazu:

$$w_1' = -w_1$$

$$w_2' = -w_2$$

DEMO: Luftschiene: Annäherung
an Schwerpunkt-Kollision -
Entfernung vom Schwerpunkt.

Nun betrachten wir Relativgeschwindigkeit.

elastisch	inelastisch	
$V_{\text{rel}} = V_1 - V_2$ $= W_1 - W_2$	$V_{\text{rel}} = V_1 - V_2$ $= W_1 - W_2$	vorher
$V'_{\text{rel}} = V'_1 - V'_2$ $= W'_1 - W'_2$ $= -W_1 + W_2$ $= -V_{\text{rel}}$	$V'_{\text{rel}} = 0$	nachher

↳ Experiment!

Also: Bei elastischen Stoß sagt uns
das Experiment:

$$V'_{\text{rel}} = -V_{\text{rel}}$$

$$|V'_{\text{rel}}| = |V_{\text{rel}}|$$

→ Der elastische Stoß ist "invariant
gegen Zeitumkehr"

AG

WAS ??

Egal wie rum die Uhr läuft,
die Physik ist immer gleich.

Achtung: Das ist beim inelastischen
Stoß nicht der Fall:

$$|V_{\text{rel}}| \neq \underbrace{|V'_{\text{rel}}|}_0$$

Film: Stöße + Uhr

Noether - Theorem "

Invarianz gegen eine Transformation
(hier: Zeit) bedeutet Existenz
eines Erhaltungssatzes

Dies:

$$V'_{\text{rel}} = -V_{\text{rel}}$$

$$V_1 + V'_1 = V_2 + V'_2$$

Wir kennen bereits den Impulssatz:

$$m_1 \cdot V_1 + m_2 \cdot V_2 = m_1 \cdot V'_1 + m_2 \cdot V'_2$$

$$m_1 \cdot (V_1 - V'_1) = m_2 \cdot (V'_2 - V_2)$$

Multiplikation mit $V_1 + V'_1 = V_2 + V'_2$:

$$m_1 \cdot V_1^2 + m_2 \cdot V_2^2 = m_1 \cdot V'^2_1 + m_2 \cdot V'^2_2$$

An dieser Stelle zunächst willkürlich,
aber sicher nicht falsch:

$$\underbrace{\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2}_{\text{vorher}} = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2'^2}_{\text{nachher}}$$

Erhaltungssatz

- Keine Vektoren
- quadratisch (nicht lin.) in d. Geschwind.

Def

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{p^2}{2m} = E_{\text{kin}}$$

"Kinetische Energy"

"Bewegungsenergie"

engl. Kinetic energy

Dimension:

$$\frac{\text{Masse} \cdot \text{Länge}^2}{\text{Zeit}^2} = \text{Kraft} \cdot \text{Länge}$$

Erkenntnis:

- Beim el. Stoß sind Impuls und
kin. Energie erhalten

- Beim inelastischen Stoß ist nur der Impuls erhalten, kin. Energie geht verloren

↓
Später mehr

Also: Beim el. Stoß haben wir nun 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten.

$$p_1 + p_2 = p_1' + p_2'$$

$$E_{\text{kin},1} + E_{\text{kin},2} = E_{\text{kin},1}' + E_{\text{kin},2}'$$

Das kann man mit viel Mühe nach v_1' und v_2' auflösen:

$$v_1' = \frac{v_1 \cdot (m_1 - m_2) + 2 \cdot m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{v_2 \cdot (m_2 - m_1) + 2 \cdot m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}$$

Wichtiger Kontext in der Physik:

"Spezialfälle anschauen"

5 Fälle wollen wir hier diskutieren

1. $m_1 = m_2 = m, V_1 > 0, V_2 = 0$

hatten wir schon ... DEMO

$$\left. \begin{array}{l} V_1' = V_2 = 0 \\ V_2' = V_1 \end{array} \right\} \text{ o.k., eindeutige } \text{Vorhersage!}$$

2. $m_1 = m, m_2 = 2m, V_1 > 0, V_2 = 0$

$$V_1' = \frac{-V_1 \cdot m}{3m} = -\frac{V_1}{3}$$

↑
V2-Wechsel

$$V_2' = \frac{2}{3} V_1$$

DEMO

3. $m_1 = m, m_2 = 3 \cdot m, V_1 > 0 (=v)$ } wie 2.
 $V_2 = -v$ } das

$$V_1' = -2 \cdot v$$

↑
Umkehr

$$V_2' = \frac{-v \cdot 2m + 2mv}{4 \cdot m} = 0$$

DEMO Flummikugle

4. $m_1 = m, m_2 \rightarrow \infty, V_1 = V, V_2 = 0$



Sehr wichtiger Spezialfall!

$$V_1' = \frac{-V \cdot m_2}{m_1 + m_2} \approx \frac{-V \cdot m_2}{m_2} = -V$$

"Reflection"

$$V_2' = \frac{2 \cdot m_1 \cdot V}{m_1 + m_2} \approx 0$$

$\uparrow \infty$

$\rightarrow$ Impuls ändert sich von $+m_1 \cdot V$
nach $-m_1 \cdot V$ um $2 \cdot m \cdot V$

$\hookrightarrow$ "maximaler Impulsübertrag"

$\rightarrow$ kin. Energie ändert sich nicht

$\hookrightarrow$ "minimaler Energieübertrag"

engl.: Impulsübertrag = momentum transfer

DEMO: Kleine Kugel / große Kugel

DEMO: Beuch des Dozenten

Hinweis: Kernstreuung,
Rutherford-Streuung

⑤ $m_1 = m, m_2 \rightarrow \infty, V_1 = 0, V_2 = V$

$$\left. \begin{aligned} V_1' &\approx \frac{2 \cdot m_2 \cdot V}{m_2} = 2 \cdot V \\ V_2' &\approx \frac{V \cdot m_2}{m_2} = V \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{gleiche} \\ \text{Richtung} \end{array}$$

→ großer Energieübertrag

→ kleiner Impulsübertrag

DEMO: große Kugel / kleine Kugel

Hinweis: Ionisation (Elektronen)

Zum Schluß des Kapitels noch
eine Anmerkung zum inelastischen
Stoß.

Unser Experiment:

$$m_1 = m_2 = m$$

$$V_1 > 0$$

$$V_2 = 0$$

$$V' = \frac{V_1}{2}, \quad m = m_1 + m_2$$

Energie Satz:

$$\frac{1}{2} m \cdot v_1^2 + 0 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \cdot \left(\frac{v_1}{2}\right)^2$$

$$= m \cdot \frac{v_1^2}{4}$$


Verlust!

Wdhin?

→ Wärme

→ "innere Energie"

→ "innere Freiheitsgrade"

Inelastizität: $\gamma = 1 - \frac{E_{kin}'}{E_{kin}}$

wichtig in der Kern / Teilchenphysik

2.1.5. Energie (mechanische Energie)

DEMO: Ball experimente

3 Phasen des Experimentes:

① Abbremsen: $v^2(t) \rightarrow 0$

$\hat{=}$ kin. Energie

② Ruhe $v^2(t) = 0 \leftarrow$

③ Beschleunigen $v^2(t) \leftarrow 0$

Verletzung des Energiesatzes ??
Wieso erhält der Ball seine alte Geschwindigkeit?

↳ Das System hat ein
"Gedächtnis" !

Das Gedächtnis liegt in der temporären Verformung des Balls.

Elastizität !

Annahme (Specialfall):

$$F = -k \cdot x \quad (\text{Hookel})$$

Formal

$$\frac{dE_{\text{kin}}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \cdot v^2 \right) = m \cdot v \cdot \underbrace{\frac{dv(t)}{dt}}_{\text{Kettenregel}} = F \cdot v$$

wegen $v = \frac{dx}{dt}$:

$$dE_{\text{kin}} = F \cdot dx \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Verformungs-} \\ \text{strecke} \end{array}$$

In unserem speziellen Fall:

$$\underbrace{F \cdot dx}_{\text{}} = dE_{\text{kin}} = \underbrace{-k \cdot x \cdot dx}_{\text{}}$$


Integration:

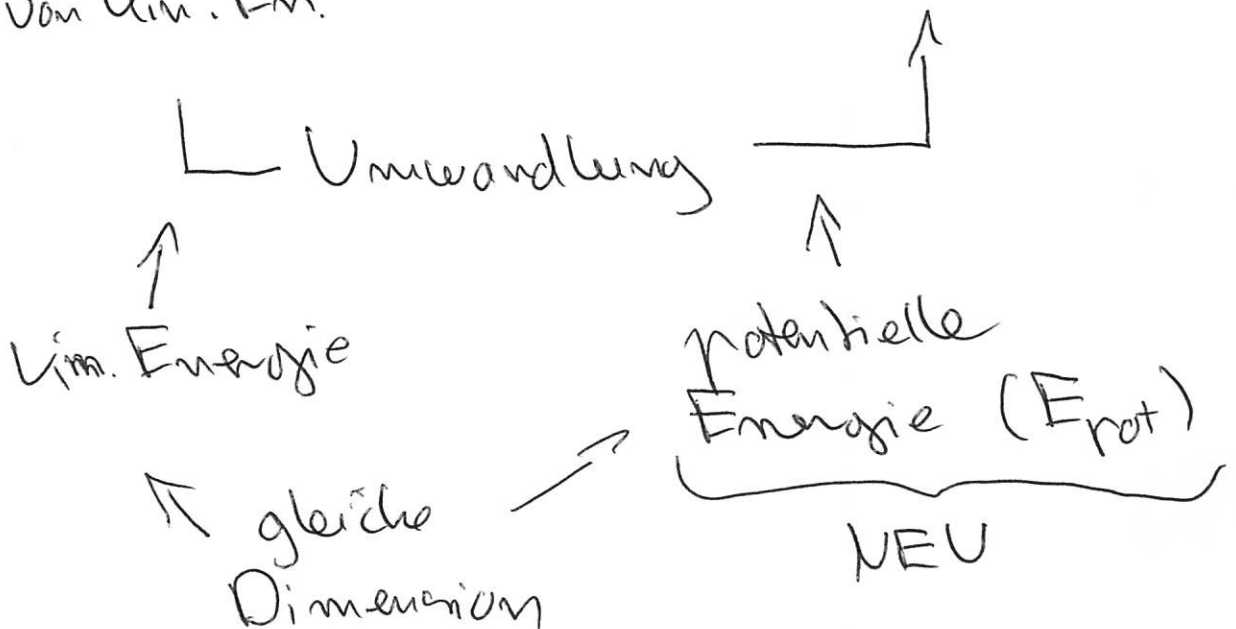
$$\int_0^x E_{\text{kin}} = -k \cdot \int_0^x x' \cdot dx'$$

DEMO Luftballon

$$\underbrace{E_{\text{kin}}(x) - E_{\text{kin}}(0)}_{\text{}} = - \underbrace{\frac{1}{2} k \cdot x^2}_{\text{Speicher}}$$

↑
Verschwinden
von kin. En.

↑
kin. Energie
nimmt ab



Der Energiesatz ist mehr als die Erhaltung der kin. Energie

Es gibt verschiedene Energieformen

allgemein:

$$\begin{array}{ccccc} dE_{\text{kin}} & = & F \cdot dx & = & - dE_{\text{pot}} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \text{Änd. d.} & & \text{von der Kraft } F & & \text{Änd. d.} \\ \text{kin. Em.} & & \text{geleistete} & & \text{pot. Em.} \\ & & \text{"Arbeit"} & & \end{array}$$

Def. Arbeit (engl. Work)

$$W_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F(x) \cdot dx \quad (1\text{-dim.})$$



Weg von x_1 nach x_2

Speziell haben wir gefunden:

Pot. Energie einer elastischen Verformung ($F = -k \cdot x$)

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

Eine weitere Größe:
Leistung (engl. "Power")

"Arbeit pro Zeit"

$$P = \frac{dW(t)}{dt}$$

Dimensionen und Einheiten von
Energie und Arbeit

Kraft $\cdot$ Länge

$$1 \text{ Nm} = 1 \text{ J} = 1 \text{ Ws}$$

Joule

Wattsekunde
($\rightarrow$ Elektrizität)

(J.P. Joule, 1818 - 1889)

$$\begin{aligned} 1 \text{ kWh} &= 3.6 \cdot 10^6 \text{ Ws} \\ &= 3.6 \cdot 10^6 \text{ J} \end{aligned}$$

$$\text{1 eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Elektronen-
Volt

$\rightarrow$ Kern, Teilchenphysik

Dimension und Einheit von Leistung

$$\underbrace{1 \text{ W}}_{\text{Watt}} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

$$1 \text{ PS} = 0.735 \text{ kW}$$

Dimension: Energie / Zeit

noch einmal zur "Speicherung"

$$dW = F \cdot dx = -dE_{\text{pot}}$$

Wer arbeitet, bekommt etwas dafür. Arbeit lohnt sich....

DEMO: Ball, Feder, Gewicht auf dem Boden

Wie im richtigen Leben: Arbeit lohnt sich nicht immer...

Gegenbeispiel Reibungskraft

Def. Kräfte, für die gilt:

$$F = - \frac{dE_{\text{pot}}}{dx} \quad (1\text{-dim})$$

heißen "konservative Kräfte"

Beispiele für konservative Kräfte:

$$F = -k \cdot x \quad (\text{Elastizität})$$

$$\vec{F} = -\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (\text{Gravitation})$$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g} \quad (\text{Grav. auf Erdoberfläche})$$

Die Gleichung für konservative Kräfte können wir integrieren:

$$\underbrace{\int_{x_1}^{x_2} F \cdot dx}_{\text{"Arbeit"}} = - (E_{\text{pot}}(x_2) - E_{\text{pot}}(x_1))$$

Vorher haben wir den Beweis dieser Gleichung nur kin. Energie festgestellt:

$$(E_{\text{kin}}(x_2) - E_{\text{kin}}(x_1)) = - (E_{\text{pot}}(x_2) - E_{\text{pot}}(x_1))$$

oder umgeschrieben:

$$\underbrace{E_{\text{kin}}(x_1) + E_{\text{pot}}(x_1)}_{\text{"Vorher"}} = \underbrace{E_{\text{kin}}(x_2) + E_{\text{pot}}(x_2)}_{\text{nachher}}$$

gleich!

↳ "Gesamtenergie"

Energiesatz für die "Gesamtenergie"

$$H = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{const.}$$

H : Hamilton-Funktion

Konkrete Beispiele

Freier Fall



$x = h \leftarrow$ Fallhöhe

$$dE_{\text{kin}} = F \cdot dx = \underbrace{-m \cdot g}_{\substack{\text{Koordin.-Wert} \\ \nearrow}} \cdot dx$$

$x = 0$ (willkürlich)

Diese spezielle Kraft ist nicht vom Weg abhängig, das macht die Integration einfach:

$$\int_{x=h}^{x_0} F \cdot dx' = -m \cdot g \cdot \underbrace{\int_{x=h}^{x_0} dx'}_{x-h}$$

$$= m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot x$$

Die Energieerhaltung sagt:

$$E_{\text{kin}}(x) - E_{\text{kin}}(h) = \underbrace{m \cdot g \cdot h}_{\substack{\text{Anfangs-} \\ \text{wert von} \\ E_{\text{pot}}}} - \underbrace{m \cdot g \cdot x}_{\substack{\text{Abnahme} \\ \text{von } E_{\text{pot}} \\ \text{während der} \\ \text{Falls}}}$$

$\swarrow$
 z.B. = 0
 zu Anfang

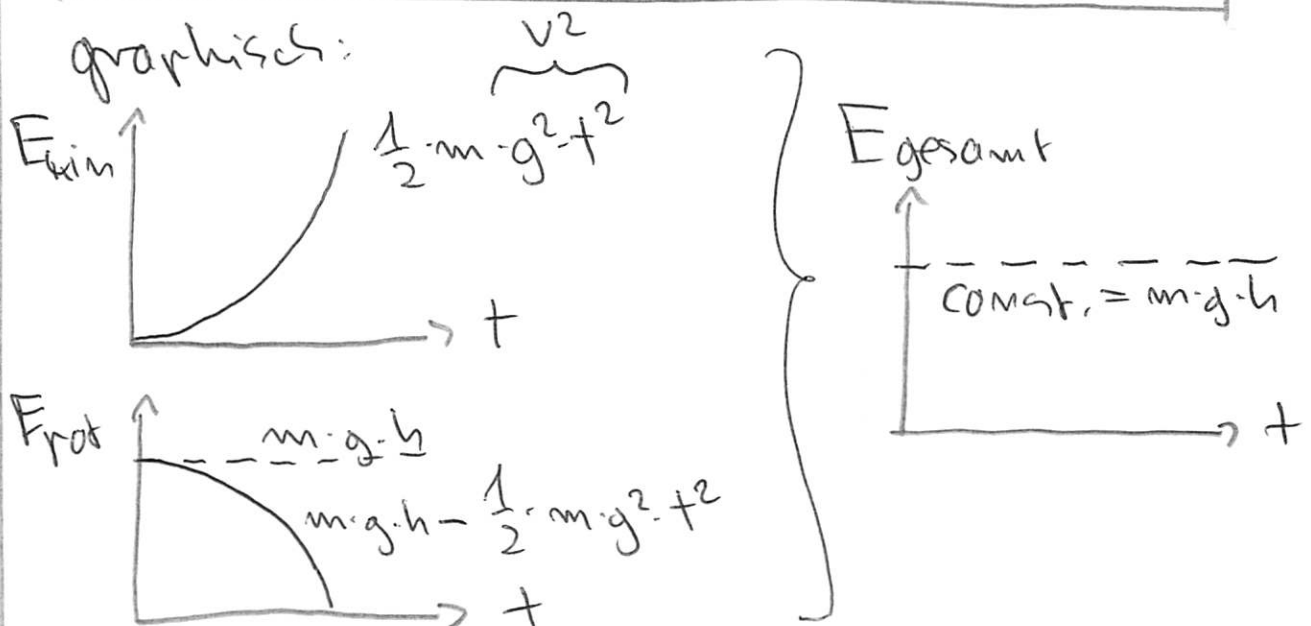
also: $E_{\text{kin}}(x) + E_{\text{pot}}(x) = m \cdot g \cdot h = \text{const.}$

$\nearrow$ $\uparrow$
 nimmt zu nimmt ab
 während des Falls

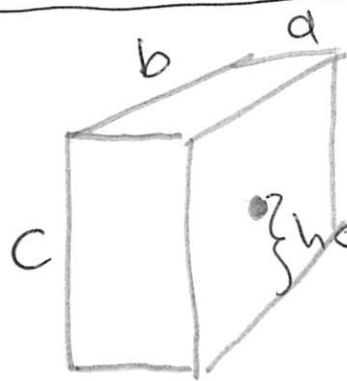
Wir machen uns einen wichtigen Spezialfall für E_{pot} .

Potentielle Energie bei konstanter Grav. Beschleunigung

$$E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$$



DENCO: Mech. Verstärker



$\{h \leftarrow$ Höhe "Schwerpunkt"

$$E_{\text{rot}} = m \cdot g \cdot h = \rho \cdot a \cdot b \cdot c \cdot g \cdot h$$

$\uparrow$
Dichte

$\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$
4 multiplizierte
Längenskalen

Viele Klöbte: "Skaliere" Längenmaße
mit $\sqrt[4]{2}$ von Stein zu Stein

$$E_{\text{rot}, n+1} = (\sqrt[4]{2})^4 \cdot E_{\text{rot}, n} = 4 \cdot E_{\text{rot}, n}$$

Bei 13 Steinen:

$$(\sqrt[4]{2})^{13} = 90 : \text{Längenskalierung}$$

$$(\sqrt[4]{2})^{13} = 740000 : \text{Massenskalisierung}$$

$$(\sqrt[4]{2})^{13} = 67000000 : E_{\text{rot}}\text{-Skalisierung}$$

... viel mech. Arbeit ...

Beschleunigungsarbeit

Beschleunigung einer Masse
von 0 auf v , gegen die
"Trägheit":

$$\int_0^x F \cdot dx' = \int_0^x \underbrace{m \cdot a}_{\text{"Trägheit"}} \cdot dx'$$

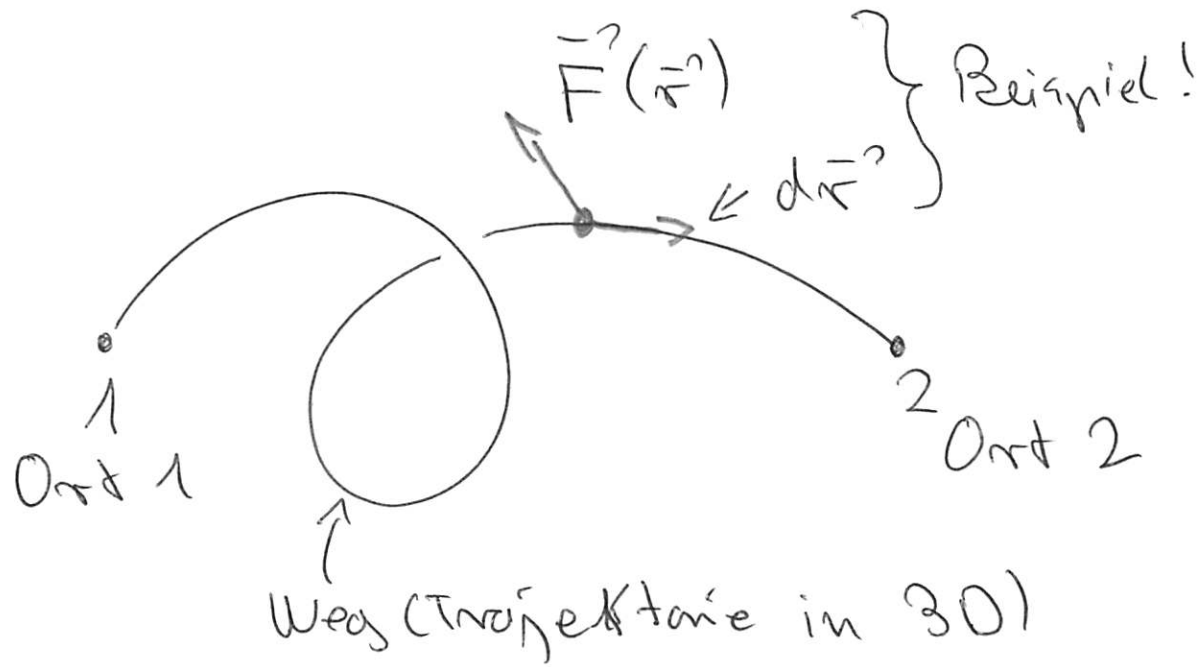
$$= \int_0^x m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot dx'$$
$$= \int_0^v m \cdot v' \cdot dv'$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}$$

absoluter Wert von E_{kin}
(Erinnerung: el. Stöße...)

nun zu einigen Formelitäten:

Die Welt ist dreidimensional:



$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{F}(\vec{r}) = (F_x, F_y, F_z)$$

↖ ↗
beides Vektoren!

Def.

Feld: Phys. Größe, die von den Ortskoordinaten abhängt

Skalares Feld: Phys. Größe ist ein Skalar

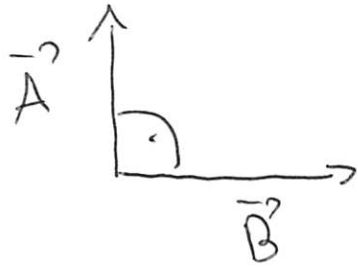
Vektorfeld: Phys. Größe ist ein Vektor

Die Arbeit dW ist aber ein Skalar:

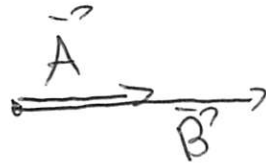
$$dW = \underbrace{\vec{F} \cdot d\vec{r}}_{\text{Skalarprodukt}}$$

$$= F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz$$

Erinnerung:



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$$



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}|$$



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \varphi$$

also:

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_1^2 F_s ds$$

"Arbeit"

"Linienintegral", aufsummieren
aller diff. Arbeiten $dW = F_s ds$
entlang der Bahnkurve
(Trajektorie)

damit gilt für die pot.-Energie

$$dE_{\text{rot}} = - \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

↑ ↑ ↑
Skalar wichtig! Vektor

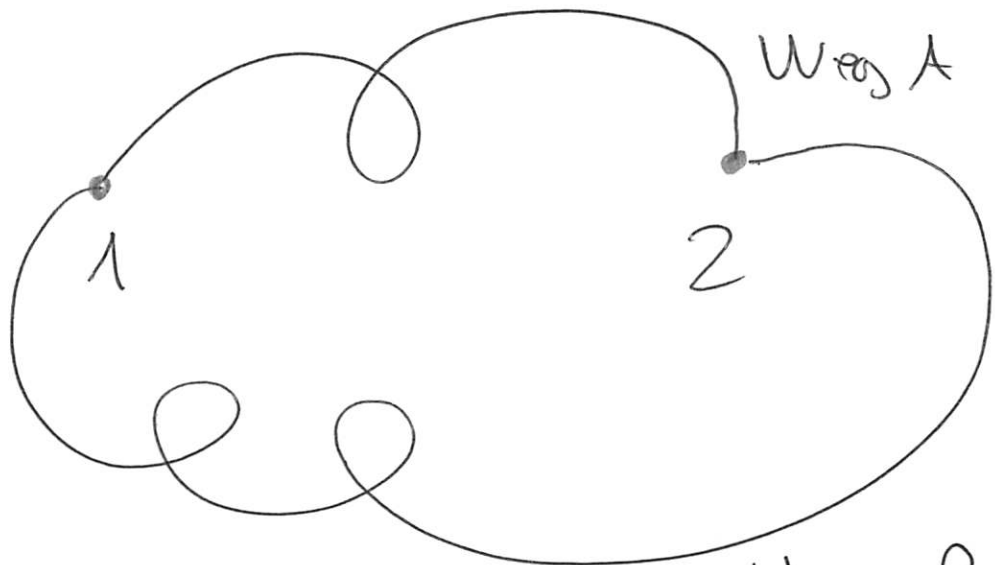
oder:

$$E_{\text{rot}}(2) - E_{\text{rot}}(1) = - \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W_{12}$$

eindeutig!

Wenn dies gilt:

$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$ hat einen eindeutigen,
vom Weg unabhängigen Wert:



$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$ gleich für
alle Wege

dann gilt insbesondere:

$$\underbrace{\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}}_{\text{Weg A}} - \underbrace{\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}}_{\text{Weg B}} = 0$$

oder

$$\underbrace{\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}}_{\text{Weg A}} + \underbrace{\int_{2 \leftarrow 1} \vec{F} \cdot d\vec{r}}_{\text{Weg B}} = 0 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

geschlossener Weg

allgemein:

Das Arbeitsintegral über einen geschlossenen Weg verschwindet bei konservativen Kräften.
Also: Wenn es einen eindeutigen Zusammenhang zwischen pot. Energie und Kraft gibt.

DEMO: Gewicht tragen $\leftarrow$ konservativ

DEMO: Gewicht ziehen $\leftarrow$ dissipativ

Im eindimensionalen Fall hatten wir gesehen, daß die Kraft im konservativen Fall aus der pot. Energie bestimmbar ist.

$$F = - \frac{dE_{\text{pot}}}{dx} \left\{ \begin{array}{l} \text{räumliche} \\ \text{Ableitung} \end{array} \right.$$

← eindeutig

Im 3D-Fall muß die Ableitung als "Gradient" durchgeführt werden:

$$\vec{F} = - \left(\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x}, \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial y}, \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial z} \right)$$

wobei $E_{\text{pot}} = E_{\text{pot}}(x, y, z)$

Schreibweise

$$\vec{F} = - \text{grad } E_{\text{pot}}$$

$$F = - \vec{\nabla} E_{\text{pot}} \text{ (Nabla-Operator)}$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Fürs Leben: Der Gradient eines Skalars ist ein Vektor, der in die Richtung des stärksten Anstiegs der skalaren Größe zeigt

Fürs Leben:

Warum das Minuszeichen in

$$\vec{F} = - \text{grad } E_{\text{pot}} \quad ?$$

→ Weil Fahrräder am Berg nach unten rollen und nicht bergauf!

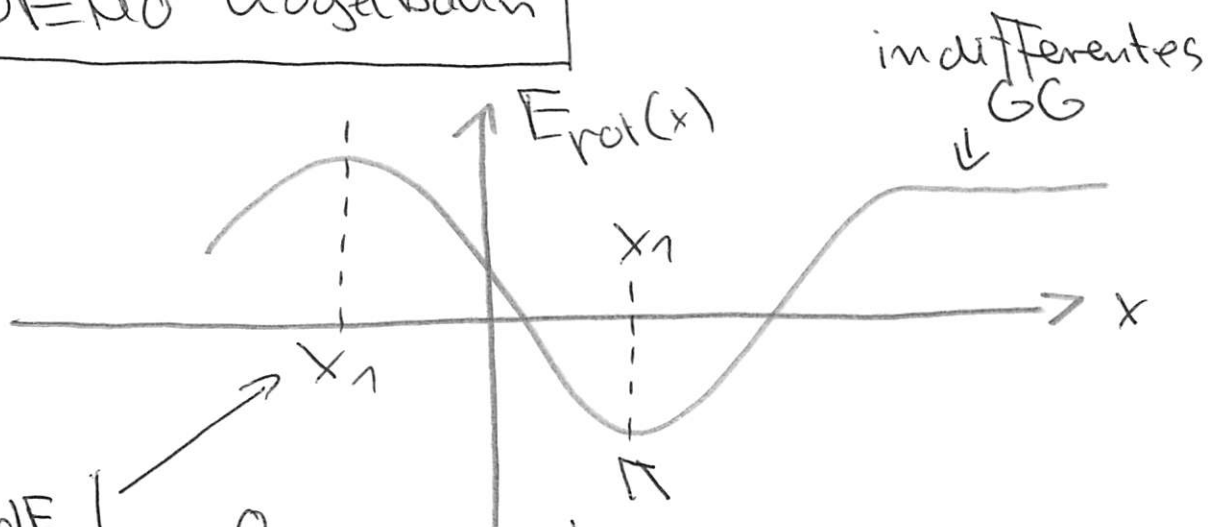
Interessanter Spezialfall:

$$- \text{grad } E_{\text{pot}} = 0$$

"Kräftefrei"

"Gleichgewichtslage"

DEMO Kugelbahn



$$- \frac{dE_{\text{pot}}}{dx} \Big|_{x_1} = 0$$

bei $x_1 - \Delta x$

$$- \frac{dE_{\text{pot}}}{dx} < 0$$

Kraft nach links

bei $x_1 + \Delta x$

$$- \frac{dE_{\text{pot}}}{dx} > 0$$

Kraft nach rechts
instabiles GG

bei $x_2 - \Delta x$

Kraft nach rechts

bei $x_2 + \Delta x$

Kraft nach links

stabiles GG

2.1.6. Kräfte und Wechselwirkungen

moderne Physik kennt 4 physikalische Wechselwirkungen, die zu Kräften führen.

- Gravitation
- Elektromagnetismus } PEP 2
- starke Kraft } PEP 5
- schwache Kraft }

Wir betrachten schon einmal alle 4 Wechselwirkungen:

(A) Gravitation

wir kennen bereits:

$$\vec{F} = -\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

γ : Stärke $\rightarrow$ muß man messen,
ergibt sich nicht aus
den Kepler-Gesetzen!

Historisch bedeutender Experiment:

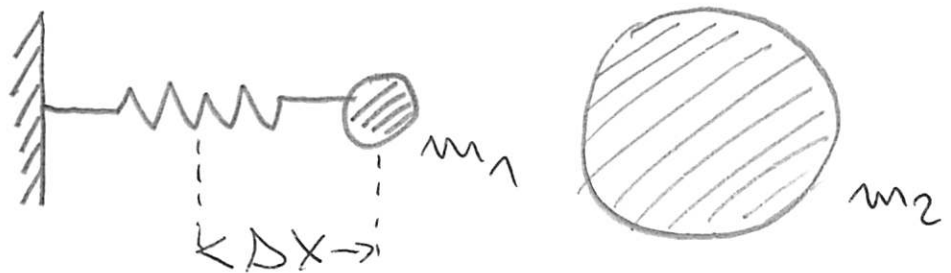
"Cavendish-Waage"

(H. Cavendish, 1731-1810)

Grundidee:

Messung der absoluten Stärke der Gravitation durch Kalibration über eine elastische Verformung:

$$F = -k \cdot x$$



Bestimmung von k aus der Eigenfrequenz ω der Feder + Masse m_1
→ Nutze die Trägheit!

Praktisch: Torsionsfaden

↳ kleines k

↳ kleine Kräfte

↳ großer Δx

DEMO: G-Waage

Film: Gravitation

Einige Eigenschaften der Gravitation

$$F(r) = -\gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$



nur eine (radiale)
Raumkoordinate !

- nur "radiale" Abhängigkeit
- "Zentralkraft"

Am einfachsten in sphärischen Koordinaten zu behandeln (r, θ, φ) .

Wie sieht es mit E_{pot} aus?

$$W = \int_{r_1}^{r_2} F(r) \cdot dr = -(E_{\text{pot}}(r_2) - E_{\text{pot}}(r_1))$$

$$-\gamma \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} \cdot dr = \dots$$

$$\gamma \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \dots$$

Wo ist $E_{\text{pot}} = 0$? → Freier wählbar!

häufige und sinnvolle Wahl:

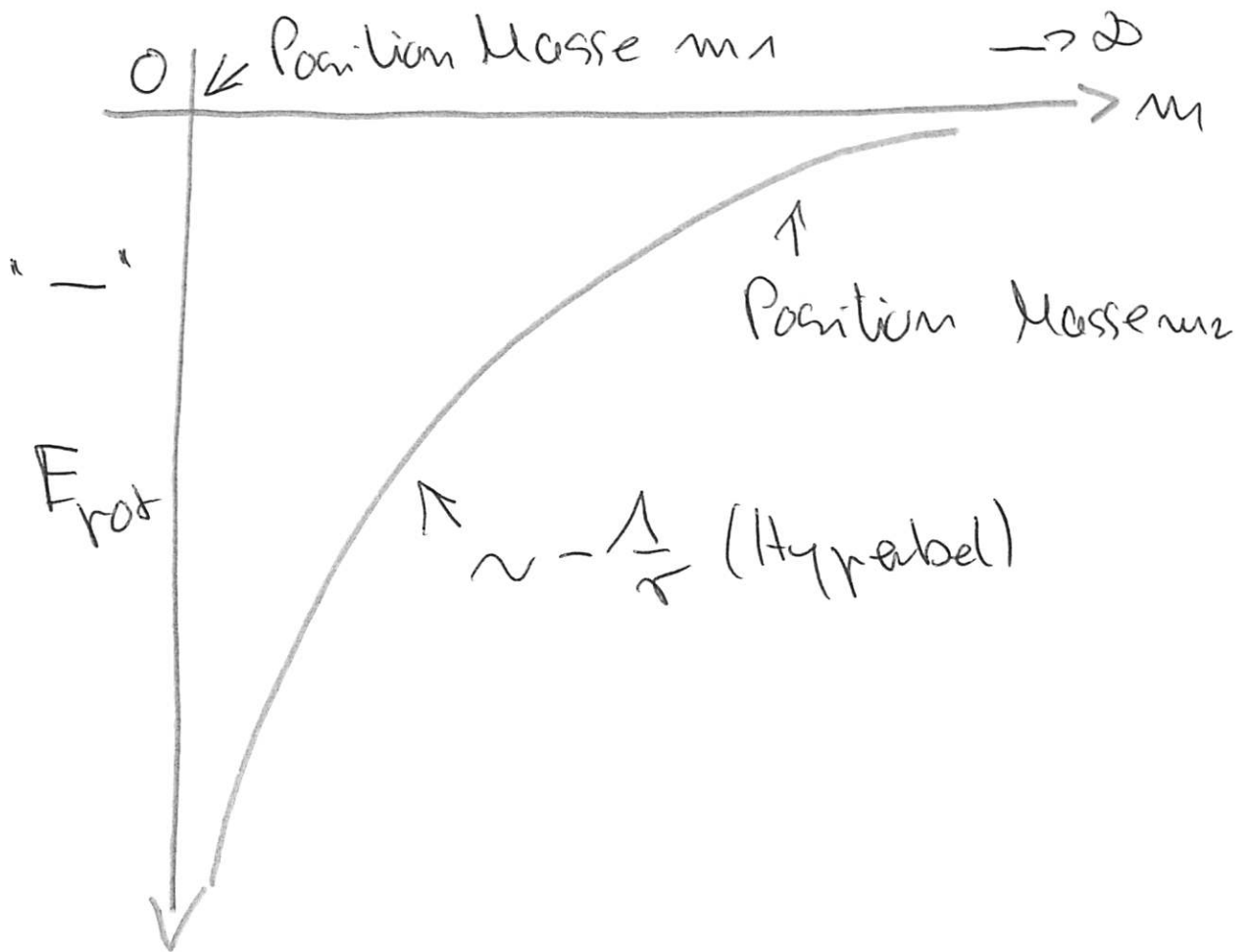
$$E_{\text{pot}}(r) = 0 \text{ für } r \rightarrow \infty$$

"Arbeit für den Weg ins Unendliche"

dann

$$E_{\text{pot, grav}}(r) = -\gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r}$$

graphisch:



Jetzt eine ganz wichtige neue Größe

Gravitationspotential

$$\phi_G = \frac{E_{\text{pot}}}{m_2}$$

$$= -\gamma \cdot \frac{m_1}{r}$$

Eigenschaft einer Masse (hier m_1)

Die andere Masse (hier m_2) tastet das Potential ab. $\rightarrow$ "Probekörper"

m_2 hat die pot. Energie E_{pot} im Potential von m_1

Klar: Bei der Feder ($E_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$)
macht der Begriff des Potentials
keinen Sinn!

Eine Feder hat kein "Potential"

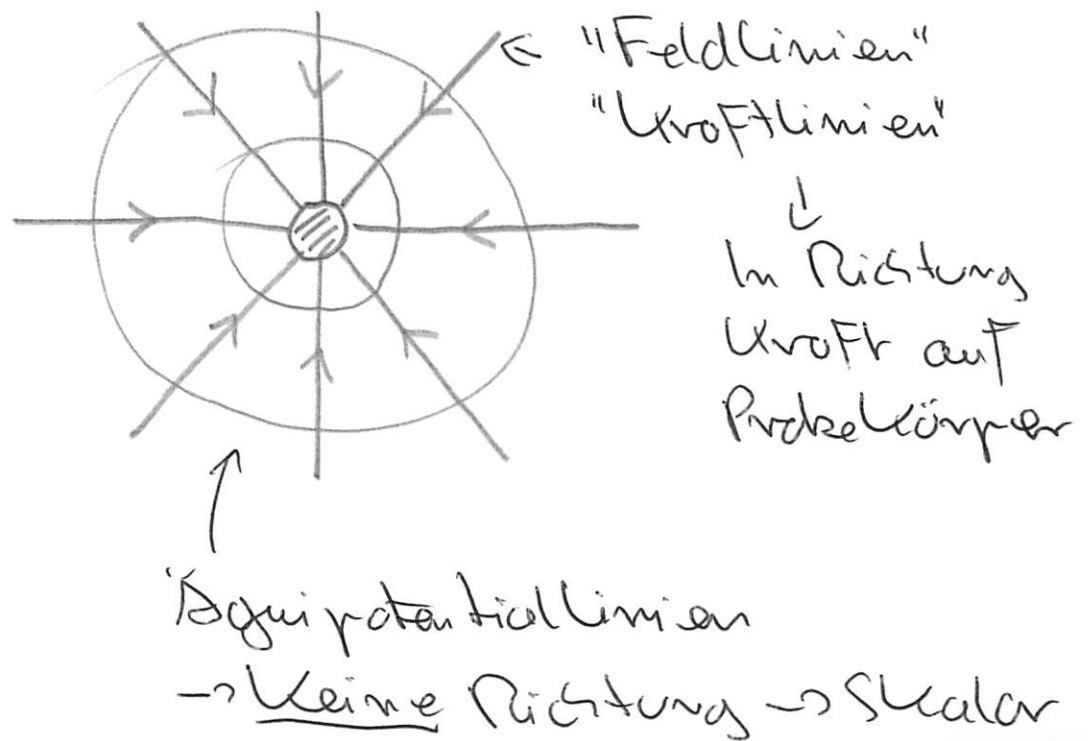
Ein weiterer sehr wichtiger Begriff

$$\vec{F} = m_2 \cdot \vec{G}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 "Probekörper" "Feldstärke"

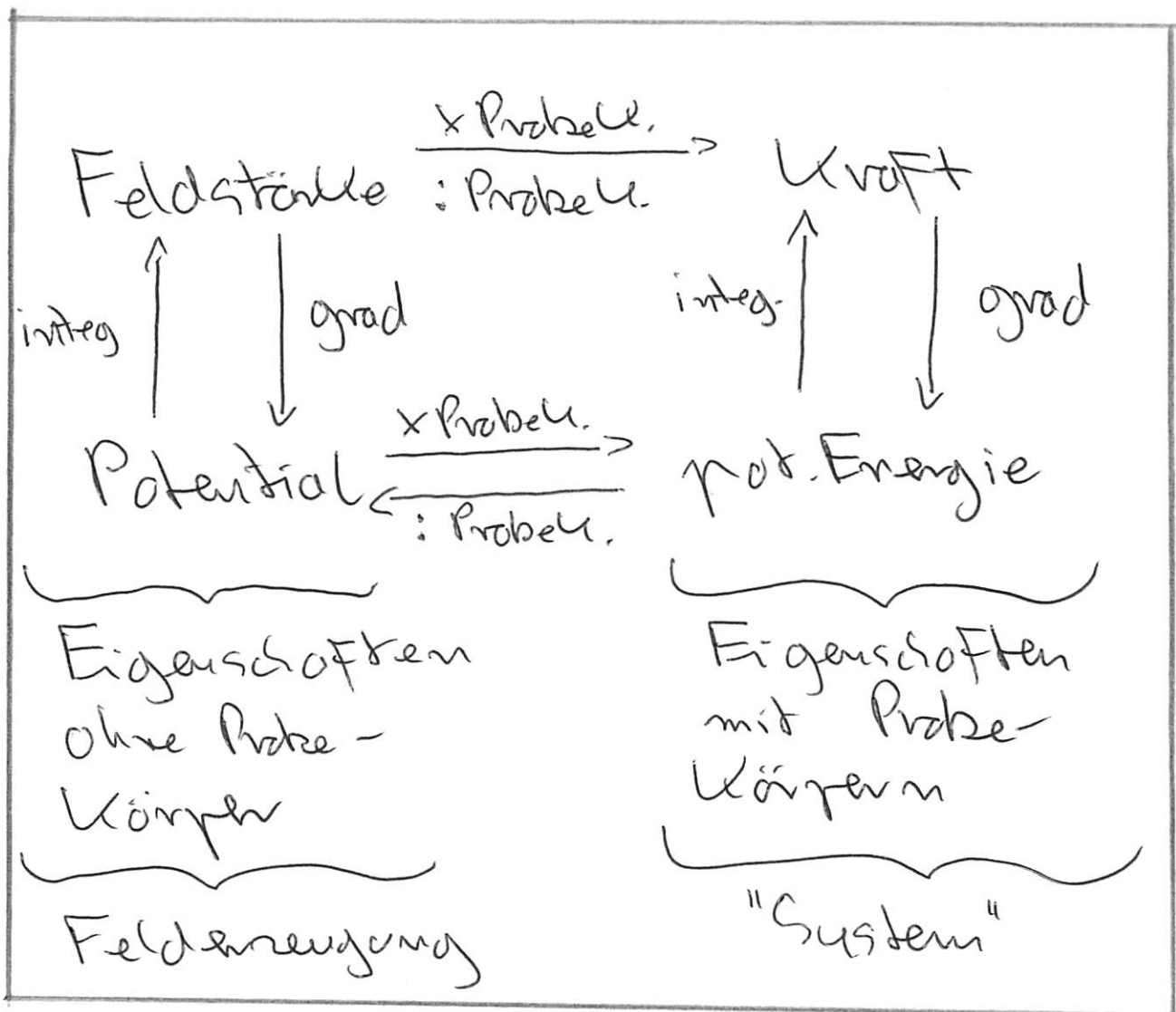
Speziell: $\vec{G}_{\text{grav}} = -\gamma \cdot \frac{m_1}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$

graphische Darstellung:



n.b. In 3D geht die "Dichte" der
Feldlinien auf einer Kugeloberfläche
mit $1/r^2$

Das sind sehr viele Begriffe ...
Hier eine Übersicht:



(B) Elektromagnetische Kraft

Elektrische Kräfte und magnetische Kräfte haben eine einzige Ursache:

"elektrische Ladung"

$$F_{\text{Coulomb}} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}^2}{|\vec{r}|}$$

"Coulombkraft"

q_1, q_2 : Ladungen mit Vorzeichen !

Anziehend oder abstoßend

↳ bestimmt durch Ladungsvorzeichen

↳ kein "-" Zeichen wie bei Gravitation

Extrem wichtig:

→ Die Coulombkraft ist viel
stärker als die Gravitationskraft!

Beispiel:

Elektron



Proton



$$q_e = -q_p = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C (Coulomb)}$$

"Elementarladung"

$$\frac{F_c}{F_G} = \frac{\frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}}{\gamma \cdot \frac{m_e \cdot m_p}{r^2}} \approx 10^{40} !$$

Warum spüren wir dann nur die
schwache Gravitation?!

→ Weil Materie normalerweise
neutral ist!

$$\frac{|q_p| - |q_e|}{|e|} < 10^{-21} !$$

Wie bei der Gravitation gibt es auch hier:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

↑
Probeladung

↖ el. Feld

$$\vec{E} = - \text{grad } \phi \quad \nwarrow \text{el. Potential}$$

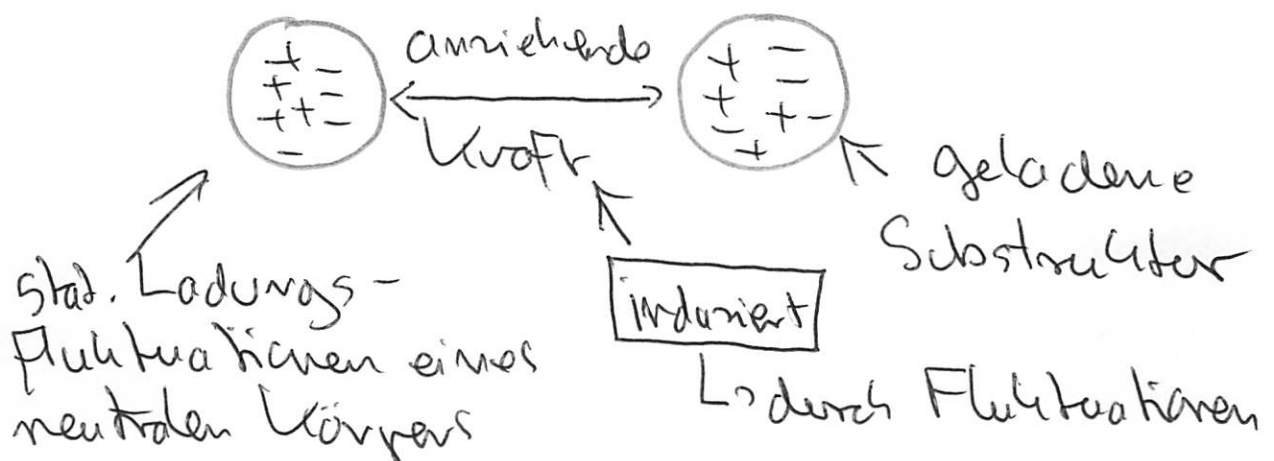
DEMO: Supermagnete

Magnetismus: Zwingende Konsequenz aus: Coulombgesetz + spez.

Relativitätstheorie (mehr in PEP2)

Jetzt: Es gibt auch el. Kräfte zwischen neutralen Körpern, wenn diese aus geladenen Teilchen zusammengesetzt sind → gilt für jede Art von Materie!

J.D. van der Waals (1837-1923)



"induzierte Dipol-Dipol WW"
 "2 Pole"

typisches Verhalten:

$$F_{\text{vdw}} = \frac{a}{r^7}$$

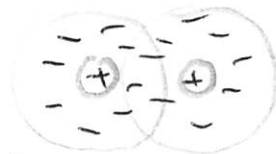
↑
anziehend

$$E_{\text{rot, vdw}} = -\frac{b}{r^6}$$

$$-\frac{dE_{\text{rot, vdw}}}{dr} = -(-b \cdot -6 \cdot r^{-7})$$

extrem schneller Abfall da Kraft mit dem Abstand

aber: Warum kollabieren wir dann nicht



$r \rightarrow 0$!?

→ starke Abstoßung der Elektronenwolken

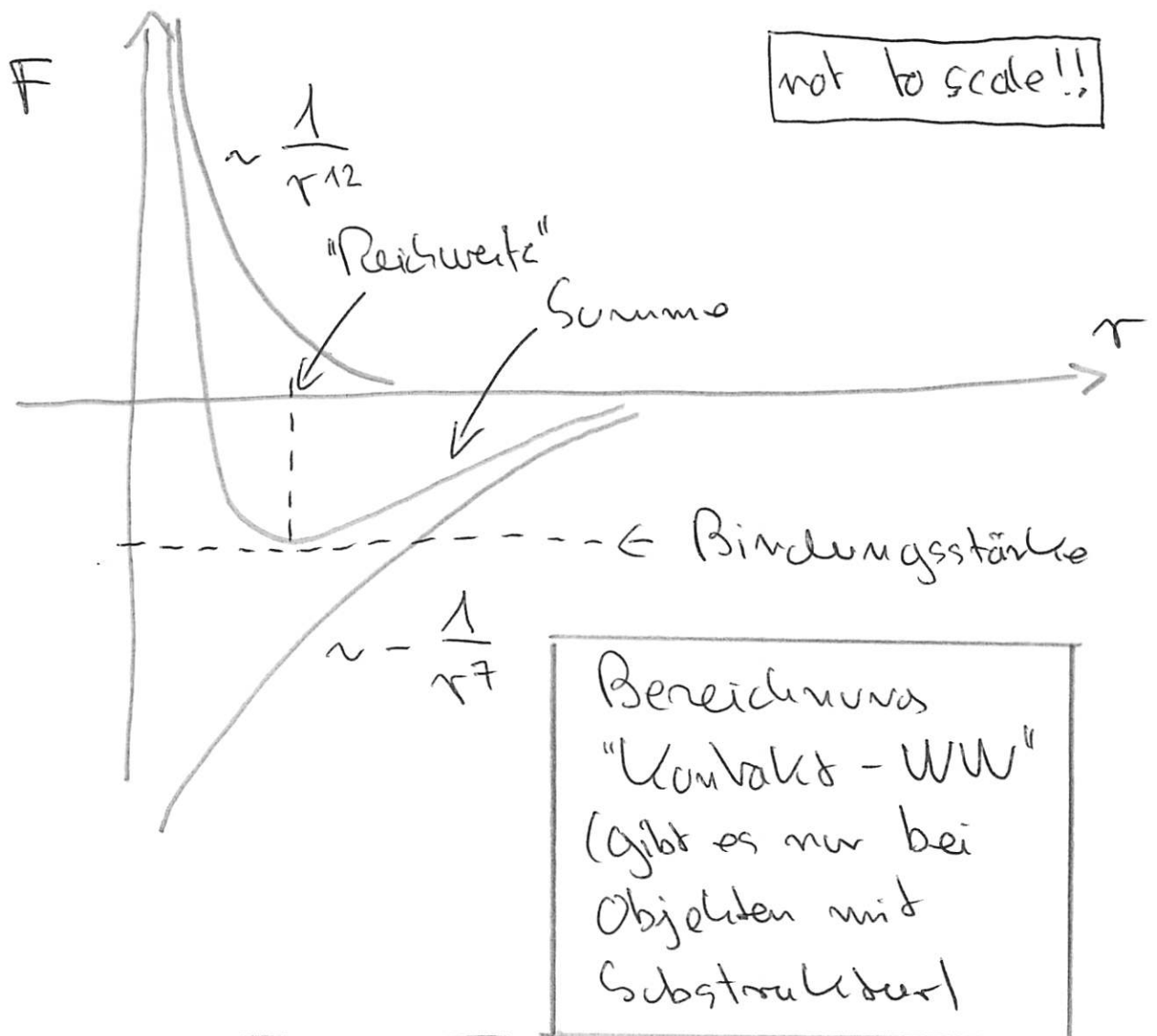
"Pauli-Prinzip" (PEP 3)

insgesamt:

$$F = +\frac{c}{r^{12}} - \frac{a}{r^7}$$

↑ "harter Kern"
 "hard core"

→ Man kann nicht durch die Wand laufen



DENO Klebeband

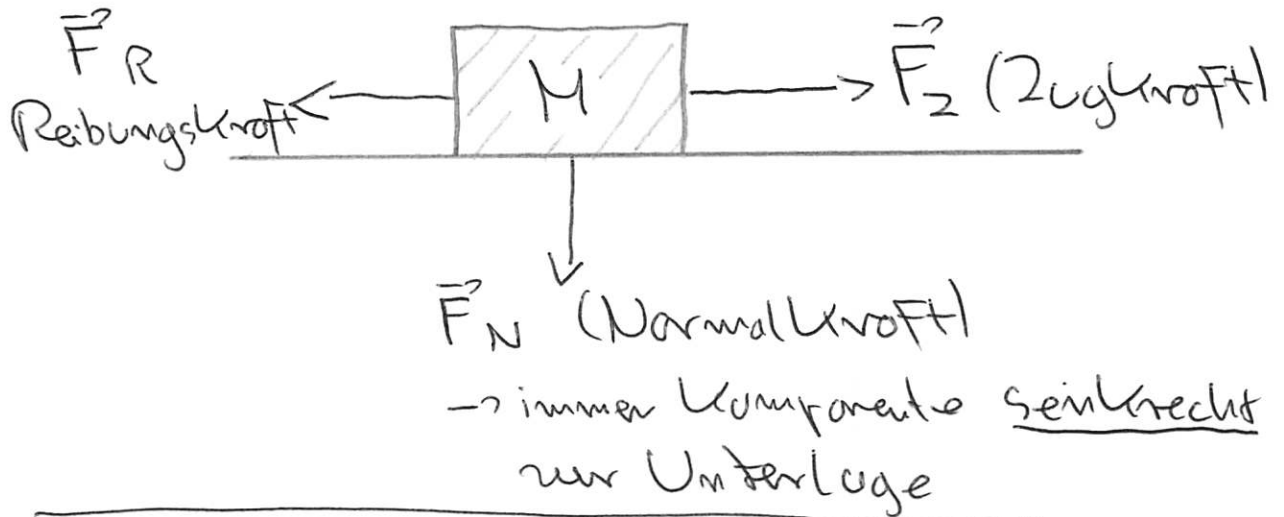
Folie: Quarz-Substruktur

DENO Endmaße

DENO Glasplatten

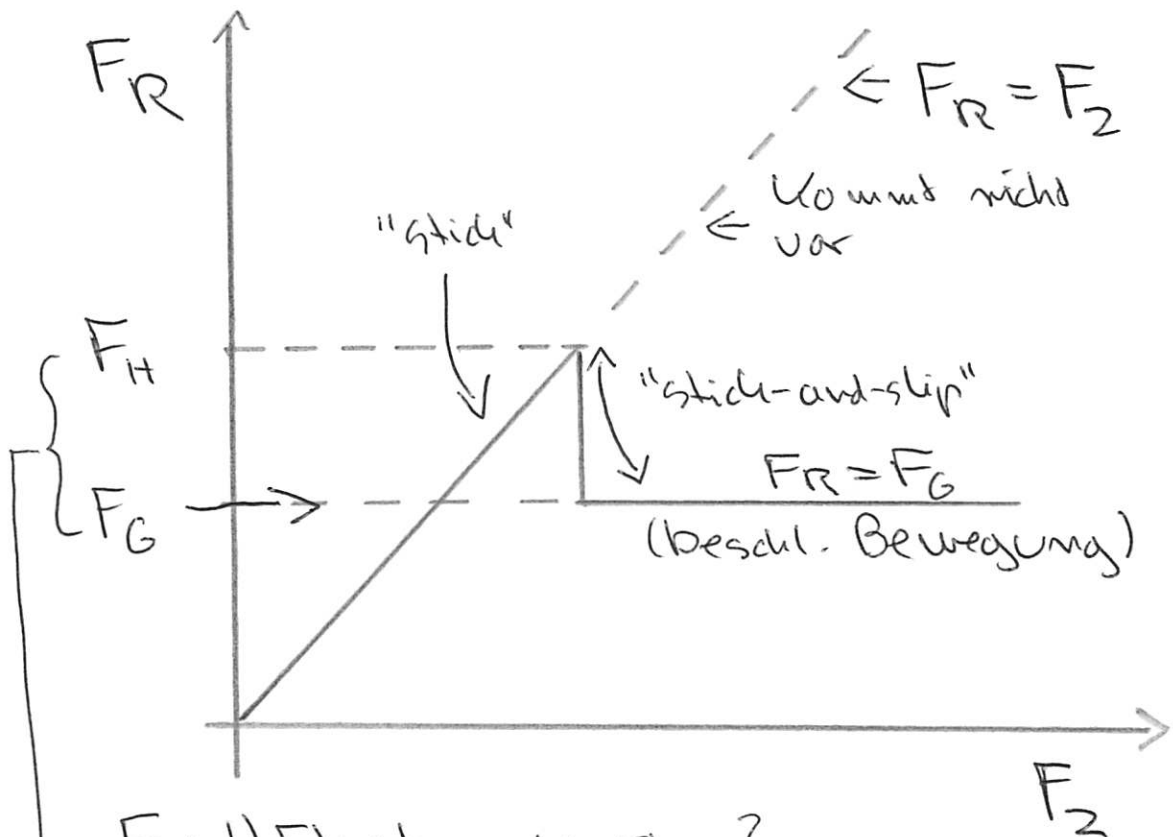
Eine weitere "phänomenologische"
Konsequenz der elektrischen Kraft
ist die Reibung

Begriffe



DEMO: Masse on Fedewaage

graphische Darstellung der Beobachtung:



F_H : Haftreibungskraft
 F_G : Gleitreibungskraft } $F_H > F_G$

→ 2 "Lösungen" → "Selbsthemmung"

Folien: AFM, Phononen

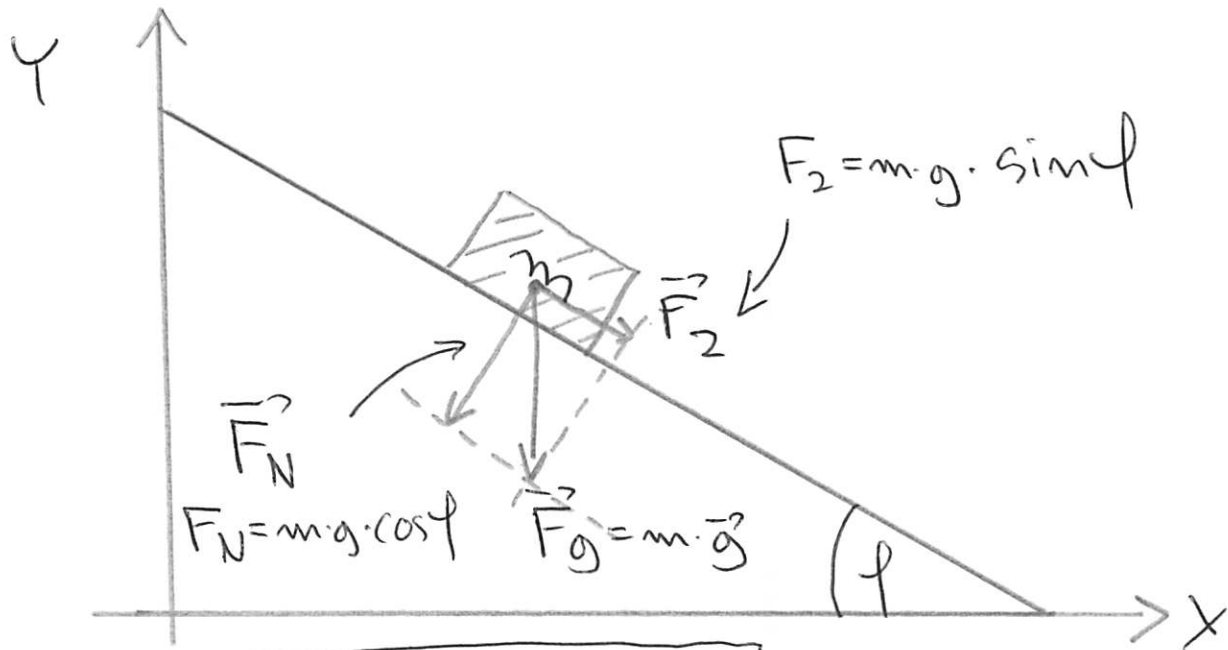
Java: Stick-and-Slip

DEMO: Kreide an der Tafel

Hinweis: ABS

Ideales Experiment zum Einstellen
der "Zugkraft"

Schiefe Ebene (Kirchhoff Original)



DEMO: Verschiedene Klötze

Experimentell (im Grenzen ----)

$$F_R \sim F_N$$

$$F_R \neq F_R(A)$$

} Winkel-
variation (φ)

$\hat{L}$ Auflagefläche

Speziell für die Haftreibung definieren wir:

$$F_H = \mu \cdot F_N$$

μ : Haftreibungskoeffizient

Dimension: $\frac{1}{2}$

Auf der schiefer Ebene gilt beim Übergang vomhaften zum Gleiten:

$$F_2 = F_H$$

$$m \cdot g \cdot \sin \varphi_H = m \cdot g \cdot \mu \cdot \cos \varphi_H$$

Grenzwinkel

also:

$\mu = \tan \varphi_H$
 ↗ Material-
 Kombination
 ↗ Grenz-
 winkel
 ↳ Messung Δ
 6

DENSO Schrauben

Eine Schraube ist eine sehr
flache aufgewickelte Ebene

→ Nutzung der Selbsthemmung

DEMO Schraubzwinde

Ein Beispiel, bei dem die Selbsthemmung
vermieden werden soll:

DEMO Drillbohrer $\leftarrow$ steile Ebene

Interessanter Spezialfall:

$$\mu \geq 1 \quad (F_H \geq F_N)$$

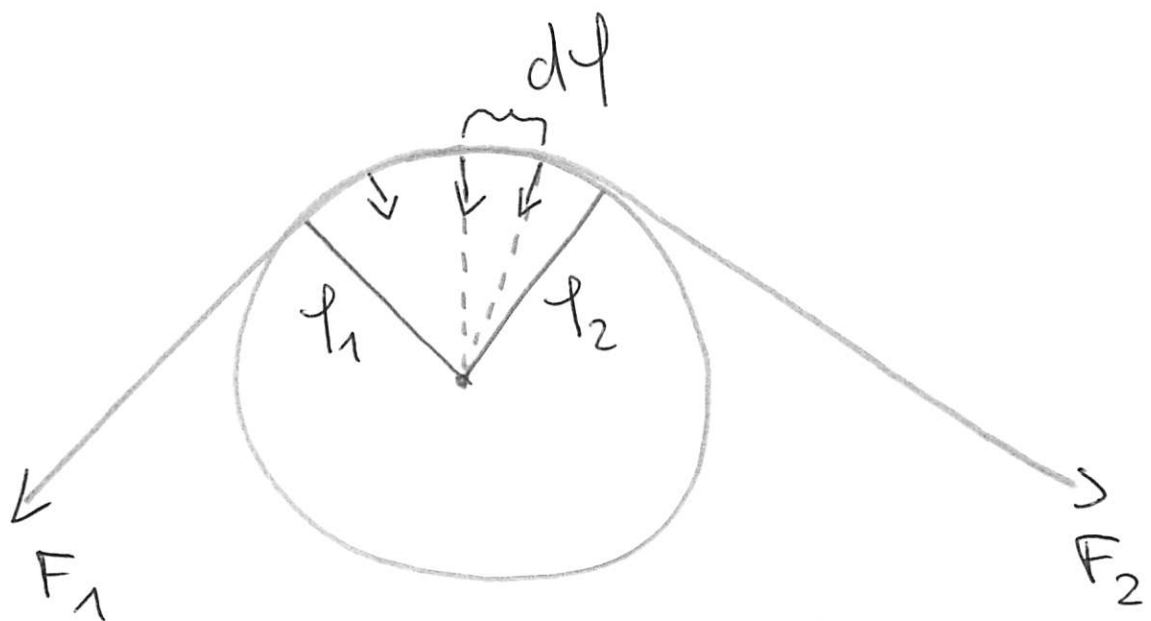
$$\varphi_H \geq 45^\circ$$

DEMO Sandkeile

DEMO Klebestreifen

$$\left. \begin{array}{l} \mu \rightarrow \infty \\ \varphi_H \rightarrow 90^\circ \end{array} \right\}$$

Anwendung Seilwinde



$F_1 \neq F_2$ für Ruhe!

$\hookrightarrow F_H$ hilft beim Halten!

$$F_H = \mu \cdot F_N$$

↳ tangential

Differenzielle Bilanz:

$$dF_H = \underbrace{dF(\varphi)}_{\text{Winkel-
element } d\varphi} = \mu \cdot dF_N$$

$$dF_N = F(\varphi) \cdot d\varphi$$

↳ Bogenmaß

↑
tangential

↑
normal

also: $\frac{dF(\varphi)}{F(\varphi)} = \mu \cdot d\varphi$

Integration:

$$\int_{F_1}^{F_2} \frac{1}{F(\varphi)} \cdot d\varphi = \mu \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi$$

$$\ln\left(\frac{F_2}{F_1}\right) = \mu \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) = \mu \cdot \Delta\varphi$$

oder ..

$$F_2 = F_1 \cdot e^{\mu \cdot \Delta\varphi}$$

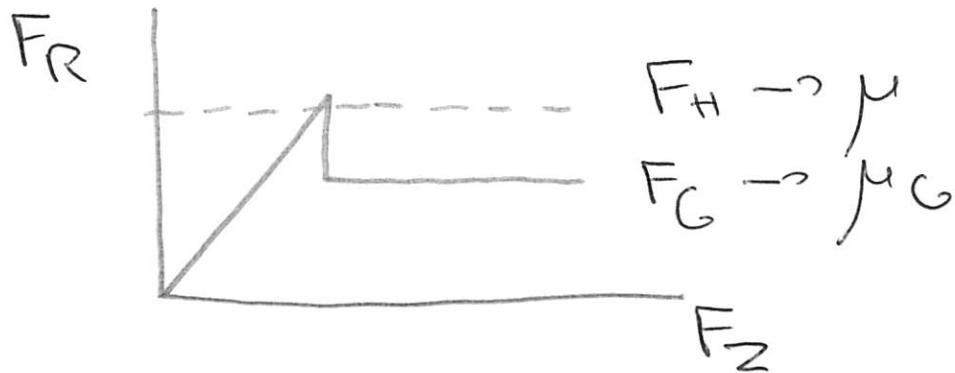
↗ starke
Abhängigkeit!

→ Schiffsanleger

Folie

DEMO Seilwinde

nach einer Bemerkung zur Gleitreibung



$$F_G = \mu_G \cdot F_N$$

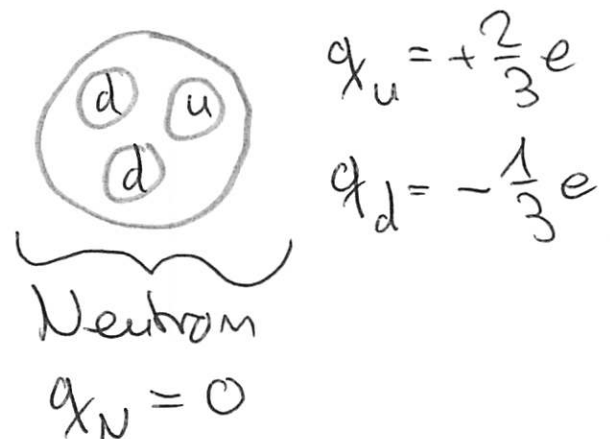
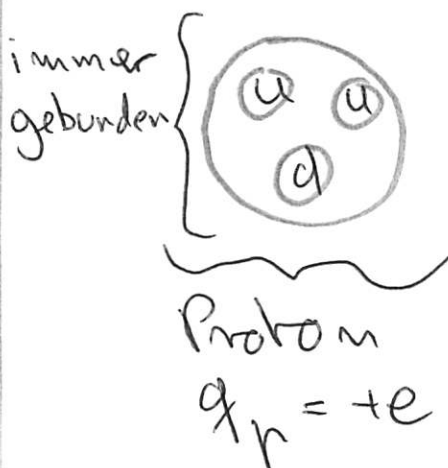
$$\mu_G < \mu$$

"Gleitreibungskoeffizient"

DEMO: Gewicht auf Rollen

© Starke Kraft

Äquivalent zur Coulombkraft



Quarks tragen neuartige
Ladungstypen.

Elektromagnetismus:

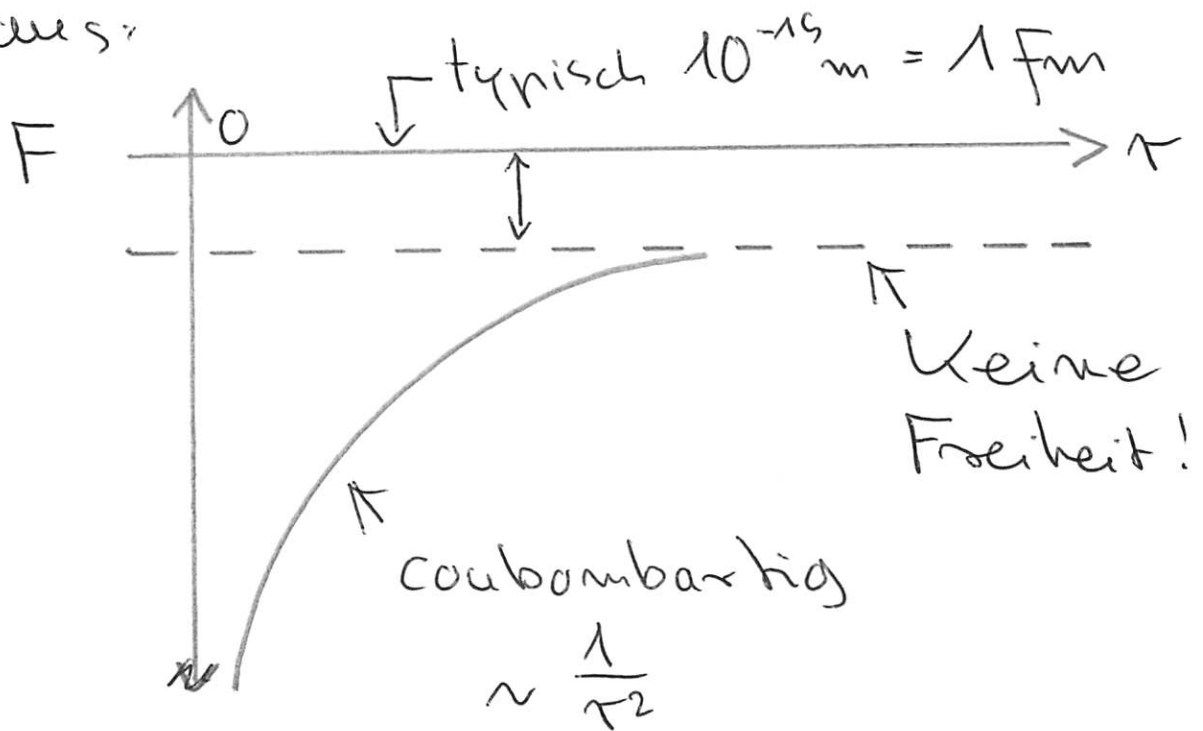
Ladung $(-e)$, Antiladung $(+e)$

Starke Kraft:

3 Farbladungen (r, g, b)

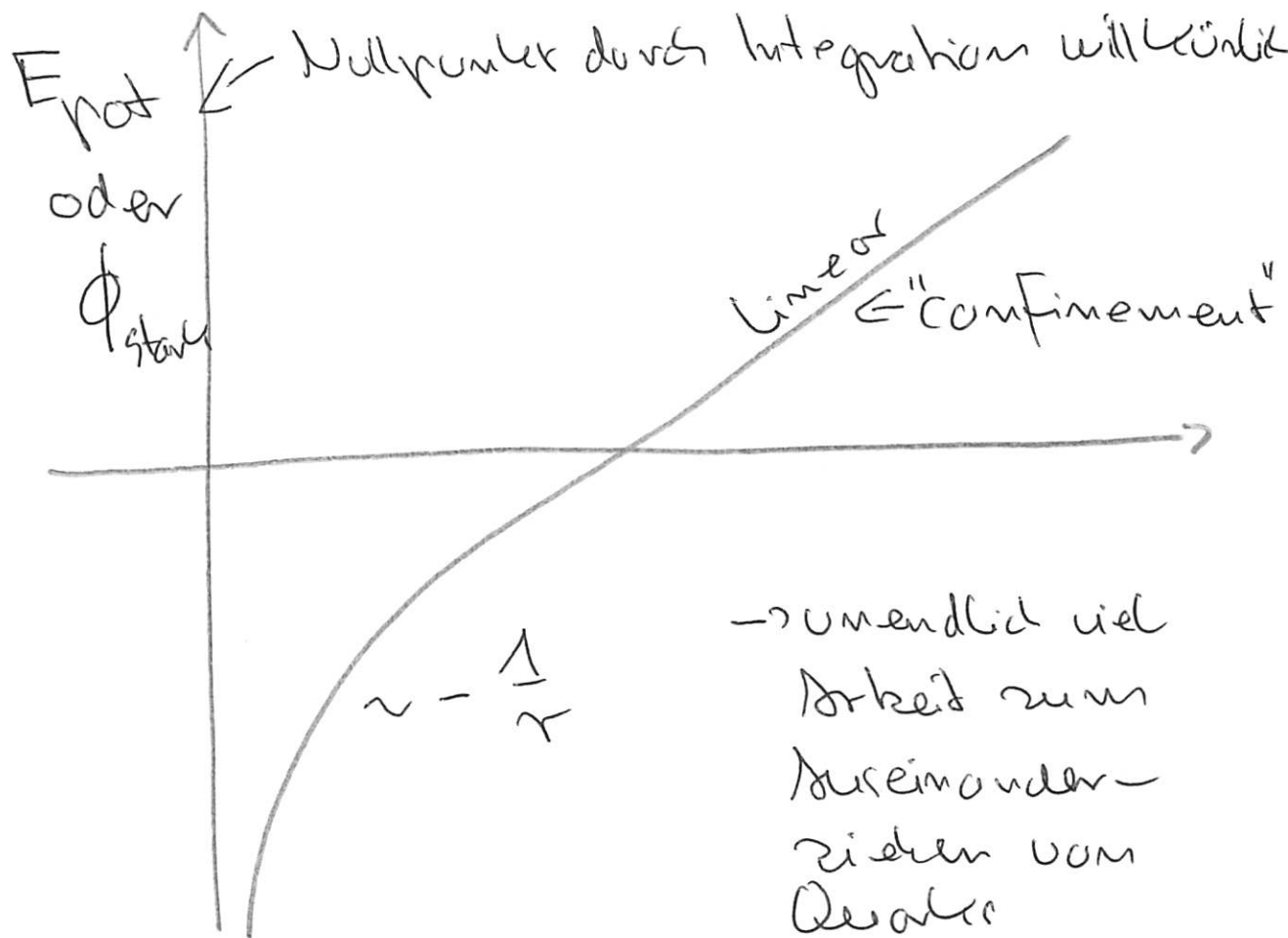
3 Anti-Farbladungen $(\bar{r}, \bar{g}, \bar{b})$

Das Kraftgesetz sieht etwas anders
aus:



→ Es gibt keine "freien Quarks"
bei großen Abständen
(Nobelpreis 2004)

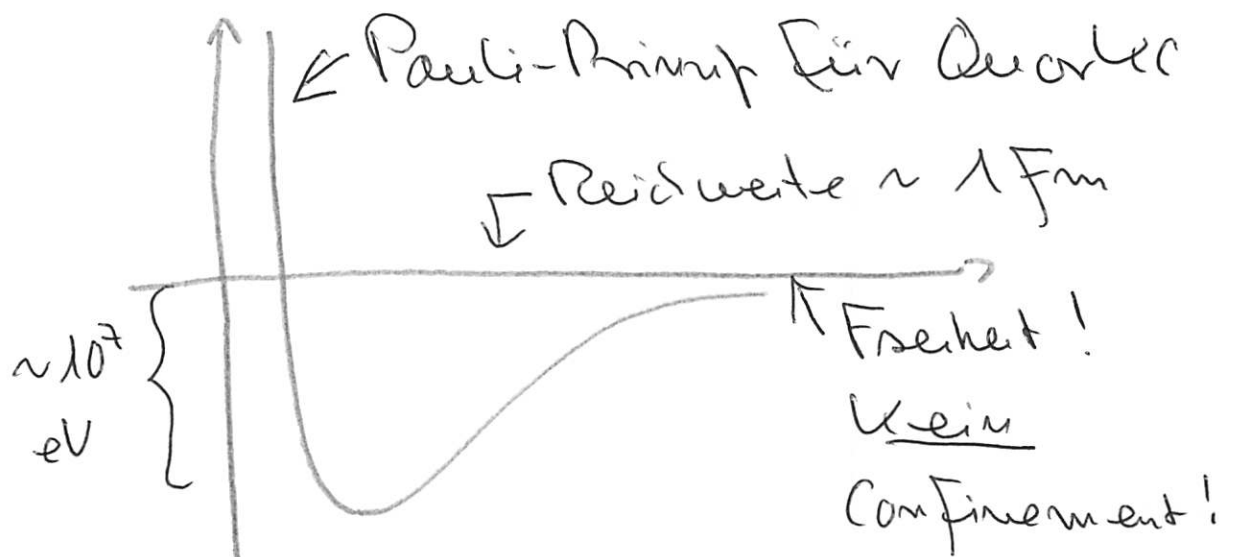
Das sieht man sehr beeindruckend
in der Integration der Kraftkurve:



→ Jetkammer im Foyer INF308

→ Joachim Heintze Hörsaal 8

Kräfte zwischen Farbneutralen Protonen + Neutronen sind wie die von der Woods Kraft Kontakt-Wechselwirkungen:



① Schwache Kraft

wichtiger Teilchen: Neutrino

- geringe Masse (träge + schwer)
- keine el. Ladung
- keine Farbladung
- aber schwache Ladung

→ kann elastische und inelastische Stöße machen!

Folie neutrale Ströme
Kannikande

Folie: Übersicht alle Kräfte

2.1.7 Beschleunigte Bezugssysteme

bisher: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

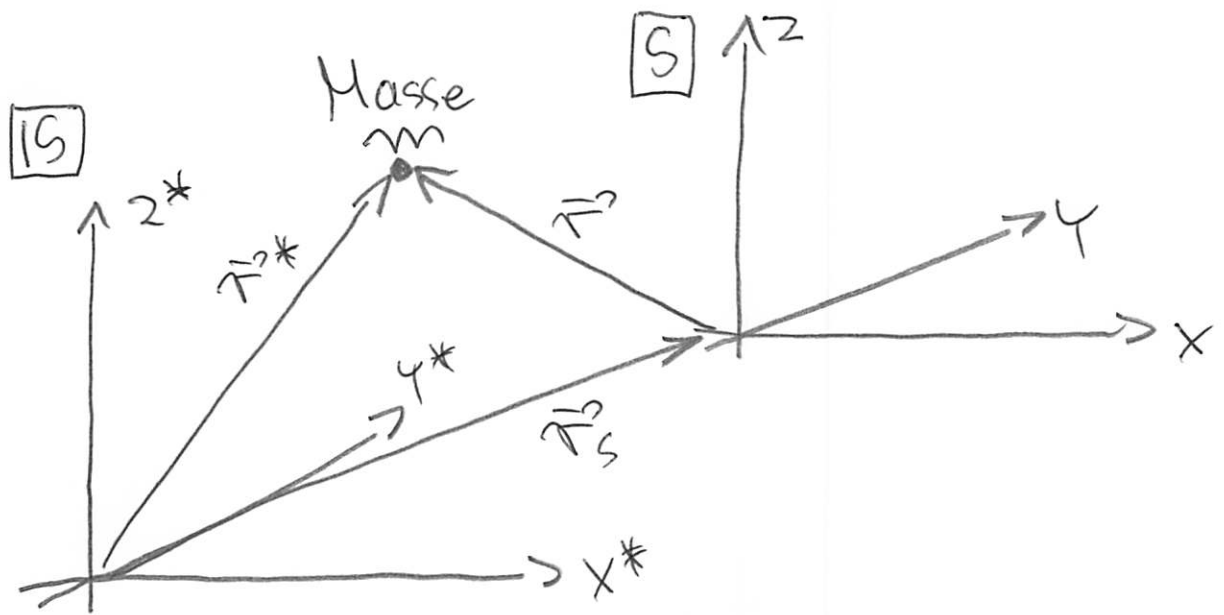
bekannte 4 WW ↑ Trägheit ↑ Änderung B.Z.

Anwendung im Inertialsystemen

Jetzt: Betroffene beschleunigte
Bezugssysteme

↳ keine Inertialsysteme

Betrachten wir nun 2 Systeme



Wenn in [1S] (=Inertialsystem) ein $\vec{a}^*$ festgestellt wird, muß dies auf eine der 4 bekannten phys. WW zurückzuführen sein.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}^*$$

[5] sein nun gegenüber [1S] beschleunigt!

$$\vec{a}_s, \vec{v}_s, \vec{r}_s$$

↑ nicht Null!

Wie ist dann die Beziehung zwischen $\vec{a}$ und $\vec{a}^*$?

Galilei:

$$\left. \begin{aligned} x &= x^* - x_s \\ y &= y^* - y_s \\ z &= z^* - z_s \end{aligned} \right\} \text{Orte}$$

2 x differenzieren:

$$\vec{a} = \vec{a}^* - \vec{a}_S$$

oder (weil in Galilei-invariant):

$$m \cdot \vec{a} = \underbrace{m \cdot \vec{a}^*}_{4 \text{ WW}} - \underbrace{m \cdot \vec{a}_S}_{\text{Besch. System } S}$$

was insgesamt
im S passiert

↑
neuer Beitrag
durch $\vec{a}_S$, nicht
auf 4 WW
verrückzuführen

DEMO: Wagen mit Klotz

- "Trägheitskraft" (guter Name!)
 - "Scheinkraft" (schlechter Name...)
- d'Alembert (1717-1783)

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{TR}$$

"enthält" "—" "!"
0

Ursache für $\vec{F}_{TR}$: Trägheit

einfachster Beispiel:

lineare Beschleunigung

z.B. Fahrstuhl

ruhend: $F = \underbrace{m_s \cdot g}_{\text{Gravitation}}$

Fallend: $a_s = g$ (zusätzlich)

↑
Beschleunigung des
Bewegungssystems

also insgesamt:

$F = m_s \cdot g - m_T \cdot \underbrace{g}_{a_s}$
↑
was insgesamt
im Fahrstuhl
geschieht
 F_{TR}

$F = 0$ wenn $m_s = m_T$

Kräftefreiheit (bei Vorhandensein eines Grav. Potentials !!)

DEMO: Gewicht am Faden

FOLIE: Fallturm

Nun ein ganz besonders wichtiger
Special Fall:

Rotierende (und damit beschleunigte) Bewegungssysteme

Dann wollen wir zunächst eine aus
der Diskussion der Kreisbewegung
bekannte Größe erweitern:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{d\varphi}{dt} \\ v &= \omega \cdot r \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\omega: \text{Winkelgeschwindigkeit} \\ &(r: \text{Kreisradius} \\ &v: \text{Bahngeschwindigkeit}) \end{aligned}$$

Bisher: ω Skalar

Jetzt: Nutze die Größe ω , um die
Orientierung der Bahnkurve der
Kreisbewegung im Raum zu
beschreiben

Def.

$\vec{\omega}$ ist ein Vektor

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$\vec{v}$ Bahngeschw. $\vec{\omega}$ Winkelgeschw. $\vec{r}$ Radiusvektor



"Rechtsschraube"



"Linksschraube"

DEMO: Dreibein

DEMO: Fingeregeln

neu: Vektorprodukt, Kreuzprodukt

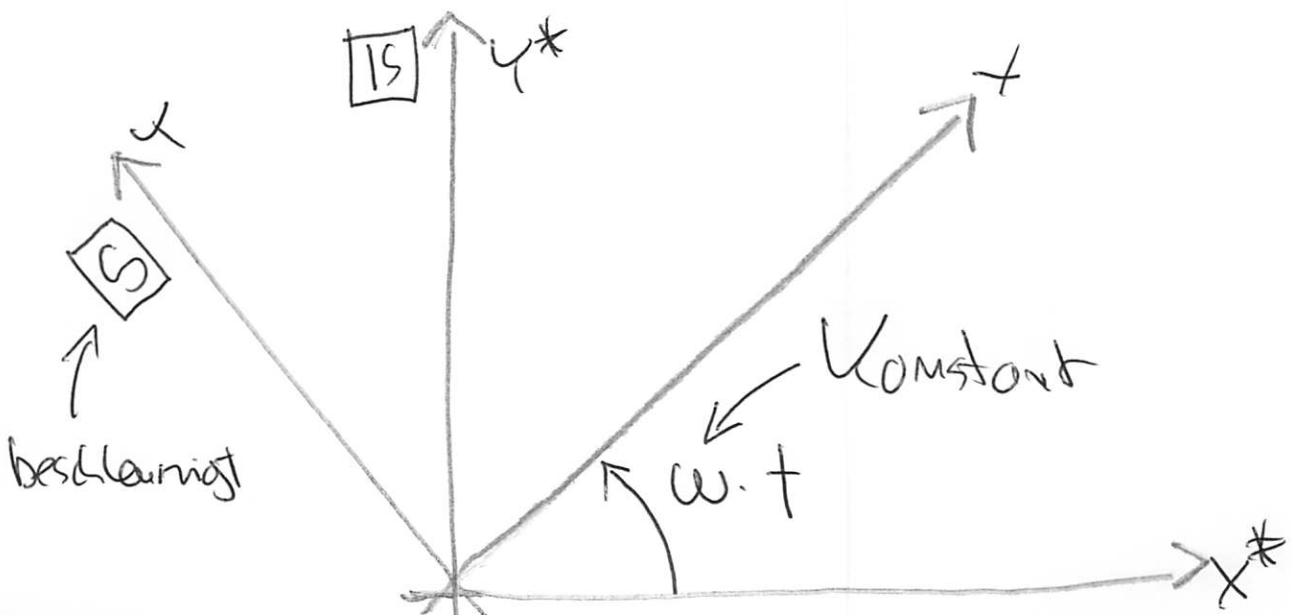
$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle \vec{a}, \vec{b}) \cdot \vec{n}$$

↳ zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ normaler Einheitsvektor

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Jetzt: Rotierende Systeme:



Speziell hier: $z = z^*$

Die Beschleunigung ist die
Zentripetalbeschleunigung:

$$\vec{a}_s = \vec{a}_{zp} = -r \cdot \omega^2 \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

nach innen (Kreis) gerichtet

also:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F} - \underbrace{m \cdot \vec{a}_{zp}}_{\substack{\text{Trägheitskraft durch} \\ \text{Rotation}}}$$

↑
was im
[S] passiert

$$= \vec{F} + m \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Def.

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \\ &= m \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\end{aligned}$$

"Zentrifugalkraft"

Der Zentripetalkraft entgegen
gerichtet, wirkt im rotierenden
System [S]

Trägheitskräfte sind real meßbar!

DEMOS

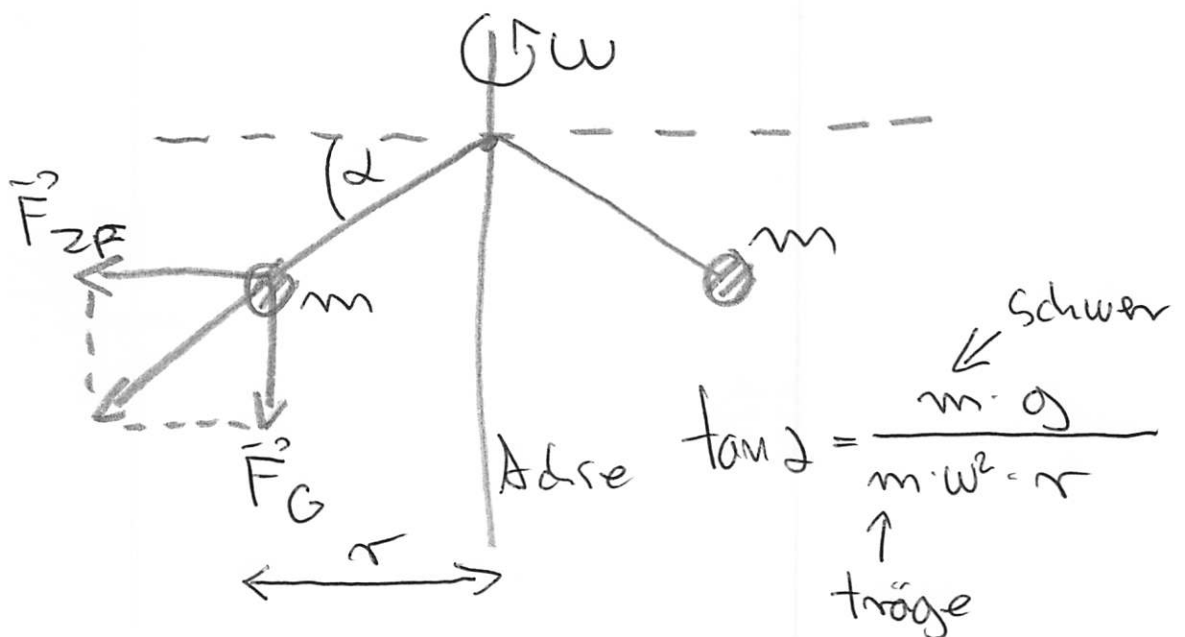
Weinglas

Fliehkraftregler

Auto auf Schiene

Film: Hund im Flugzeug

Anmerkung: Fliehkraftregler als experimenteller Nachweis der Proportionalität von träger und schwerer Masse:



Nun wollen wir die Masse im rotierenden Bezugssystem in Bewegung setzen!
 m habe im $[S]$ eine konstante Geschwindigkeit $\vec{v}$, $[S]$ ist weiterhin ein rotierendes Bezugssystem

Da $\vec{a}^* = 0$, ist die Bewegung der Masse in $[S]$ gleichförmig und gerade.

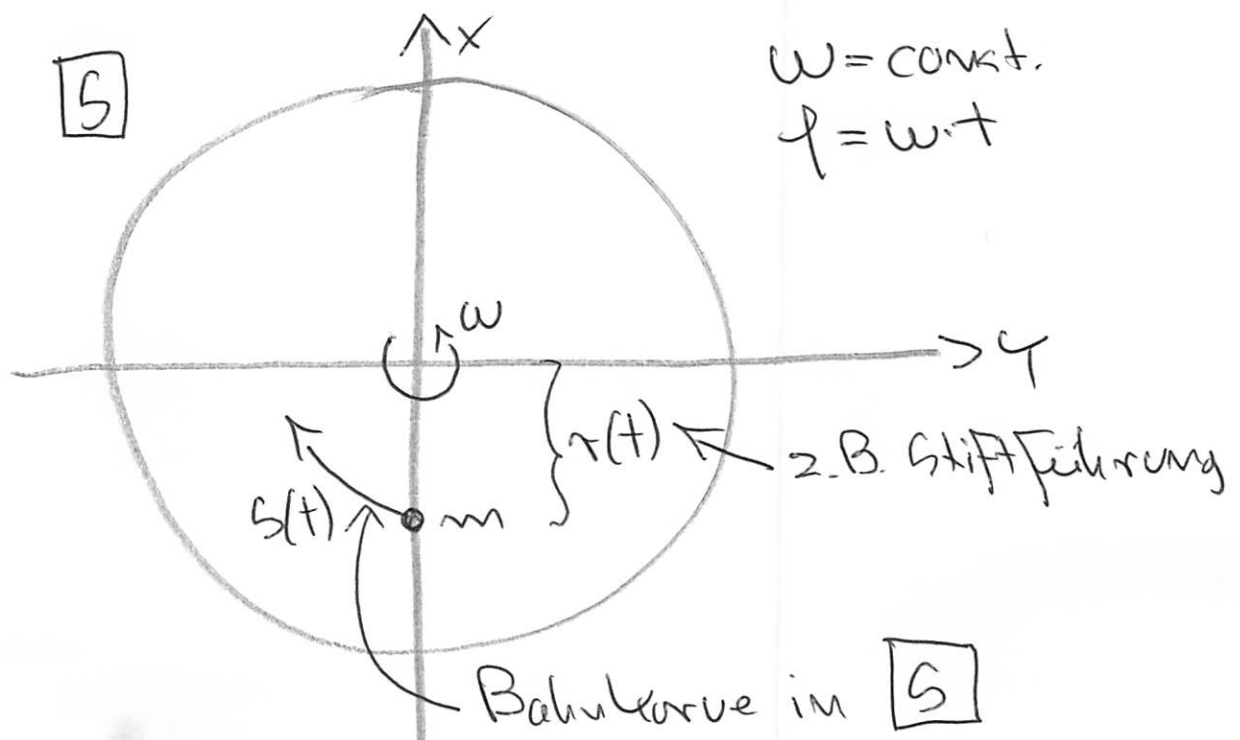
Film: Kinderkorussel

DEMO: Auto auf Drehscheibe
IS-Kamera: gerade Linie
S-Kamera: gebogene Linie
Zeichnen eines Strichs

→ Eine neue Trägheitskraft
"Corioliskraft"

(Gaspard Gustave Coriolis, 1792-1843)

Anschaulich: Korussel dreht sich
"unter dem Ball weg"



$$s(t) = -r(t) \cdot \varphi(t) \quad (\text{Bogenl})$$

↑
gegen Winkeldrehung

$$= - \underset{\substack{\nearrow \\ \text{gleichförmige} \\ \text{Radialbewegung}}}{v \cdot t} \cdot \underbrace{\omega \cdot t}_{\substack{\nearrow \\ \text{gleichf. Rotation}}}$$

$$= - v \cdot \omega \cdot \overset{\substack{\nearrow \\ \text{quadratische } t\text{-Abhäng.}}}{t^2}$$

↓
Konstante Beschleunigung!

$$a_{\text{cor}} = -2 \cdot \cancel{v} \cdot \omega$$

↑
Coriolisbeschleunigung

$$F_{\text{cor}} = -2 \cdot m \cdot v \cdot \omega$$

↑
Corioliskraft

Allgemein ohne vollständige Herleitung:

$$m \cdot \underset{\substack{\nearrow \\ \text{was im} \\ \boxed{\text{S}} \text{postiert}}}{\vec{a}} = \underbrace{\vec{F} + \vec{F}_{ZF} + F_{\text{cor}}}_{\text{Trägheitskräfte}}$$

$$= \underbrace{\vec{F} - m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{Zentrifugal}} - \underbrace{2 \cdot m \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}}_{\text{Coriolis}}$$

Bemerkung zur Zentrifugalkraft

$$-m \cdot \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{doppeltes V.P.}}$$

es gilt:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \underbrace{\vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})}_{\text{Skalarprodukte}}$$

"bac minus cab Regel"

also: Die Zentrifugalkraft liegt in der von $\vec{\omega}$ und $\vec{r}$ aufgespannten Ebene

speziell bei der Scheibe: $\vec{\omega} \perp \vec{r}$

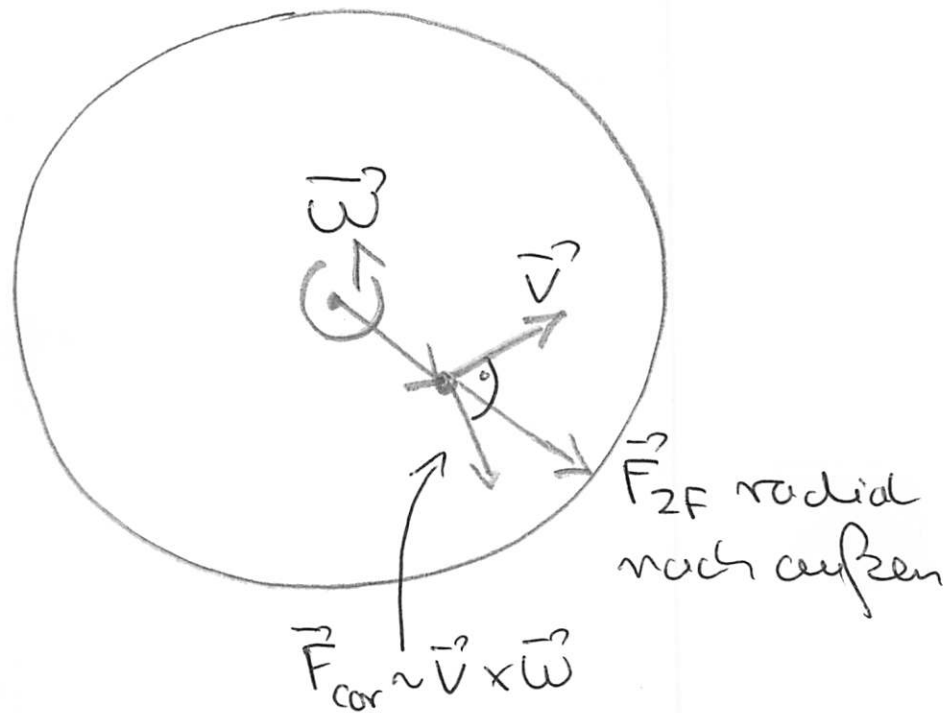
→ Richtung vom $\vec{r}$ ("c" in der Regel)

Bemerkung zur Corioliskraft

$$-2 \cdot m \cdot \vec{\omega} \times \vec{v} \quad \text{oder} \quad 2 \cdot m \cdot \vec{v} \times \vec{\omega}$$

→ senkrecht auf der von Eigengeschwindigkeit $\vec{v}$ und $\vec{\omega}$ aufgespannten Ebene

DEMO Fingerregel auf Scheibe



wichtig: $\vec{F}_{cor}$ und $\vec{F}_{ZF}$ sind unabhängig voneinander, treten aber nur auf, wenn es ein $\vec{\omega}$ gibt

DEMO: Pistolschuß auf Drehstuhl

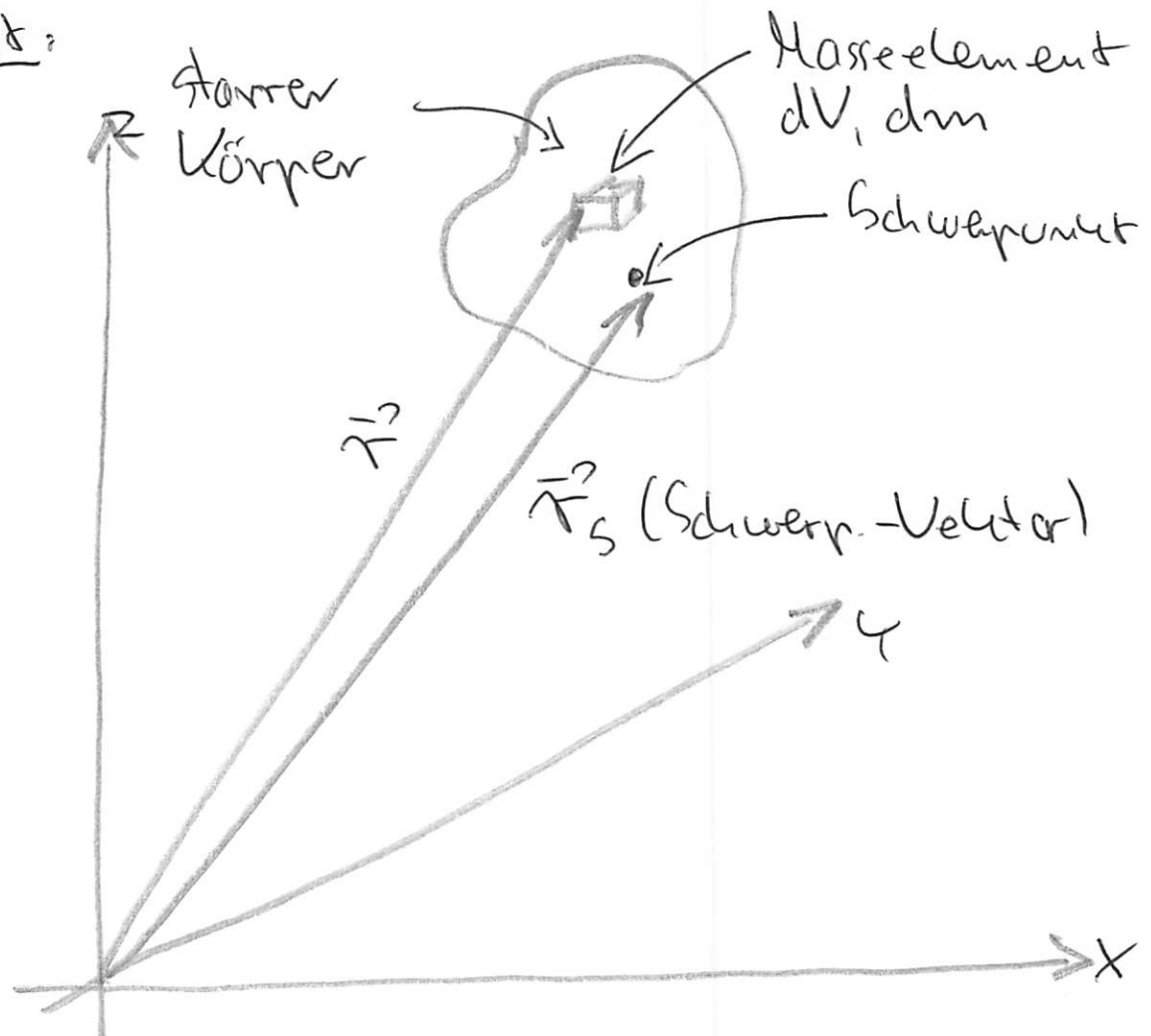
Hinweis: Foucault-Pendel
(leider keine Zeit)

2.2. Mechanik starrer Körper

2.2.1. Kinematik und Drehmoment

bisher: Massepunkte und Systeme von Massepunkten.

jetzt:



Def: Ein starrer Körper ist ein System aus Massepunkten ($\rightarrow$ Masselementen), deren Abstände durch innere Kräfte fest vorgegeben sind, und die durch äußere Kräfte nicht verändert werden.

auch hier: Idealisierung!

DEMO: Schaumstoff, Stange

$$\left. \begin{array}{l} \text{Masselement } dm \\ \text{Volumenelement } dV \end{array} \right\} \rho(\vec{r}) = \frac{dm}{dV}(\vec{r})$$

Dichte

Speziell gilt:

homogener Körper:

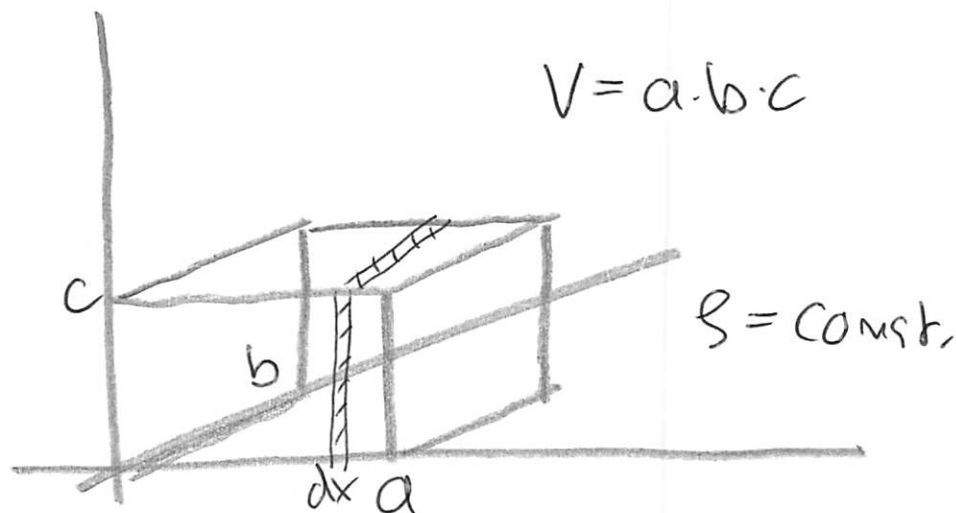
$$\rho = \text{const.}, \rho \neq \rho(\vec{r}), \rho = \frac{m}{V}$$

Def. Schwerpunkt eines
starrten Körpers

$$\vec{r}_S = \frac{\int_V \vec{r} \cdot dm}{\int_V dm}$$

$$M = \int_V dm = \text{Gesamtmasse}$$

ganz einfaches Beispiel: Quader



$$\vec{r}_S = (x_S, y_S, z_S)$$

Vorteil: Integrationsgrenzen sind
unabhängig voneinander

$$x_s = \frac{1}{M} \cdot \int_V x \cdot dm$$

$$= \frac{1}{M} \cdot \int_0^a \underbrace{x \cdot \rho \cdot b \cdot c \cdot dx}_{dm}$$

$$= \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot a \cdot b \cdot c = \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \rho \cdot V$$

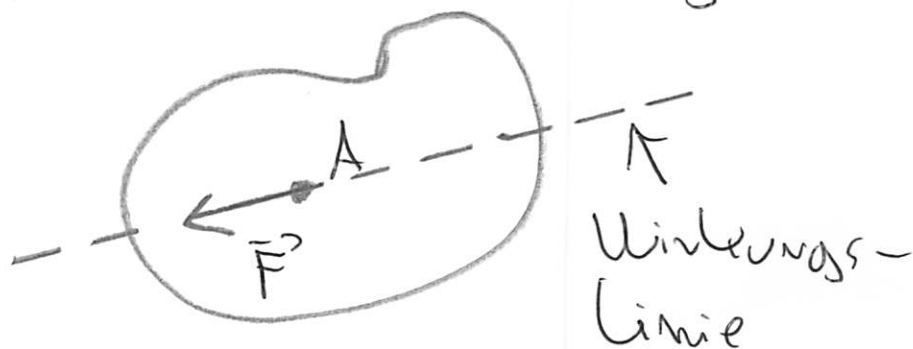
$$= \frac{1}{2} a$$

$$y_s = \frac{1}{2} b, \quad z_s = \frac{1}{2} c$$

→ Der Schwerpunkt eines Quaders ist der Kreuzungspunkt der Raumdiagonalen

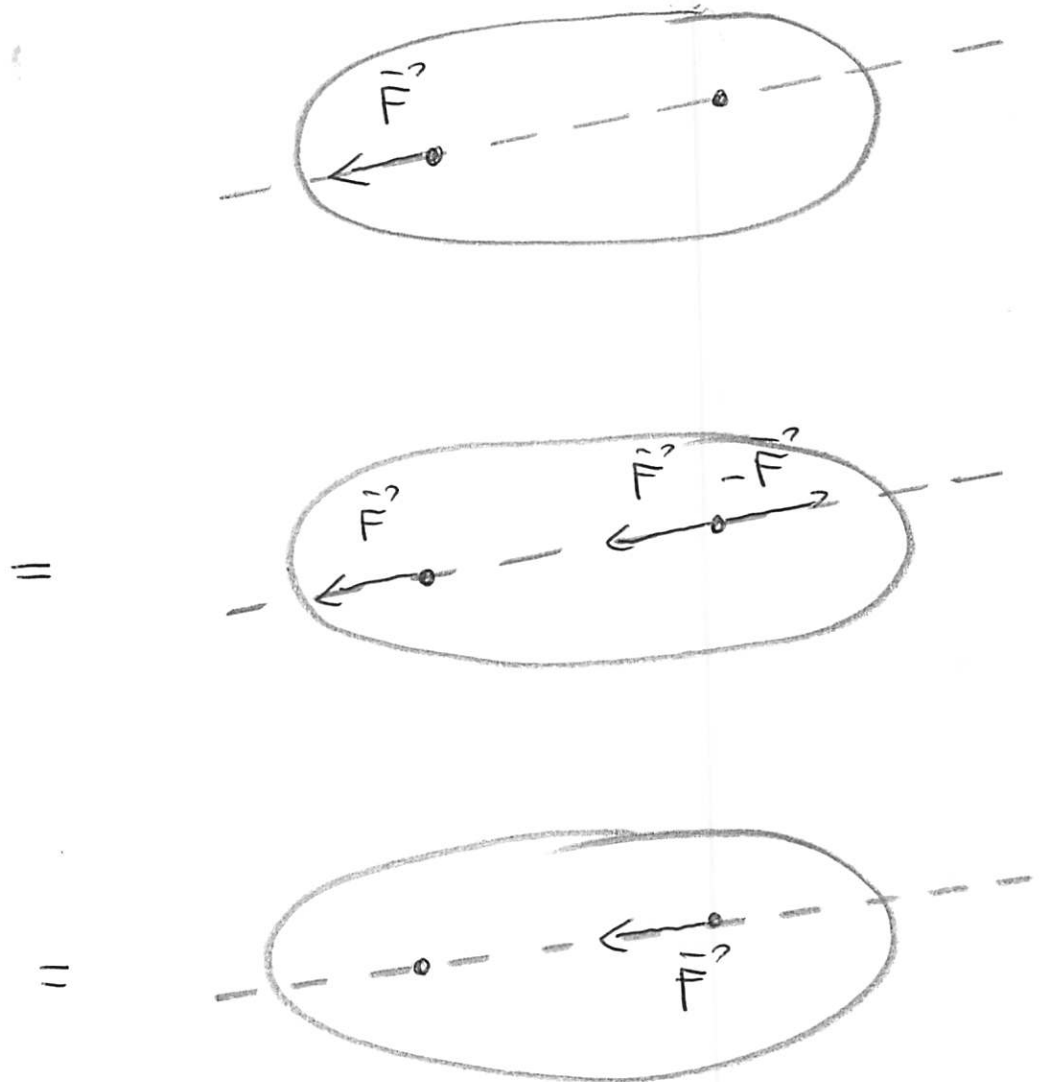
nun: Kräfte an starren Körpern

Def. Die Linie, entlang der eine Kraft auf einen starren Körper wirkt, nennt man Wirkungsline



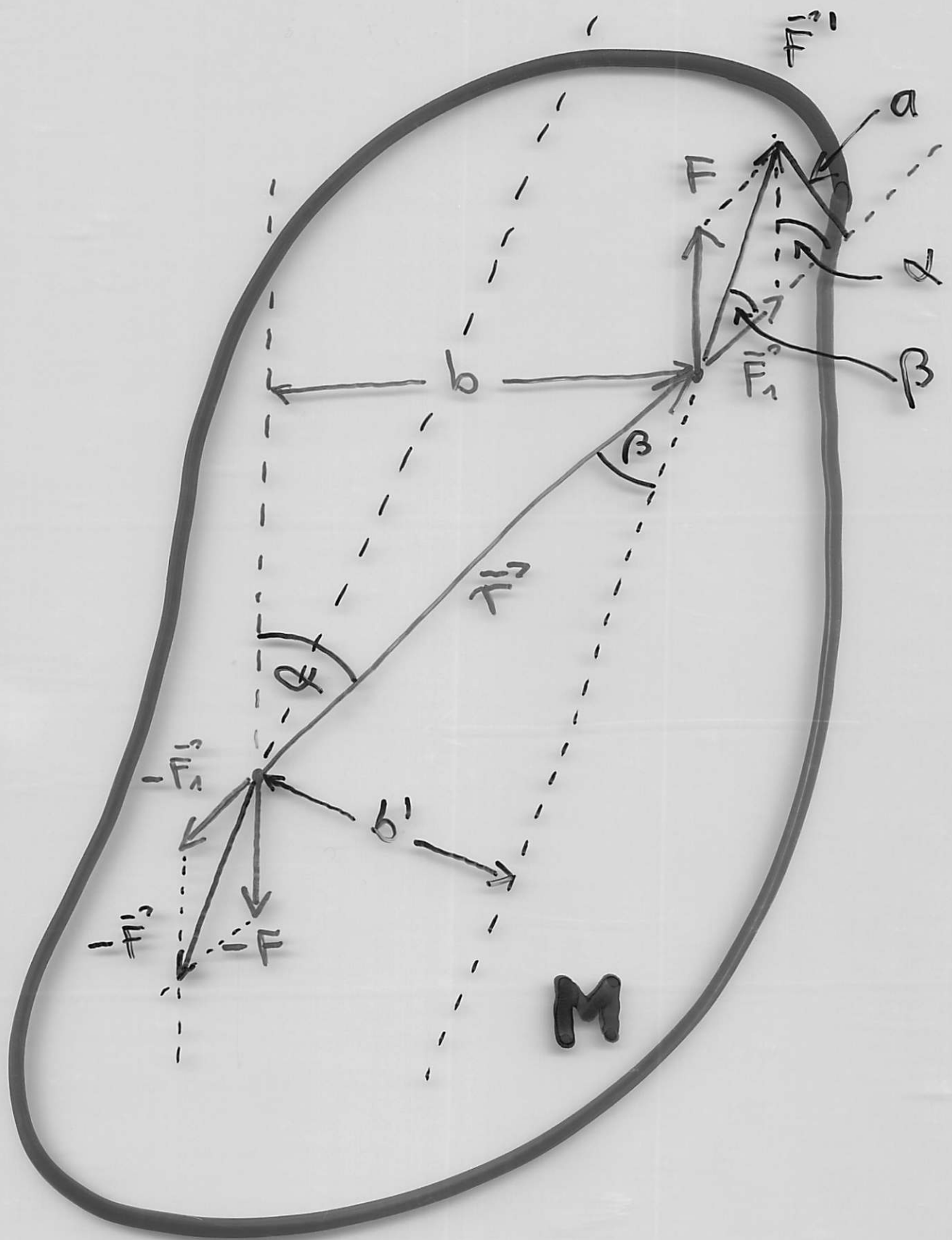
Es gilt: Entlang ihrer Wirkungs-
linien können Kräfte nach Belieben
verschoben werden, ohne das sich an
ihren Wirkung etwas ändert.

Läßt sich leicht zeigen:



Von besonderem Interesse ist
im Folgenden die Behandlung
von Kräftepaaren

→ siehe Abbildung folgende Seite



Κρούτε γαακε

Zwei betragsmäßig gleich große Kräfte $\vec{F}$ und $-\vec{F}$ im vektoriellen Abstand $\vec{r}$

Effekt: Ein Kräftepaar erzeugt ein neues Phänomen (für uns ...)
→ Drehung (Rotation) eines starren Körpers

DEMO Drehstuhl

Jetzt: Zwei zusätzliche Kräfte $\vec{F}'_1$ und $-\vec{F}'_1$ (Bild)

→ nichts ändert sich in der Wirkung
aber: Das neue "effektive" Kräftepaar ist jetzt $\vec{F}'$ und $-\vec{F}'$

nun: Definiere Abstände b und b'
→ Abstände zwischen den Kräften von Kräftepaaren

es gilt (Dreiecke)

$$b = r \cdot \sin \alpha$$

$$b' = r \cdot \sin \beta$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{F}$$

$$\sin \beta = \frac{a}{F'}$$

a : "Hilfskraft"

Damit:

$$F \cdot b = F' \cdot b'$$

(nach multiplizieren und gleichsetzen)

Wir hatten gezeigt:

$(\vec{F}_1, -\vec{F})$ und $(\vec{F}'_1, -\vec{F}')$ sind

äquivalente Kräftepaare in Bezug auf ihre Wirkung.

Damit können wir sagen:

$$\begin{array}{ccccc} F & \cdot & b \\ \nearrow & \uparrow & \nwarrow \\ \text{"Kraft"} & \text{Produkt} & \text{"Kraftarm"} \end{array}$$

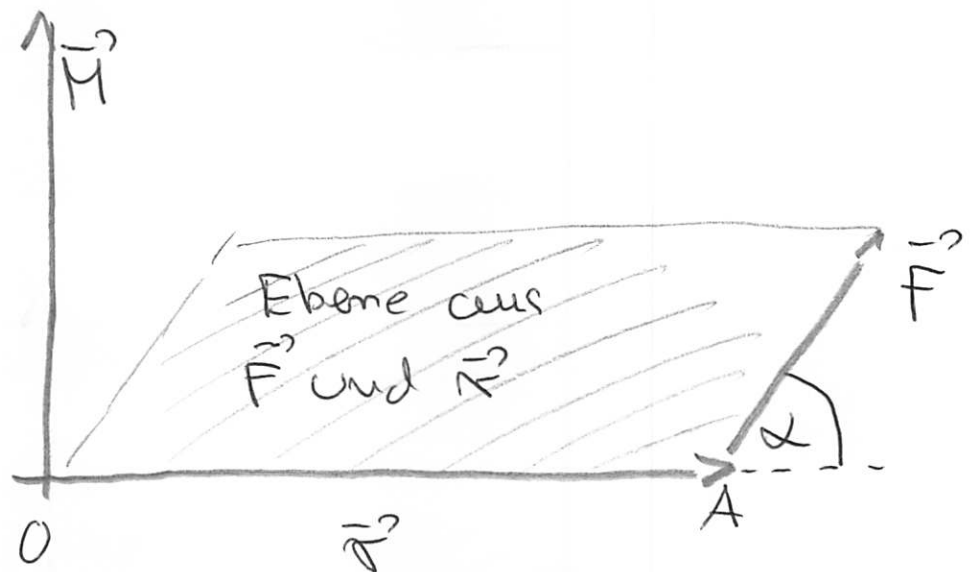
$$\text{wobei } b = r \cdot \sin \alpha$$

$\uparrow$
Winkel zwischen
 $\vec{F}$ und $\vec{r}$

bestimmt die Auswirkung einer Kraft auf die Drehung eines starren Körpers.

→ sieht nämlich nach Vektorprodukt aus!

Def.



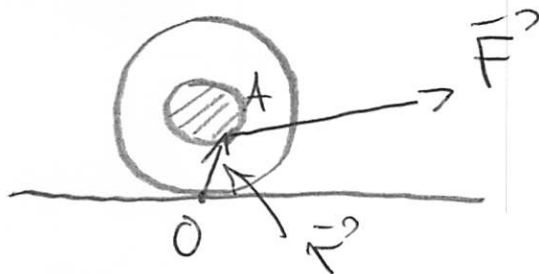
Das Drehmoment $\vec{M}$ (in Bezug auf einen Punkt O) einer Kraft $\vec{F}$, die im Punkt A angreift, ist

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

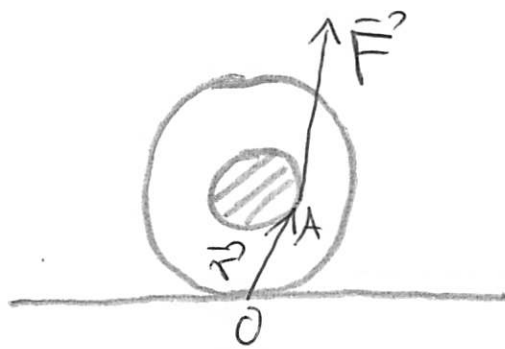
(engl.: Torque)

$\vec{M}$ steht senkrecht auf der von $\vec{r}$ und $\vec{F}$ aufgespannten Ebene

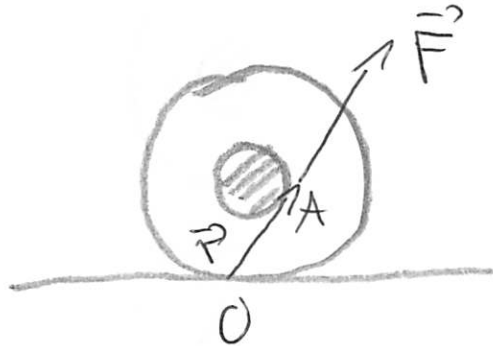
DEMO Gammrolle



$\vec{M}$ hinein in die Ebene



$\alpha > 180^\circ$
 $\vec{M}$ aus Ebene
 heraus



$\alpha = 0^\circ$
 $M = 0$

i.a. greifen an einem Körper an:

- viele Einzelkräfte $\vec{F}_i$
- viele Einzeldrehmomente $\vec{M}_i$

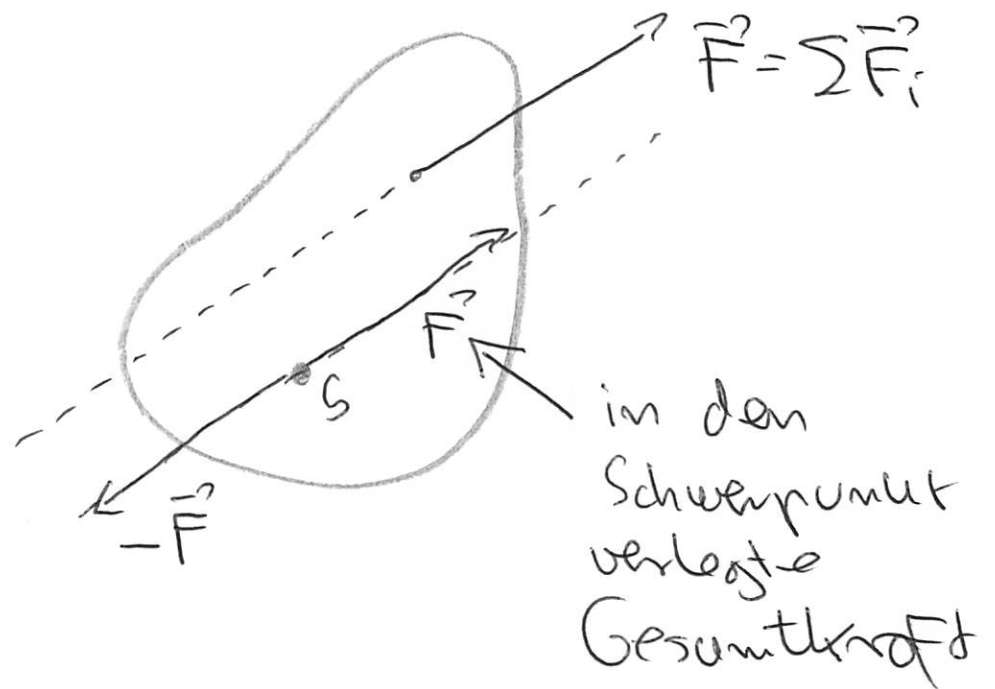
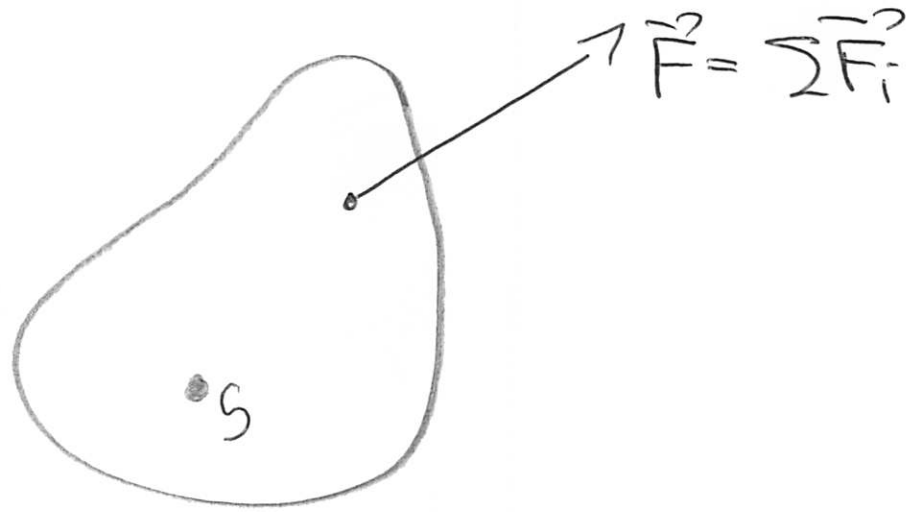
also:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i \quad \text{Gesamtkraft}$$

$$\vec{M} = \sum \vec{M}_i \quad \text{Gesamtdrehmoment}$$

Es gilt: Die Gesamtkraft läßt sich immer in den Schwerpunkt verlegen, ohne daß sich an ihrer Wirkung etwas ändert. Man erhält aber ein zusätzliches Drehmoment:

Beweis



aber: zusätzlicher Kräftepaar

$$M_S = F \cdot b \quad (\text{Betrag})$$

Interessant:

$\vec{M} = \sum \vec{M}_i$ kann damit einen starren Körper nur noch um den Schwerpunkt drehen!

Beweis:

Sonst würde $\vec{M}$ zur Bewegung des Schwerpunktes beitragen, diese erfolgt aber nur durch

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i$$

DEMO Schraubenzieher

Jede Bewegung eines starren Körpers unter dem Einfluß eines Systems von Kräften und Drehmomenten wird beschrieben durch:

- eine Translation des SP
- eine Rotation um den SP

Für die Translation gilt:

$$m \cdot \frac{d\vec{v}_s}{dt} = m \cdot \vec{a}_s = \vec{F} = \sum \vec{F}_i$$

DEMO Bumerang

DEMO Rolle + Spindel auf Schiene

2.2.2. Statik

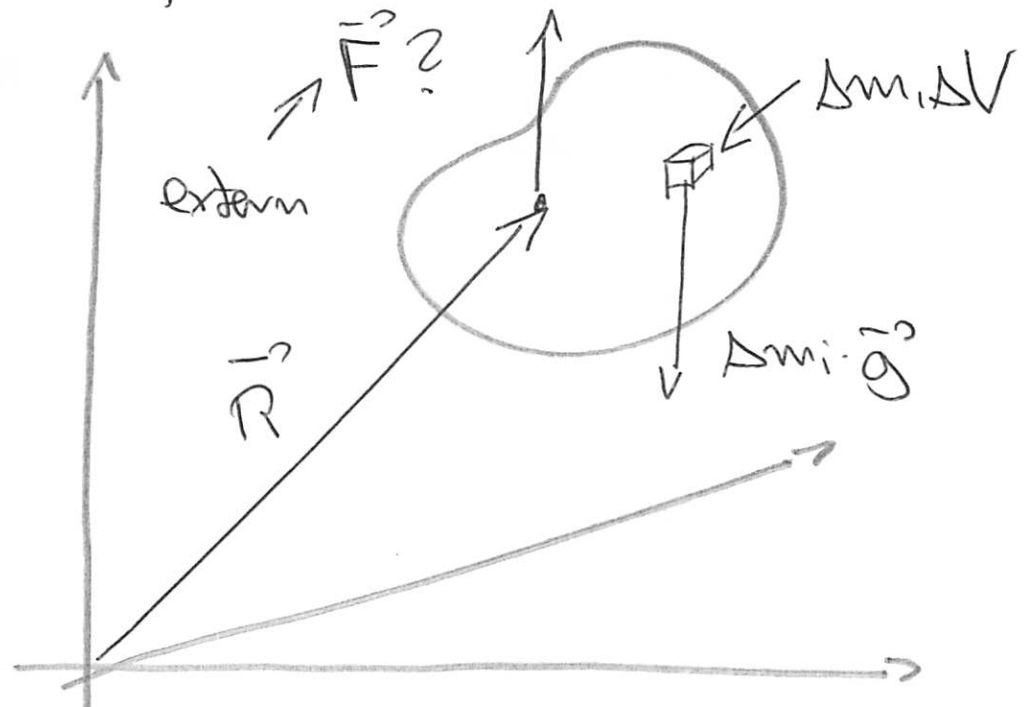
Bevor wir uns näher der Bewegung unter dem Einfluß von $\vec{M}$ zuwenden, zunächst das Gegenteil.

Def. Statik

$$\sum \vec{F}_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum \vec{M}_i = 0$$

- Keine Translation
- Keine Rotation

Spezialfall: Statik im Schwerfeld



Betrachte Kräfte und Drehmomente:

a) Kräfte

$$\sum \vec{F}_i = 0 \quad (\text{Bedingung})$$

$$\vec{F} + \sum \Delta m_i \cdot \vec{g} = 0$$

also:

$$\vec{F} = - M \cdot \vec{g} \quad (\text{logisch...})$$

b) Drehmomente

$$\sum \vec{M}_i = \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = 0$$

$$\underbrace{\vec{R} \times \vec{F}}_{\text{extern}} + \sum \Delta m_i \cdot (\vec{r}_i \times \vec{g}) = 0$$

Kombinieren dieser Erkenntnisse:

$$-\vec{R} \times M \cdot \vec{g} + \sum \Delta m_i \cdot \vec{r}_i \times \vec{g} = 0$$

$$\underbrace{(-M \cdot \vec{R} + \sum \Delta m_i \cdot \vec{r}_i) \times \vec{g} = 0}$$

ein Kreuzprodukt verschwindet:

- mindestens ein Nullvektor
- beide Vektoren parallel

erste Möglichkeit

$$-M\vec{R} + \sum \Delta m_i \cdot \vec{r}_i = 0$$

$$\vec{R} = \underbrace{\frac{1}{M} \sum \Delta m_i \cdot \vec{r}_i}_{\text{Schwerpunkt}}$$

→ Unterstützung im Schwerpunkt

DENO Besen

zweite Möglichkeit

$$-M\vec{R} + \sum \Delta m_i \cdot \vec{r}_i = \lambda \cdot \vec{g}$$

↑
beliebiger Faktor
↳ parallel

$$\vec{R} = -\frac{\Lambda}{M} \cdot \vec{g} + \frac{1}{M} \sum \Delta m_i \cdot \vec{r}_i$$

Für $\Lambda = 0$: wie vorher

$\Lambda \neq 0$: Verschiebung des Unterstützungspunktes entlang $\vec{g}$

3 Möglichkeiten:

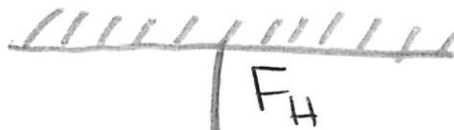
- $\vec{R}$ über SP: stabil
 - $\vec{R}$ im SP: indifferent
 - $\vec{R}$ unter SP: instabil
- } G.C.

DEMO Besen

DEMO Modellkörper

Weiteres Beispiel zur Statik:
"Flaschenzug"

Feste Rolle



$$F_L = m \cdot g$$

Drehmomente:

$$F_L \cdot r = F_2 \cdot r \quad (\text{Betrag})$$

Kräfte:

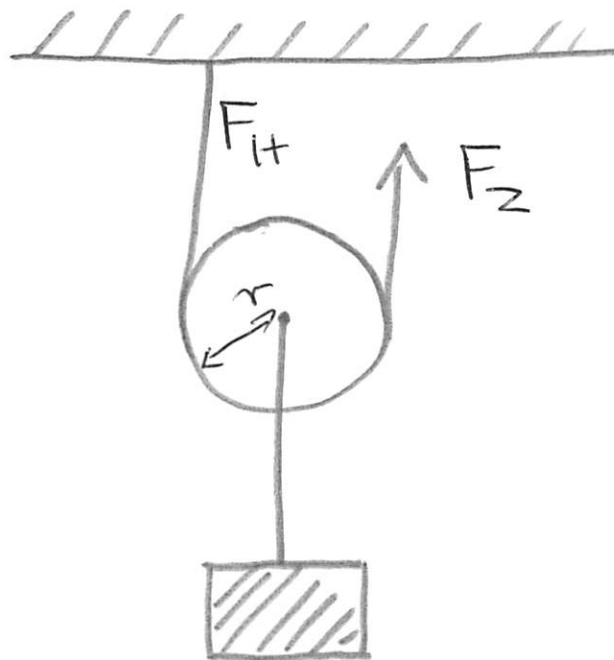
$$F_L = F_2$$

$$F_L + F_2 + F_H = 0$$

$$F_H = -2 \cdot F_L$$

163

Lose Rolle



Drehmomente:

$$F_H = F_2 \text{ (wie vorher)}$$

(Radius r)

Kräfte:

$$F_H + F_2 + F_L = 0$$

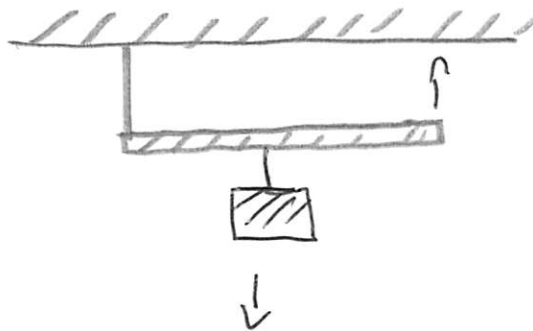
$$F_L = -F_2 - F_H = -2 \cdot F_2$$

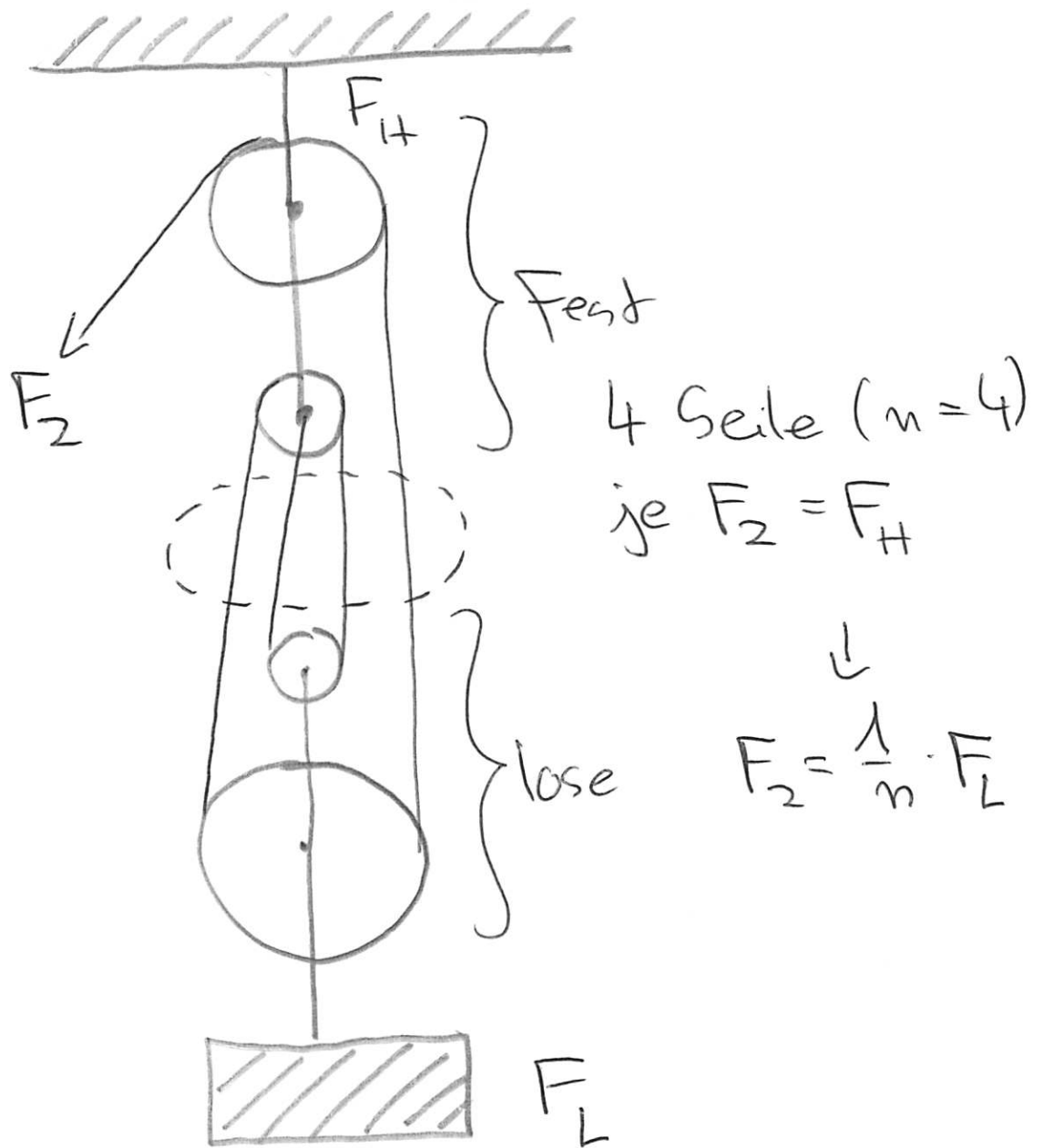
$$F_L = m \cdot g$$

$$\text{also: } F_2 = \frac{1}{2} \cdot F_L \text{ (Beträge)}$$

→ Halten (Dreh) und Zug teilen
sich die Last

geht auch einfacher:





Hinweis: Arbeit = Kraft $\cdot$ Weg
 $L \rightarrow$ erhalten

2.2.3. Rotation um feste Achse

z.B. Räder auf Ebene

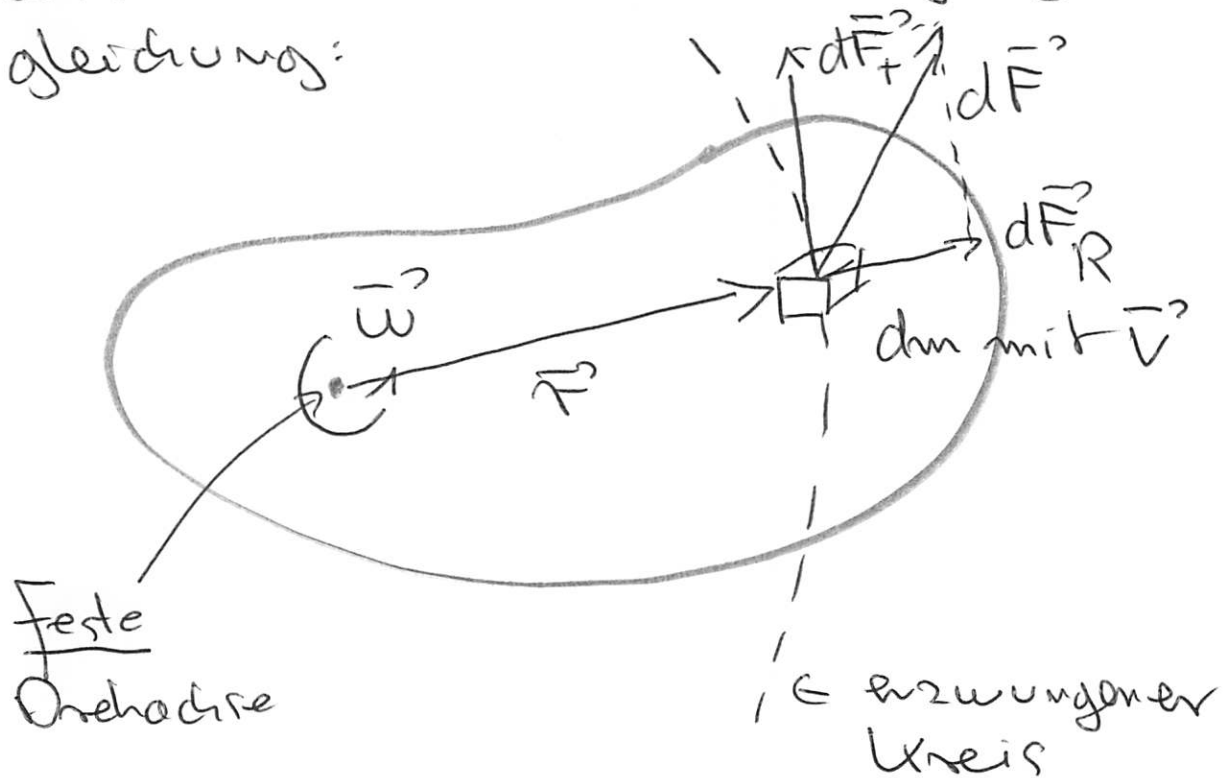
$\rightarrow$ Rotation + Translation

DEMO: Spindel, Kugel, Zylinder
 Rohr, volles Bier, leeres Bier

Schlußfolgerung: Form des Körpers ist wichtig!

mehr als: Trägheit = Masse!

Wir brauchen eine Bewegungsgleichung:



dm auf Kreisbahn mit $\vec{v}$

↳ Kraft auf dm ist $d\vec{F}$

↳ tangentielle Komp. $d\vec{F}_T$

↳ radiale Komp. $d\vec{F}_R$

↳ Keine Auswirkung

Alle dm im Körper haben die selbe Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

↑ $\vec{v}$ verschieden ↑ $\vec{\omega}$ gleich ↑ $\vec{r}$ verschieden

Schauen wir uns das Drehmoment
auf dm an:

$$d\vec{M} = \vec{r} \times d\vec{F}$$

$$dM = r \cdot dF_{\perp} \text{ (tangential)}$$

$$= r \cdot \underbrace{dm \cdot \frac{dv}{dt}}$$

"Massepunkt, Newton II"

→ es kommt also keine "neue Physik"
hinzu!

$$\text{oder: } dM = r^2 \cdot \underbrace{dm \cdot \frac{d\omega}{dt}}$$

Winkelbeschleunigung

Integration über alle Massepunkte:

$$\underbrace{\int dM}_{\text{Dies ist ein Drehmoment, Keine Masse!}} = \underbrace{\left(\int r^2 \cdot dm \right)}_{\uparrow} \cdot \underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{\text{Dies ist eine (Winkel)-beschleunigung}}$$

Dies beschreibt
die Trägheit des
starrten Körpers gegen
den Versuch ihn in
Rotation zu versetzen

so etwas wie Newton II ...

Def.

$$I = \int r^2 \cdot dm \quad (= \Theta)$$

Trägheitsmoment eines st. Körpers,
 r ist der Abstand zwischen dm
und der Drehachse

engl.: Moment of inertia

Einheit: $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

→ Es kommt nicht nur auf die
Masse an, sondern auch auf den
Abstand von der Drehachse, und
dies sogar im Quadrat!

Velitiell:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= I \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \cdot \dot{\vec{\omega}} \\ &= I \cdot \vec{\alpha} \end{aligned}$$

zunächst I ist ein Skalar

Wie rechnet man ein Trägheits-
moment aus?

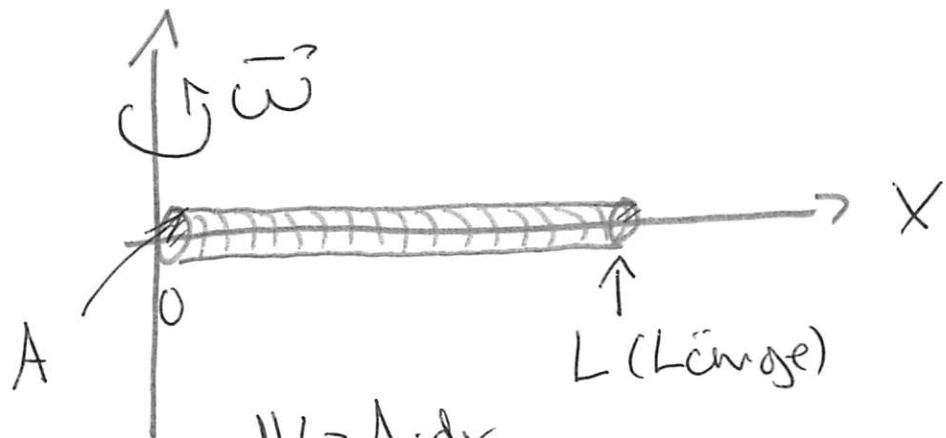
$$I = \int r^2 \cdot dm = \int r^2 \cdot \underbrace{\rho(r)}_{\text{Volumen-}} \cdot dV = \rho \cdot \int r^2 \cdot dV$$

↑
hom. Körper

integral

Rechenbeispiele

rotierender dünner Stab



$$dV = A \cdot dx$$
$$I = \rho \cdot A \cdot \int_0^L x^2 \cdot dx = \rho \cdot A \cdot \frac{L^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot M \cdot L^2$$

$$(A \cdot L \cdot \rho = M)$$

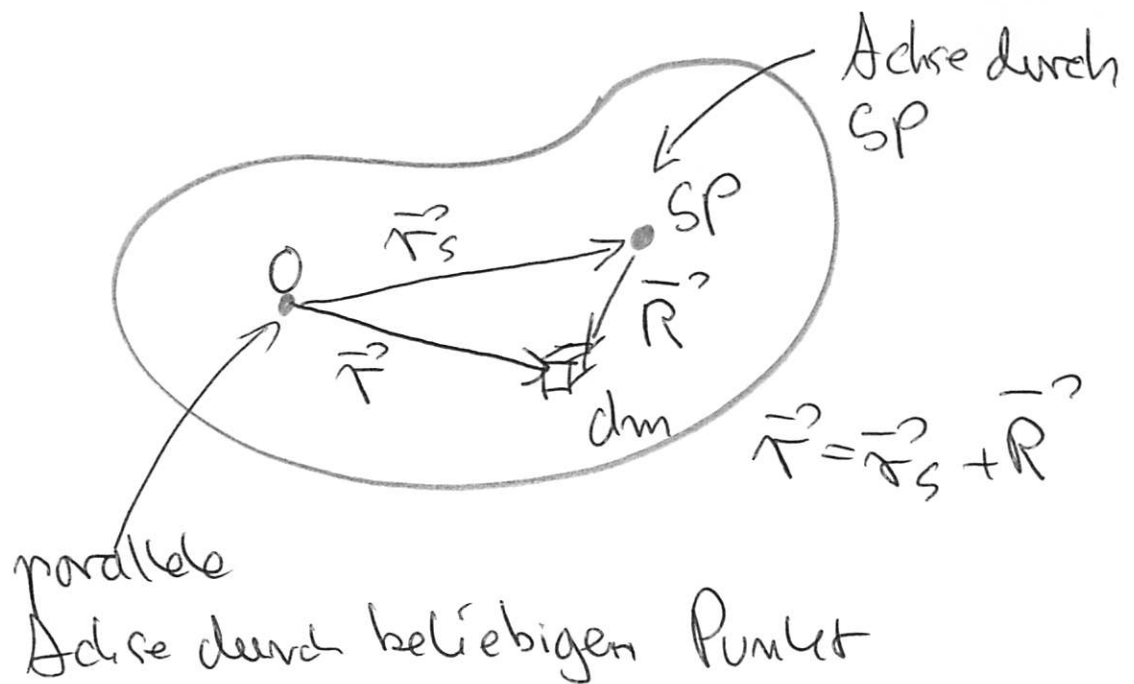
also: $L \gg \sqrt[3]{A}$, jedes Volumenelement soll konstanten Abstand von der Drehachse über seinen gesamten Durchmesser haben

Zylinder : $I = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2$

Kugel : $I = \frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2$

→ Übungsaufgabe

Was passiert, wenn man die Drehachse parallel verschiebt?



$$r^2 = r_s^2 + 2 \cdot \vec{r}_s \cdot \vec{R} + R^2$$

also: I für beliebige Achse durch O:

$$I = \int r_s^2 dm + 2 \cdot \vec{r}_s \cdot \underbrace{\int \vec{R} \cdot dm}_{\text{Fest}}$$

0!
(Def. Schwerpunkt)

$$= r_s^2 \cdot \int dm + \int R^2 \cdot dm$$

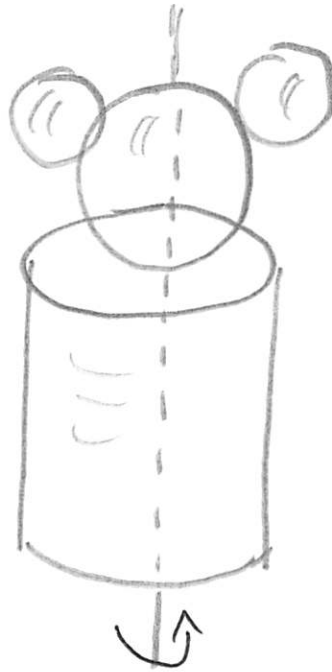
also: $I = r_s^2 \cdot M + I_s$

"Steinerscher Satz"

Trägheitsmoment um beliebige Achse = Trägheitsmoment um parallele Achse durch Schwerpunkt + Masse des Körpers mal Abstand Achsen zum Quadrat.

→ Trägheitsmomente sind wegen der Integration additiv!

z.B.



4 Elemente
+
2 mal Steinerscher
Satz

Mit der bekannten Bewegungsgleichung können wir nun einige einfache Prozesse in Analogie zur Punktmechanik verstehen:

gleichförmig beschleunigte Drehbew.

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{M \text{ (nicht Masse!)}}{I} = \text{const.}$$

$$\omega = \frac{d\omega}{dt} \cdot t + \omega_0$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{d\omega}{dt} \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0$$

DEMO: gleichf. Beschleunigung

Drehbewegungen

$$M = - \kappa \cdot \Delta\varphi$$

↑ ↑ ↑
Dreh- "Winkelrichtgröße"
moment Winkeländerung

Bewegungsgleichung =

$$I \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\kappa \cdot \varphi$$

→ harmonische Schwingung

Lösung:

$$\varphi(t) = \phi \cdot \cos(\omega_s t + \varphi_0)$$

↑ ↑
Amplitude Eigenfrequenz

$$\omega_s = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}}$$

$$\text{also: } T \sim \sqrt{I}$$

- Massen sind nicht so wichtig ... ($\sim \sqrt{m}$)
- Abstände sind wichtiger! ($\sim r$)

DEMO Drehstuhl

Eine rotierende Masse hat natürlich auch Bewegungsenergie!

Schauen wir uns jetzt einmal nur ein Massenelement dm an:

$$dE_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot v^2 = \frac{dm \cdot r^2}{2} \cdot \omega^2$$

↑
gleich für
alle dm

also:

$$E_{\text{rot}} = \int dE_{\text{kin}}$$

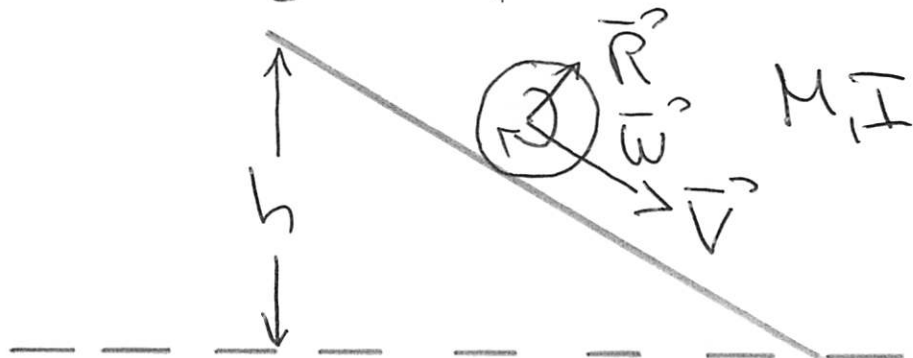
↑
Rotation

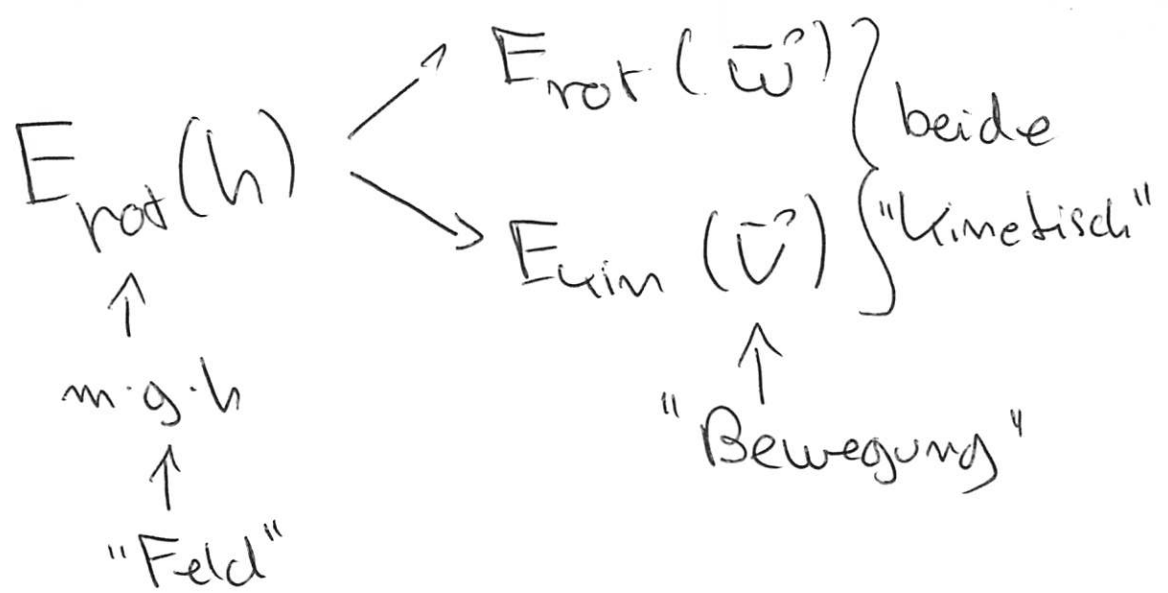
$$= \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \int r^2 \cdot dm = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

Die kinetische Energie der Rotationsbewegung eines starren Körpers ist:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

Anwendung schiefe Ebene:





$$M \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

mit $v = \omega \cdot R$ Folgt daraus:

$$v(h) = \sqrt{2 \cdot g \cdot h \cdot \left(\frac{1}{1 + \underbrace{\left(\frac{I}{M \cdot R^2} \right)}} \right)}$$

↳ alle I 's sind von der Form

$$I = f \cdot M \cdot R^2$$

↑
"Form"

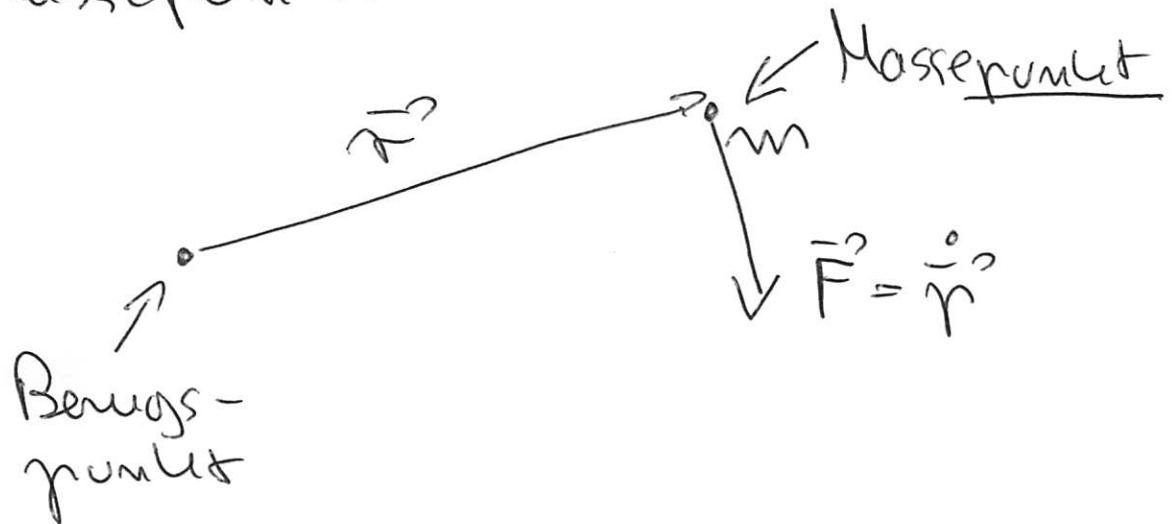
→ nur dieser Vorfaktor f bestimmt die Geschwindigkeit, wenn M und R gleich sind

2.2.4 Drehimpuls

Analogie zum Impuls in der Rotation?

$$\vec{F} = \ddot{\vec{r}} \quad \text{Kennen wir}$$

Betrachten wir noch einmal einen Massepunkt:



Erstaunlicherweise läßt sich auch für einen solchen Massepunkt ein Drehmoment definieren!

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} \\ &= \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \end{aligned}$$

Betrachte nun: (Grund folgt gleich!)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) &= \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_{=\vec{v} \times \vec{p} = m \cdot (\vec{v} \times \vec{v})} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \\ &= 0 \end{aligned}$$

also:

$$M = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p})$$

→ interessant!

So, wie die Kraft die Ableitung des Impulses ist, ist das Drehmoment die Ableitung der Größe $\vec{r} \times \vec{p}$!

Def:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

"Drehimpuls"

engl.: angular momentum

$$\text{Es gilt: } \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\dot{L}}$$

Also: Ein Masspunkt ohne Drehmoment bewegt sich mit konstantem Drehimpuls

wichtig: Alle bewegten Masspunkte haben i.d. einen Drehimpuls, abhängig vom Bewegungspunkt !

DEMO: LM läuft gegen Drehstuhl

Ein wichtiger Spezialfall ist die Bewegung unter dem Einfluß von "Zentralkräften"

Struktur einer Zentralkraft:

$$\vec{F} = F(r) \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

↑
beliebige Abh.
vom skalaren
Abstand r

↑
radialer
Einheitsvektor

Beispiele: Gravitation, v.d. Waals, ...

dann:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= \underbrace{\vec{r} \times \vec{r}}_0 \cdot \underbrace{\frac{1}{|\vec{r}|} \cdot F(r)}_{\text{Zentralkraft}}$$

0

Zentralkraft

Also gilt für alle Zentralkräfte:

$$\vec{M} = \dot{\vec{L}} = 0 \quad \text{oder} \quad \vec{L} = \text{const.}$$

"Drehimpulserhaltung"

DEMO: Kugel an Schnur
(großes r bei kleinem r)

Beispiel: Planetenbewegungen

↳ Keplers Flächensatz (im
Lehrbuch nachlesen)

Jetzt: Systeme von Massenpunkten

Erinnerung:

Wenn: $\sum \vec{F}_i = 0$ (äußere Kräfte)

dann: $\dot{\vec{p}}_s = 0$ oder $\vec{p}_s = \text{const.}$

Impulserhaltung

DEMO: Münchhausen
KM auf Rollwagen

nun:

DEMO: KM mit Besen auf Drehsstuhl

Def.

Gesamtdrehimpuls eines Systems
von Massepunkten

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \\ &= \sum_i m_i \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i)\end{aligned}$$

→ Innere Kräfte erzeugen keine
resultierenden Drehmomente (aus
Newton III)

Damit:

Für ein System von Massepunkten gilt:

$$\dot{\vec{L}}_S = \sum (\underbrace{\vec{r}_i \times \vec{F}_i}_{\substack{\uparrow \\ \text{Summe aller} \\ \text{äußeren Dreh-} \\ \text{momente}}}) = \vec{M}_S$$

$\uparrow$
äußeres
Drehmoment
bez. SP

also: Wenn $\vec{M}_S = 0$

dann $\dot{\vec{L}}_S = 0$

oder $\vec{L} = \text{const.}$

"Drehimpulserhaltung für ein System von Massepunkten ohne äußeres Drehmoment"

Jetzt gehen wir von beliebigen Massepunkten zu starren Körpern.

Alter Trick:

- Masselemente dm haben im starren Körper alle gleiches $\vec{\omega}$
- Dann Integration

$$\begin{aligned}
 d\vec{L} &= \vec{r} \times d\vec{p} \\
 &= \vec{r} \times dm \cdot \vec{v} \\
 &= \vec{r} \times dm (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\
 &= dm \cdot \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})
 \end{aligned}$$

"BAC - CAB Regel":

$$= dm \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}^2 - \vec{r} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}))$$

Integration:

$$\begin{aligned}
 \vec{L} &= \vec{\omega} \cdot \int_V r^2 \cdot dm - \int_V \vec{r} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \cdot dm \\
 &= \vec{\omega} \cdot I - \int_V \vec{r} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \cdot dm
 \end{aligned}$$

bekannt!

Komponente von $\vec{L}$ parallel zu $\vec{\omega}$

Kompliziert
Komponente von $\vec{L}$ nicht parallel zu $\vec{\omega}$, aber
ggfs. Null...

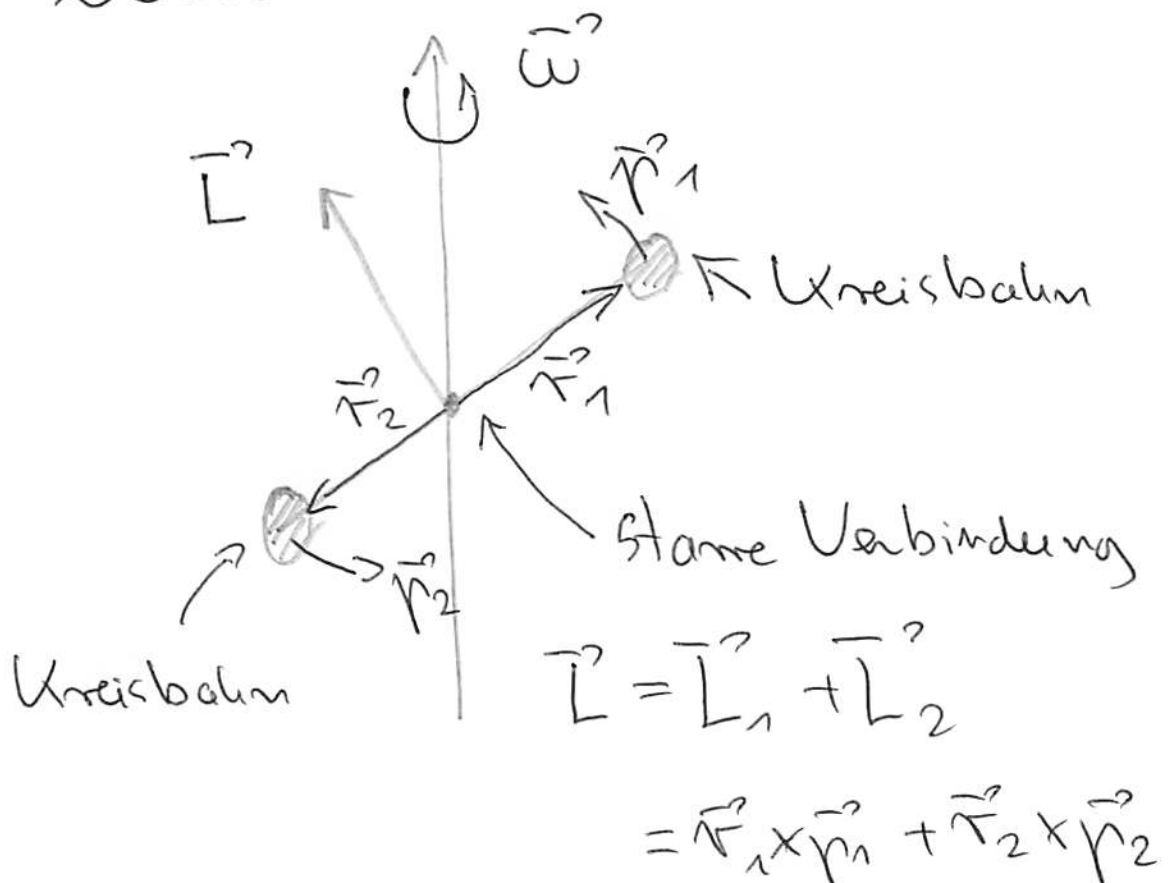
Wichtige Erkenntnis:

$\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ sind bei starren

Körpern nicht notwendigerweise
parallel!

Konkretes Beispiel:

Winkel:



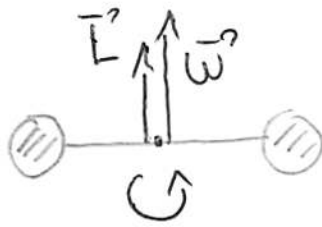
$\vec{L}$ steht senkrecht auf der starren Verbindung der Winkel und bewegt sich auf einer Kegeloberfläche

Aber: $\vec{\omega}$ zeigt unveränderlich in Richtung Drehachse

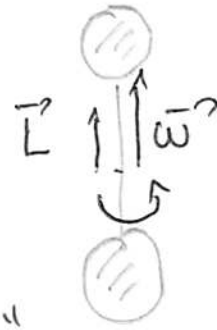
also: $\dot{\vec{L}} \neq 0$

$\vec{M} \neq 0 \rightarrow$ Kraft, "Unwucht"

Interessanterweise ist dies bei einer Rotation um Symmetrieachsen anders!



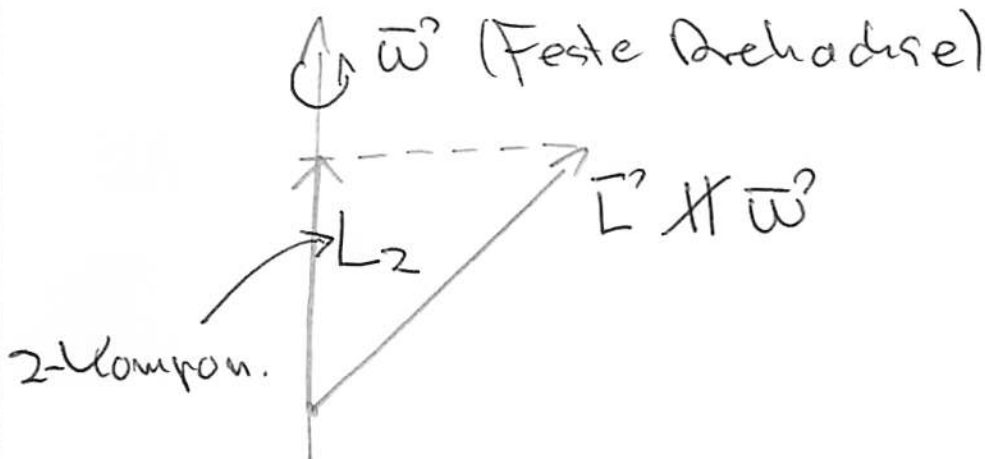
$$\vec{M} = 0$$



"Kräftefreie Rotation"

DEMO: schiefes Rad
Rad mit Unwucht
auswuchten

Im allgemeinen zeigt $\vec{L}$ also nicht entlang der fest vorgegebenen $\vec{\omega}$ -Achse.



Z-Achse (z.B., in der Physik beliebige Bezeichnung...)

L_2 : Komponente von $\vec{L}$ parallel zu $\vec{\omega}$

Damit verbleibt aus der komplizierten Gleichung (*) nur:

$$L_2 = I \cdot \omega$$

↑ Trägheitsmoment um
z-Achse (fest)

$$M_2 = \dot{L}_2$$

Daraus folgt auch eine Dreh-
impulserhaltung:

Wenn: $M_2 = 0$ (Kein Drehmoment
in Richtung $\hat{\omega}$)

$$\text{Dann: } \underbrace{L_2 = I \cdot \omega = \text{const.}}$$

lustige Experimente

DEMOS:

- Hanteln auf Drehstuhl
- Fahrradreifen

$$L_2 \uparrow \hat{\omega} \longrightarrow \overrightarrow{\omega} \quad L_2 = 0$$

$$L_2 \uparrow \hat{\omega} \longrightarrow \downarrow \hat{\omega} \quad -L_2$$

- Fahrradreifen übergeben
- Fahrradreifen selbst anstoßen
- Besen schwenken

2.2.5. Rotation im Raum

→ Jetzt geben wir die feste Achse an!

Erinnerung:

$$\vec{L} = \vec{\omega} \cdot \int_V r^2 \cdot dm - \int_V \vec{r} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \cdot dm$$

Das wollen jetzt Komponentenweise schreiben. Die Terme mit x^2, y^2, z^2 fallen jeweils heraus.

$$L_x = \omega_x \int (y^2 + z^2) \cdot dm - \omega_y \int xy \cdot dm - \omega_z \int xz \cdot dm$$

$$L_y = \omega_y \int (z^2 + x^2) \cdot dm - \omega_z \int yz \cdot dm - \omega_x \int yx \cdot dm$$

$$L_z = \omega_z \int (x^2 + y^2) \cdot dm - \omega_x \int zx \cdot dm - \omega_y \int zy \cdot dm$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$ parallel!
 $\underbrace{\hspace{1.5cm}}$ Abstand
v. d.
Drehachse

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$ gemischte
Terme

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$
bekannte
Trägheitsm.
 I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$
3x3 Matrix $\cdot \vec{\omega}$ -Vektor

Also:

$$\vec{L} = \underline{\underline{I}} \cdot \vec{\omega}$$

↑ 3x3 Matrix

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Diagonalelemente

allgemein

$$I_{ik} = \int (\vec{r}^2 \delta_{ik} - r_i \cdot r_k) \cdot dm$$

$$L_i = \sum_k I_{ik} \cdot \omega_k$$

$\swarrow \quad \searrow$
 $x, y, z \quad \quad x, y, z$

I: Trägheitstensor

L: symmetrisch, reell

2. Stufe (2 Indizes)

Bemerkungen zu "Tensoren"

Herkunft: "Tension" (Spannung)
elastischer Körper, Verformung
nicht notwendigerweise in Kraftrichtung (später mehr)

Was man sich merken sollte:

Häufig sind in der Physik Vektoren
dem Betrag nach proportional, zeigen
aber in verschiedene Richtungen.

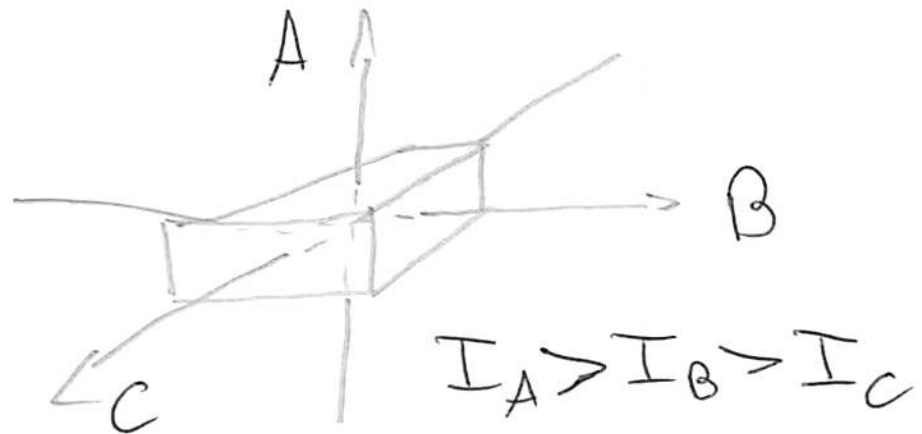
→ Proportionalitätskonstante ist
ein "Tensor"

Einige Eigenschaften des Trägheitstensors (leider ohne Beweis):

- Für jeden starren Körper läßt sich ein spezielles Koordinatensystem finden, in dem die Nicht-Diagonalelemente vom $\mathbb{I}$ verschwinden
- Die Achsen dieses speziellen Systems laufen durch den Schwerpunkt und heißen "Hauptträgheitsachsen"
- Die zu diesen Achsen gehörenden Hauptträgheitsmomente heißen "Hauptträgheitsmomente"

- Bei Rotation um diese Achsen sind $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ parallel
- Bei symmetrischen Körpern sind diese Achsen die Symmetrieachsen

Beispiel Quader



Interessant:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$$

↑
von außen
↑

Minimierung der Rot. Energie durch minimales $\omega^2 \rightarrow$ Hauptachse mit größtem I

DEMO versch. Körper

Anmerkung: Wegen der Kürzung
der Vorlesungszeit (Studien- und
Klausurwoche) kann der Kreis
i.d. Experimentalphysik nicht
behandelt werden.

2.3. Mechanik deformierbarer Körper

starrer Körper: $\vec{r}_i - \vec{r}_j = \text{const.}$

realistisch: Verformung bei
Anwendung äußerer Kräfte

→ Änderung der "Form"

→ Änderung des "Volumens"

DEMO: Schaumstoff

Beobachtung: Körper setzen der
Veränderung von Form und Volumen
(manchmal --) Widerstand entgegen.

→ Formelastizität } rücktreibende
→ Volumenelastizität } Kräfte

↓
Schwingungen

2.3.1. Feste Stoffe

→ später: Flüssigkeiten und Gase

Def. (nicht so ganz eindeutig...)

Ein fester Körper besitzt Form-
und Volumenelastizität

Gegenbeispiel: Wasser ausgießen

Problematisches Beispiel: Wudergummi

Hinweis: "Soft Matter Physics" ist
ein neues, blühendes Gebiet der
Physik → biologische Systeme

Nun aber zu klassischen "Festkörpern"

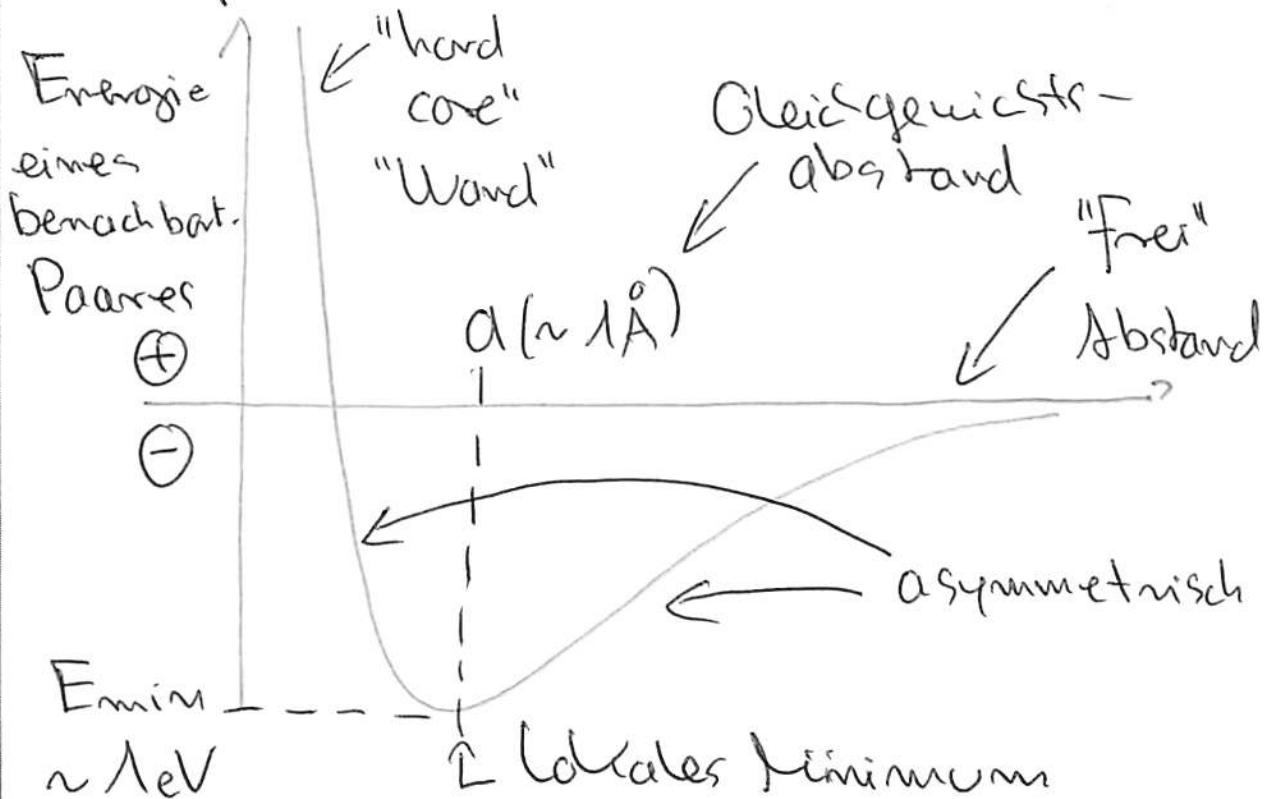
DEMO: Hooke'sches Gesetz eines
langen Drahtes

Ansatz für eine Rechnung:

mikroskopisch → makroskopisch
Atome Blöcke

wichtiges Prinzip der Physik
vieler Teilchen !

Es gibt einen optimalen Abstand zwischen Atomen in einem Festkörper:



Ursache: Elektronenbindung (Ionenbildung, Kovalent, ...)

Erinnerung:

$$E(r) = E(a) + \frac{r-a}{1!} \cdot \frac{dE}{dr} \Big|_a + \frac{(r-a)^2}{2!} \cdot \frac{d^2E}{dr^2} \Big|_a + \dots \text{höhere Terme}$$

beliebig

Null wo Minimum

quadratisch

→ Näherung: harmonisches System

→ also: näherungsweise ein lineares Kraftgesetz

besonders einfach:

lineare Kette

lineare Kette

← harmonisch

↳

a - mikroskopisch

- makroskopisch
n Atome

Auslenkung eines Paares:

$$\Delta X \sim F$$

Auslenkung gesamte Kette:

$$\Delta L = n \cdot \Delta x$$

offenrichtlich: $L \sim n$

also: $\Delta L \sim L \cdot \Delta x$

$\sim L \cdot F$

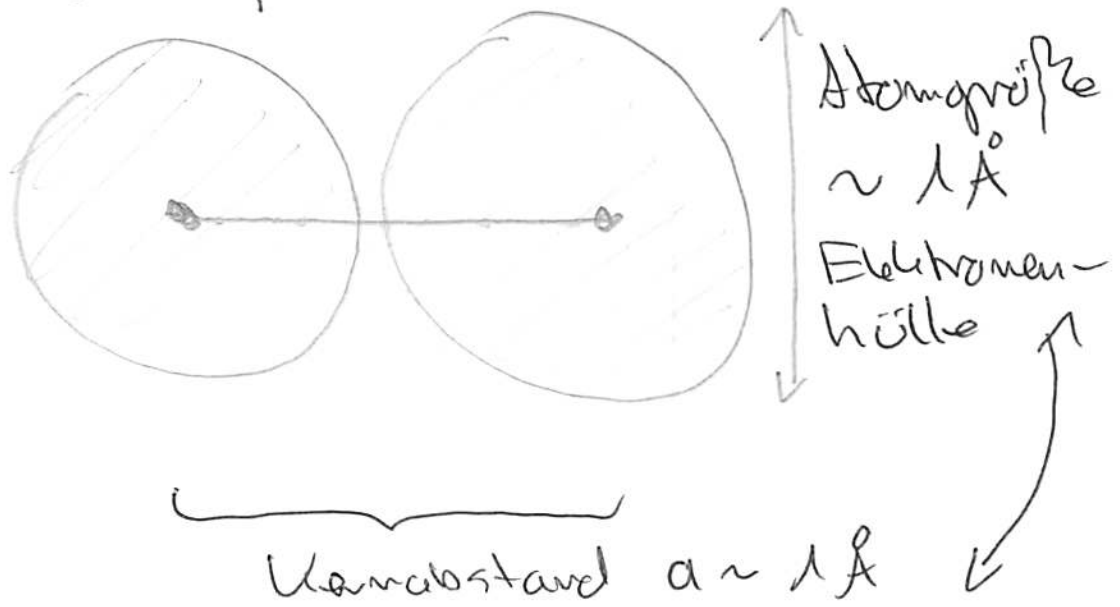
oder: $F = \text{const.} \cdot \frac{\Delta L}{L}$

relative Auslenkung

In der Realität sind Festkörper
drei-dimensionale Kristallgitter

DEMO

→ Achtung, solche Darstellungen
sind irreführend!



Aber: Kernradius $\sim 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$
↳ auch: 1 Fermi

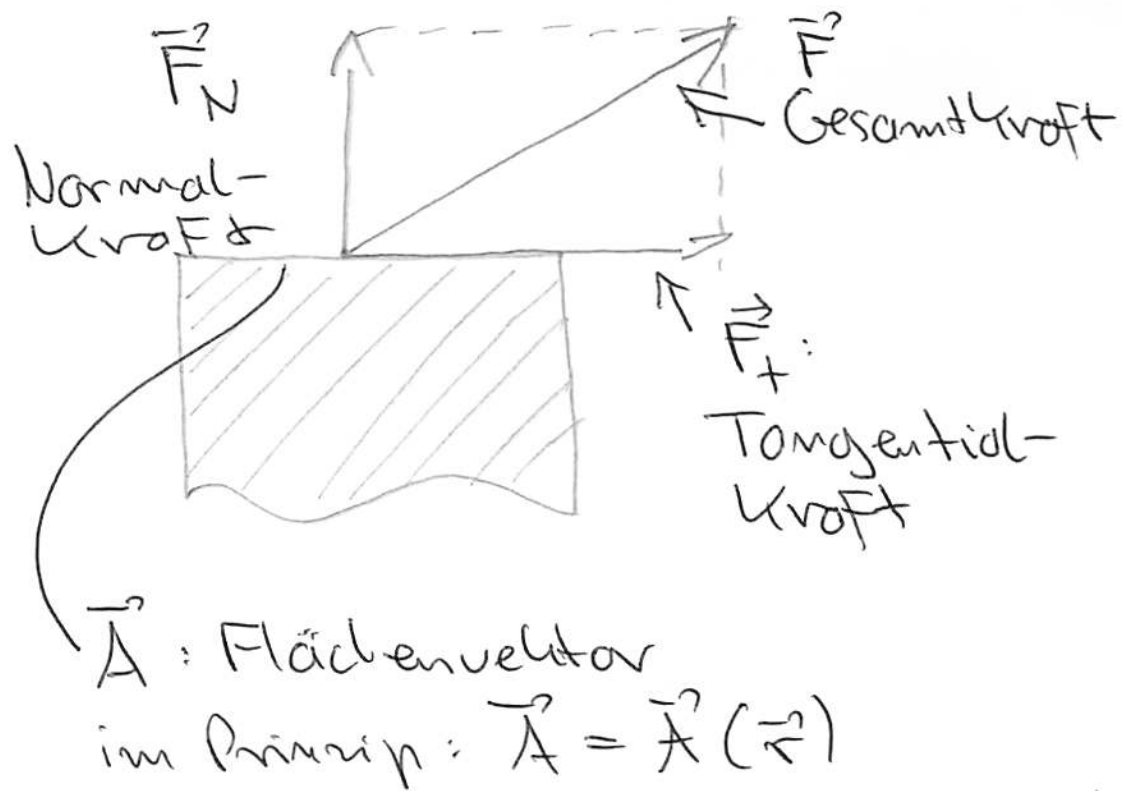
Körper ohne regelmäßige Kristall-
struktur nennt man "amorph"

→ Glas, Gummi, biol. Systeme

Wie gehen wir nun an die drei-
dimensionalen Körper heran?

↳ phänomenologischer Ansatz

↳ neue Begriffe



Def.

$$\left| \frac{\vec{F}_N}{A} \right| = \sigma$$

Beträge

"Normalspannung"
"Zugspannung"

$$\left| \frac{\vec{F}_t}{A} \right| = \tau$$

"Tangentialspannung"
"Schubspannung"

also: Spannung = Kraft / Fläche

zunächst: Skalar, eigentlich Vektor

Dann wird das Hookesche
Gesetz für Festkörper wie
folgt formuliert:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot \sigma$$

$\uparrow$ Dehnung $\uparrow$ Elastizitätsmodul $\nwarrow$ Normalspannung

Einheit 1 N/mm^2

$\nwarrow$ sorry...

Wir füllen nun noch und noch die folgende Tabelle mit Materialeig. aus.

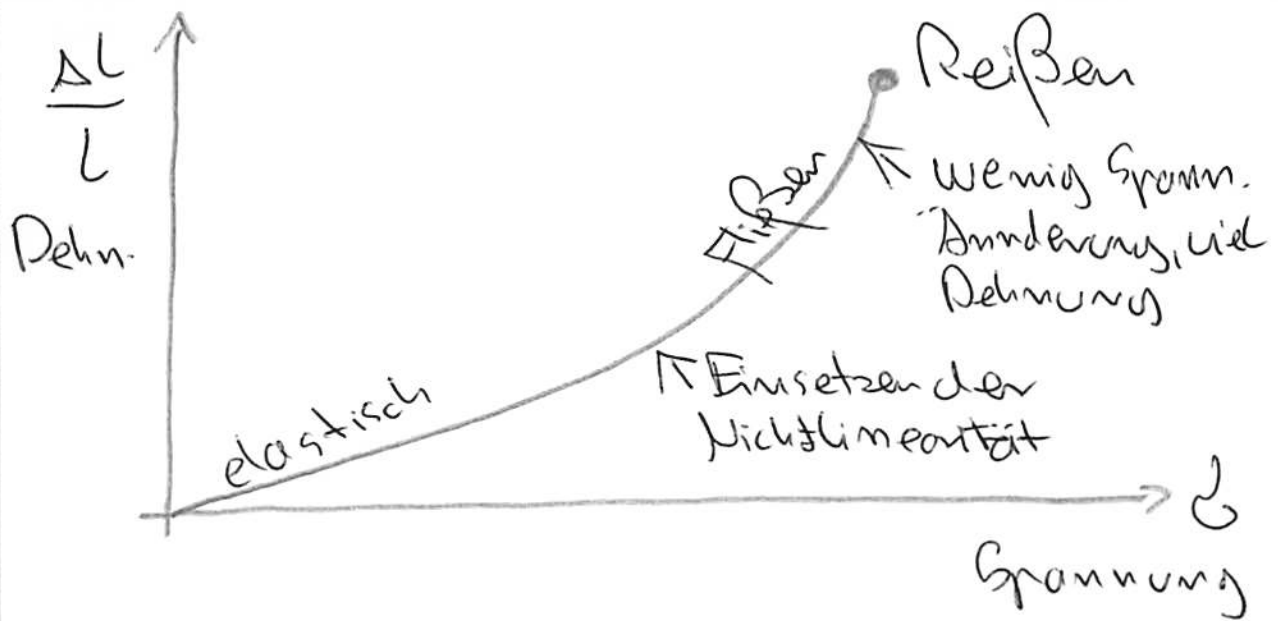
Material	E (N/mm^2)	μ	G (N/mm^2)	C_s (N/mm^2)
Al	74000	0.34	75000	27000
Cu	125000	0.35	143000	46000
Fe	218000	0.28	161000	83000
Glas	60000	0.25	50000	25000
typisch	10^5	0.3	10^5	$0.5 \cdot 10^5$

erstaunlich: Festkörper sind in ihren Materialeigenschaften sehr ähnlich.

DEMO: Al-Feder und Glasfeder

Diese Tatsache gilt aber nur im elastischen Bereich!

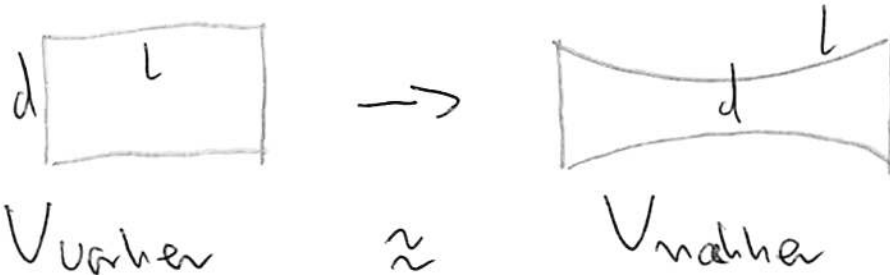
DEMO: Reißen eines Kupferdrahtes



Was passiert, wenn sich die Länge vergrößert, bleibt das Volumen konstant?

DEMO: Werkstück

→ Wertgehende Erhaltung des Volumens!



Phänomenologische Beziehung der Änderung von Quer- und Längsdimensionen

$$\frac{\Delta d}{d} = -\mu \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

↑ quer ↑ entgegengesetzt! ↑ Längs
Poisson-Zahl

Diese lineare Beziehung ist eine Näherung.

$$\mu \approx \frac{1}{3} \text{ (Tabelle)}$$

Unter Vernachlässigung quadratischer Terme läßt sich die resultierende Volumenänderung berechnen:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{\Delta L}{L} \underbrace{(1 - 2 \cdot \mu)}$$

0 für $\mu = 0.5$

etwa $1 - 2 \cdot 0.3 = 0.4$

Wegen des linearen Zusammenhanges zwischen $\Delta L/L$ und σ :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{E} \cdot \sigma \cdot (1 - 2 \cdot \mu)$$

üblich:

$\frac{\Delta V}{V}$	$=$	$\frac{1}{Q}$	$\cdot$	σ
$\uparrow$				
Def.			$\uparrow$	Kompressionsmodul

Q in Tabelle

Nun: Was passiert bei Tangentialspannungen?

DEMO: Schaumstoff

→ Scherwinkel

Für kleine Scherwinkel gilt ebenfalls eine lineare Zusammenhang

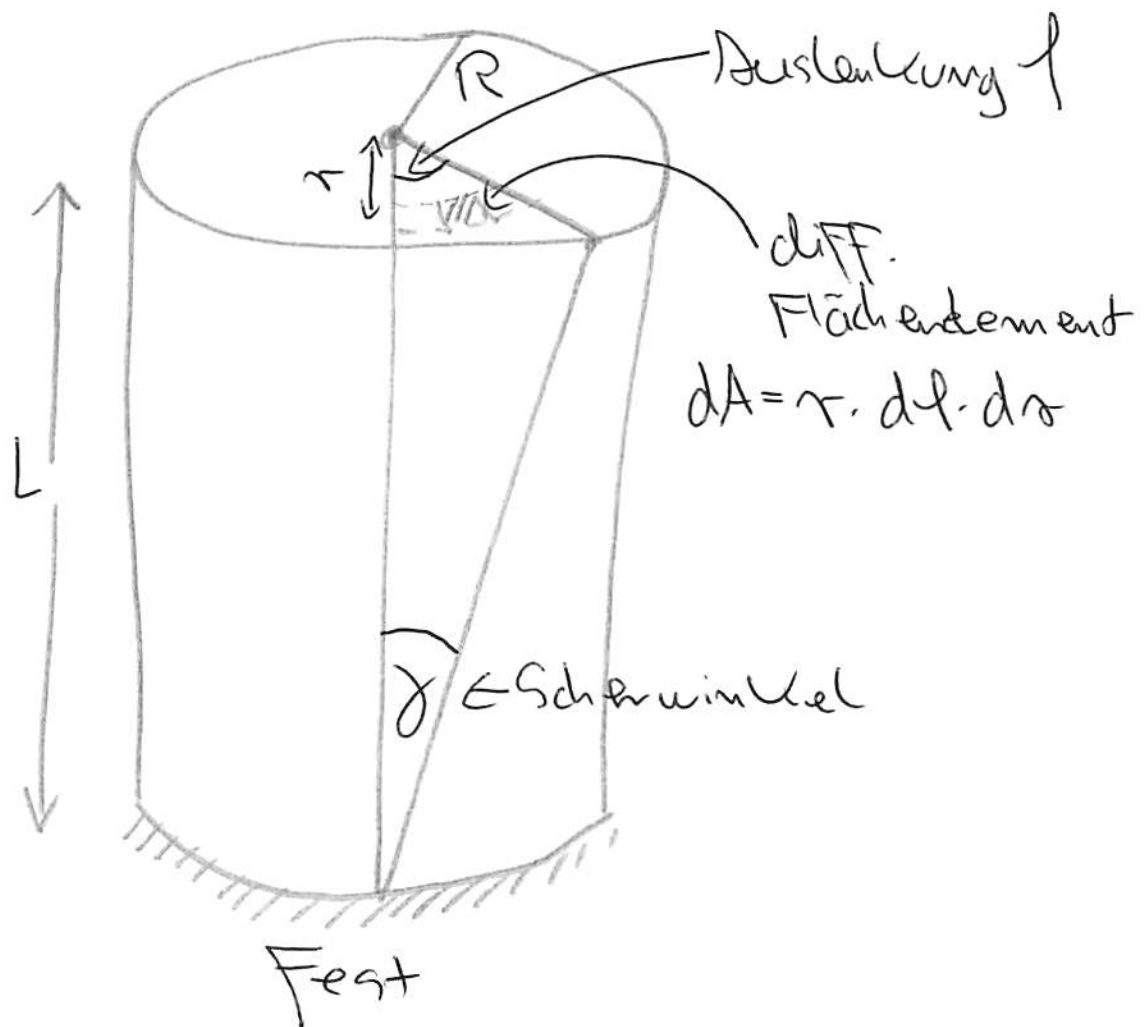
$$\gamma = \frac{1}{G} \cdot \tau$$

↑ Schermodul
Schermodul

Scher-
winkel

Wichtige Anwendung:

"Torsion von Drähten"



$$\tau = G \cdot \gamma$$

$$= G \cdot \frac{r \cdot \varphi}{L}$$

Also: resultierende Tangentialkraft:

$$dF_t = \tau \cdot dA$$

$$= \tau \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr$$

$$= G \cdot r^2 \cdot \frac{\varphi}{L} \cdot dr \cdot d\varphi$$

F_t verursacht ein rücktreibendes Drehmoment:

$$dM = dF_t \cdot r$$

$$= G \cdot r^3 \cdot \frac{\varphi}{L} \cdot dr \cdot d\varphi$$

2-fache Integration

$$M = \int dM = \int_0^R \int_0^{2\pi} G \cdot r^3 \cdot \frac{\varphi}{L} \cdot dr \cdot d\varphi$$

$$= \frac{\pi \cdot G \cdot R^4}{2 \cdot L} \cdot \varphi$$

Hooke'sches Gesetz

→ extreme R-Abhängigkeit !

DEMO: 2 verschiedene Drähte

2.3.2. Ruhende Flüssigkeiten und Gase

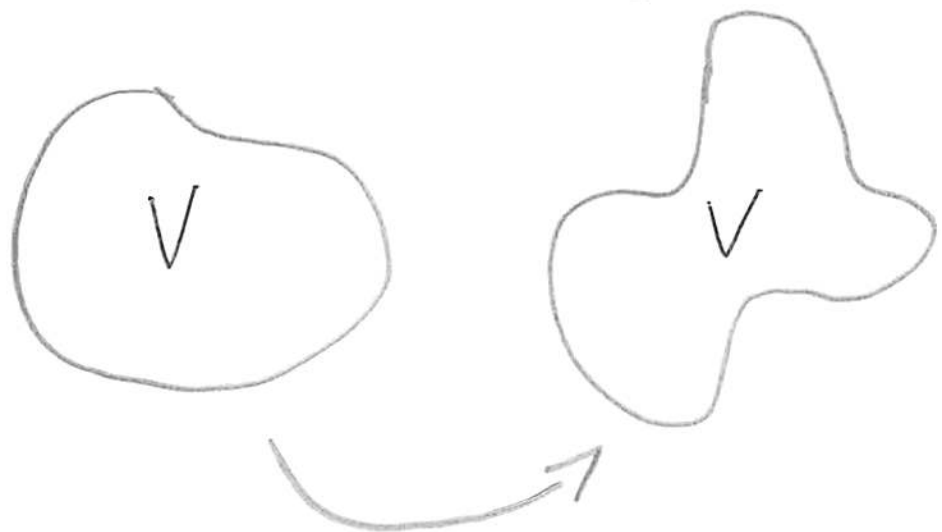
① Flüssigkeiten

- (Fast) Keine Formelastizität
- hohe Volumenelastizität
- (Fast) Keine Schubspannung

DEMO: Glycerinfaden

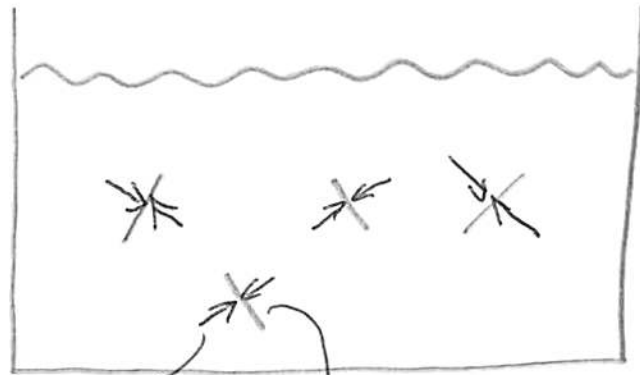
- (Fast) freie Verschiebbarkeit der Flüssigkeitsteilchen

↳ aber: Hinweis auf
"innere Reibung"



Wenig mechanische
Arbeit

Wir betrachten hier den "statischen"
Fall $\rightarrow$ ruhende Flüssigkeiten $\rightarrow$
Flüssigkeitsteilchen nicht in Bewegung



beliebig orientierte
Flächen (gedacht)

Normalkräfte auf diese Flächen
müssen sich ausgleichen $\rightarrow$ sonst
wäre die Flüssigkeit in Bewegung

Freie Verschieb-
barkeit!

Trotzdem können wir den Betrag
dieser Normalkräfte bestimmen!
(auch wenn sie sich ausgleichen...)

Def. Hydrostatischer Druck

↑
ruhende Flüssigkeit

$$p = \frac{\text{Normalkraft auf beliebige Fläche}}{\text{Fläche}}$$

↑
engl.: pressure

Skalar!

Einheit: $1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Pa (Pascal)}$

(Blaise Pascal, 1603 - 1662)

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 10 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$$

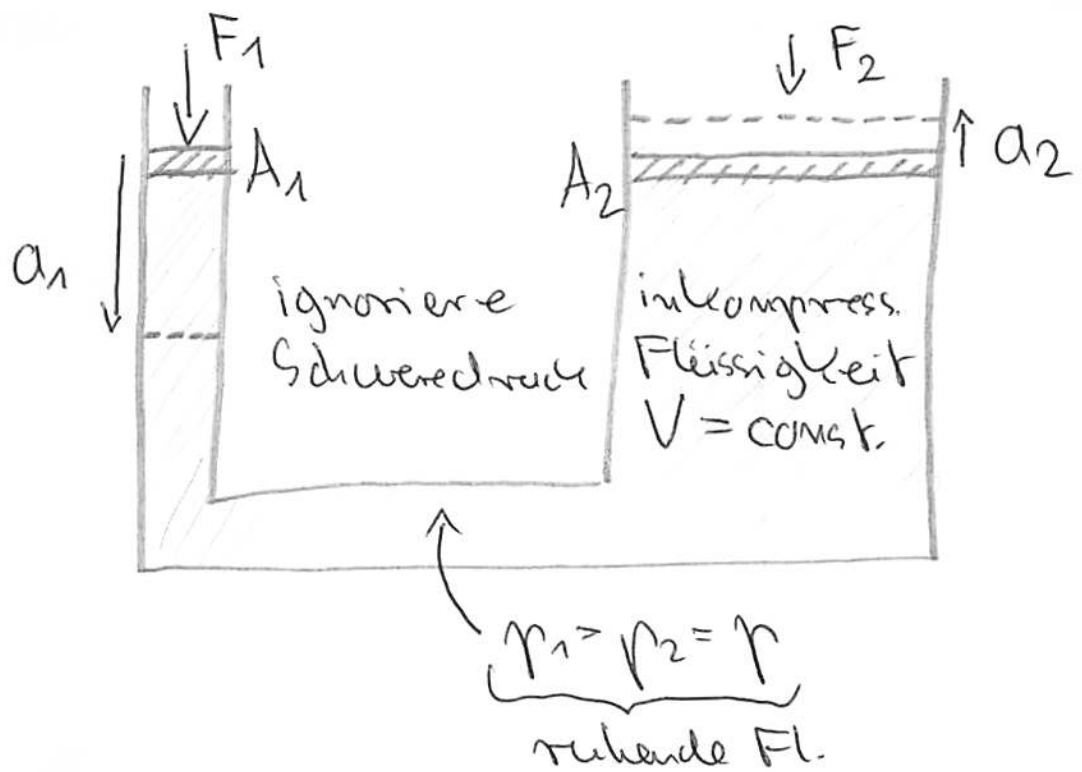
(weitere werden folgen...)

Woher kommen eigentlich die Normalkräfte?

2 Gründe:

- Eigengewicht der Flüssigkeit
↳ Schweredruck
- Äußere Kräfte (→ Stempel, Kolben)

Anwendung: Hydraulische Presse:



F_1 trägt $F_2 \leftarrow$ Last

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \rightarrow F_2 = F_1 \cdot \frac{A_2}{A_1} \left. \vphantom{\frac{A_2}{A_1}} \right\} \text{groß}$$

↑
groß

↑
klein

DEMO Spritzen

geleistete Arbeit:

$$W_1 = F_1 \cdot a_1$$

$$W_2 = F_2 \cdot a_2$$

$$= \frac{F_1}{A_1} \cdot A_1 \cdot a_1$$

$$= \frac{F_2}{A_2} \cdot A_2 \cdot a_2$$

$$= p \cdot V$$

$$= p \cdot V$$

$$V = \text{const}$$

p überall gleich

Bei Flüssigkeiten machen relative Längenänderungen keinen Sinn, daher:

$$\frac{\Delta V}{V} = - \kappa \cdot \Delta p$$

↑ ↑
Volumen- Kompressibilität
reduktion

κ ist für alle Flüssigkeiten sehr klein, z.B.

$$\left. \begin{array}{l} \text{H}_2\text{O}: 5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1} \\ \text{interessant:} \\ \text{Al}: 1,4 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}^{-1} \end{array} \right\} \text{ähnlich!}$$

DEMO Film: Schuß durch Kiste

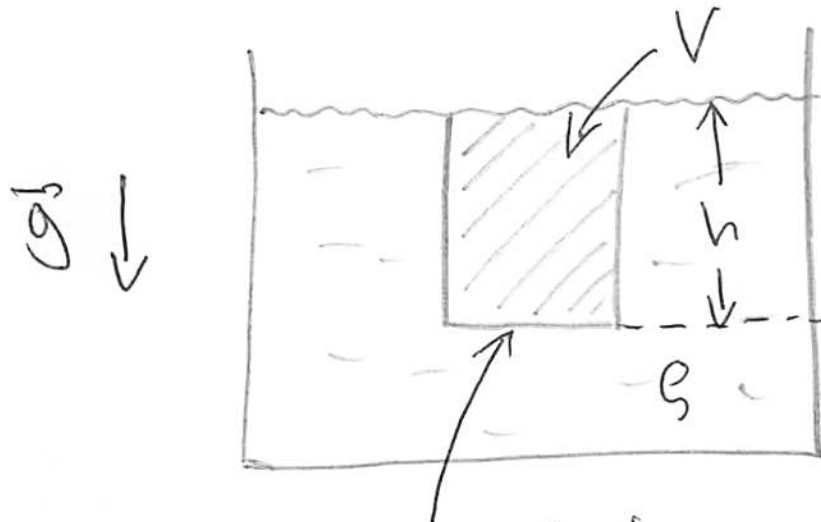
Zahlen:

$$V_{\text{Kiste}} \approx 1000 \text{ cm}^3, V_{\text{Kugel}} \approx 0,1 \text{ cm}^3$$

$$\Delta p = \underbrace{\frac{1}{\kappa}}_{\text{Betrag}} \cdot \underbrace{\frac{\Delta V}{V}}_{\substack{\text{riesig} \\ \text{winzig}}} = \underbrace{2 \cdot 10^9 \cdot 10^{-4}}_{\text{groß!}} = 2 \text{ bar}$$

Ein wichtiger Spezialfall ist der Druck im Schwerfeld $\rightarrow$ Schweredruck

Das Eigengewicht einer Flüssigkeit verursacht einen mit der Tiefe ansteigenden Druck:



Fläche A bei
konstanter Tiefe h

Flüssigkeitssäule über A :

$$F = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g$$
$$= \rho \cdot A \cdot h \cdot g$$

also hydrostatischer Schweredruck:

$$p = \frac{F}{A} = \rho \cdot g \cdot h$$

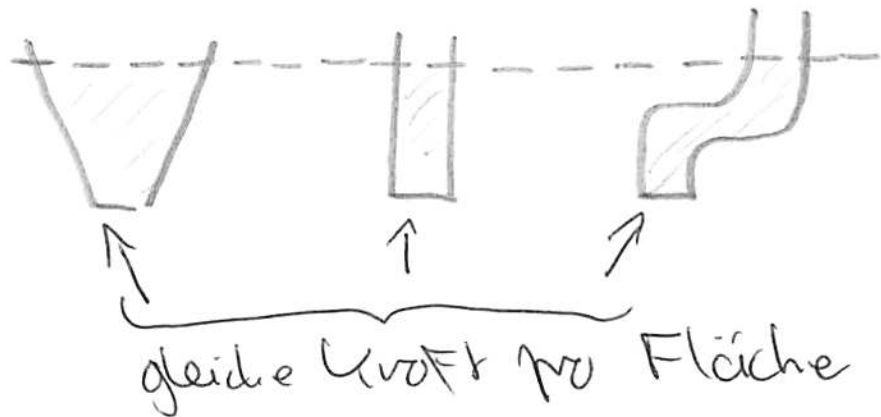
Im allgemeinen muß man noch einen äußeren Druck (z.B. durch ein Kolben) addieren:

$$p = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$$

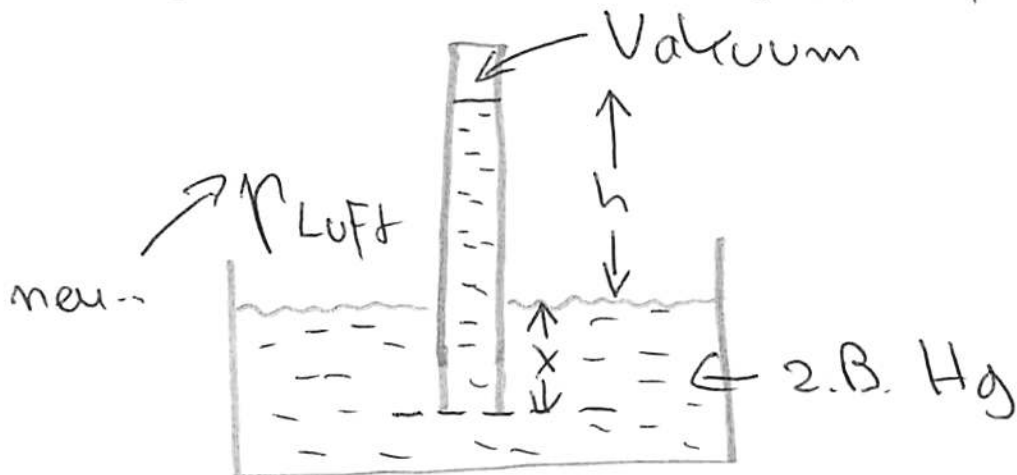
"Hydrostatischer Druck"

Wegen der freien Verschiebbarkeit der Flüssigkeitsteile ist der Druck unabhängig von der Form des Gefäßes:

DEMO: Hydrostatisches Paradoxon



Die h -Abhängigkeit des Druckes kann man zur Definition einer Druckeinheit verwenden. Dazu verwenden wir auch schon einmal den Luftdruck:



Statischer Fall:

$$p_{\text{Luft}} + \rho \cdot g \cdot x = \rho \cdot g \cdot h + \rho \cdot g \cdot x$$

also $p_{\text{Luft}} = \rho \cdot g \cdot h$

oder $\underbrace{r_{\text{Luft}} \sim h}$

Definition einer Einheit
"Barometerprinzip"

1 mm Quecksilbersäule = 1 Torr

1 Torr = 1.333 mbar

typischer Luftdruck:

760 mm Hg = 760 Torr = 1013 mbar

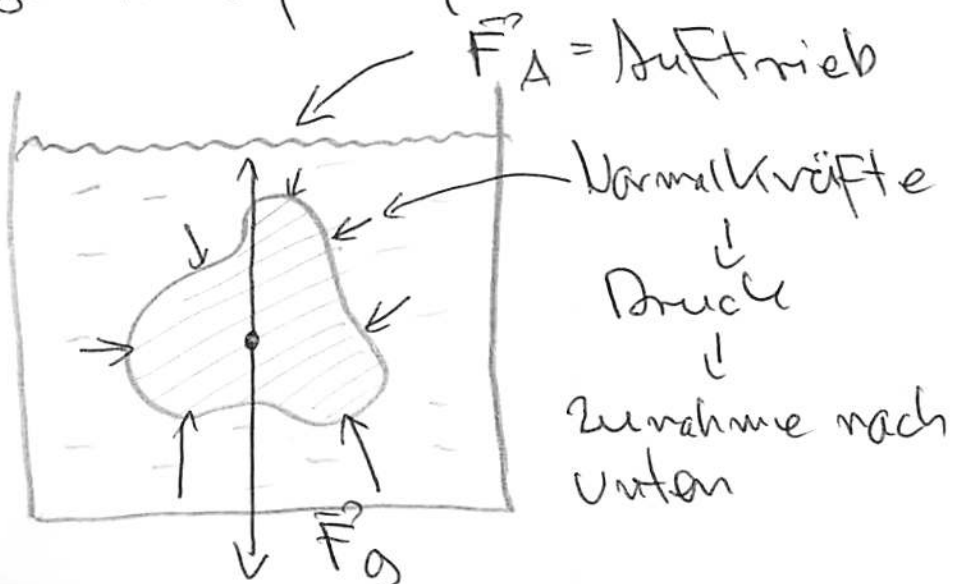
1 mm WS (Wasser) = 9.8 Pa

typischer Luftdruck: 10 m WS

nun eine wichtige Konsequenz
des Druckes:

"Auftrieb"

engl. "Buoyancy"



Die mit der Tiefe zunehmenden
Normalkräfte ergeben eine resultierende
gegen die Gravitation gerichtete Kraft

→ Auftrieb

Wie groß ist diese Kraft?

Nennen wir die Summe aller
Kräfte auf den Körper zunächst:

$$\vec{F}_{\text{Druck, Körper}}$$

Ist denken wir uns den Körper
ersetzt durch ein gleiches Volumen
Flüssigkeit, d.h. Flüssigkeit

$$\vec{F}_{\text{Druck, Körper}} = \vec{F}_{\text{Druck, Flüssigkeit}}$$

↑
Material des Körpers
spielt keine Rolle für die Kraft

Die gesamte Flüssigkeit ist im Ruhe

$$\vec{F}_{\text{Druck, Flüssigkeit}} = (-) \cdot \vec{F}_{g, \text{Flüssigkeit}}$$

also:

$$\vec{F}_{\text{Druck, Körper}} = (-) \vec{F}_{g, \text{Flüssigkeit}}$$

↑
Auftrieb!

↑
Achtung!

Archimedisches Prinzip:

Der Auftrieb eines Körpers ist gleich dem Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeitsmenge. Er hängt nicht von Form oder Material des Körpers ab!

$$\vec{F}_{\text{Auftrieb}} = - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Flüssigkeit!}}}{\rho} \cdot \vec{g} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Körper!}}}{V}$$

also:

$$\rho_{\text{Körper}} > \rho_{\text{FL}} \rightarrow \text{Sinken}$$

$$\rho_{\text{Körper}} = \rho_{\text{FL}} \rightarrow \text{Schweben}$$

$$\rho_{\text{Körper}} < \rho_{\text{FL}} \rightarrow \text{Schwimmen}$$

DEMOS:

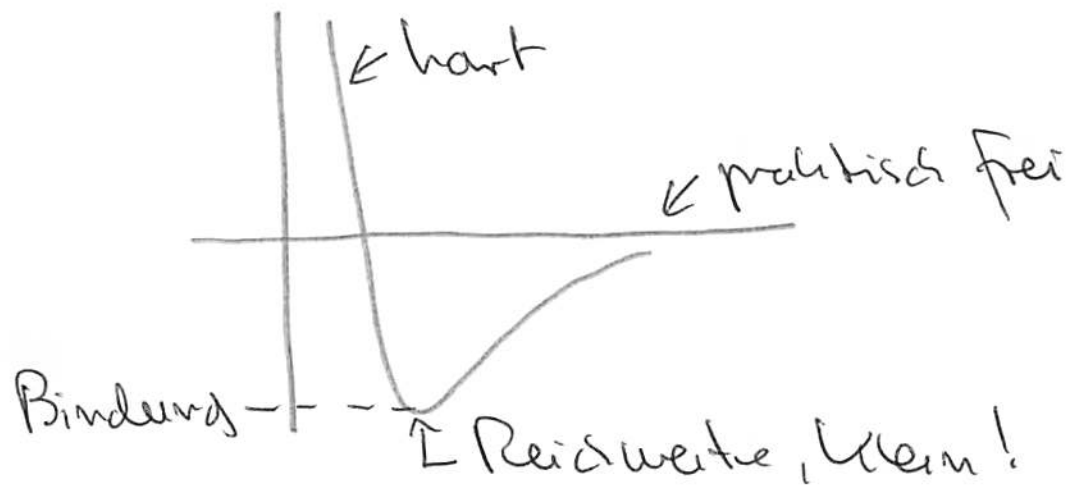
- Gewicht im Glas auf Waage
- Schwimmen
- Stabilität

Flüssigkeiten zeigen interessanterweise doch eine gewisse Formelastizität

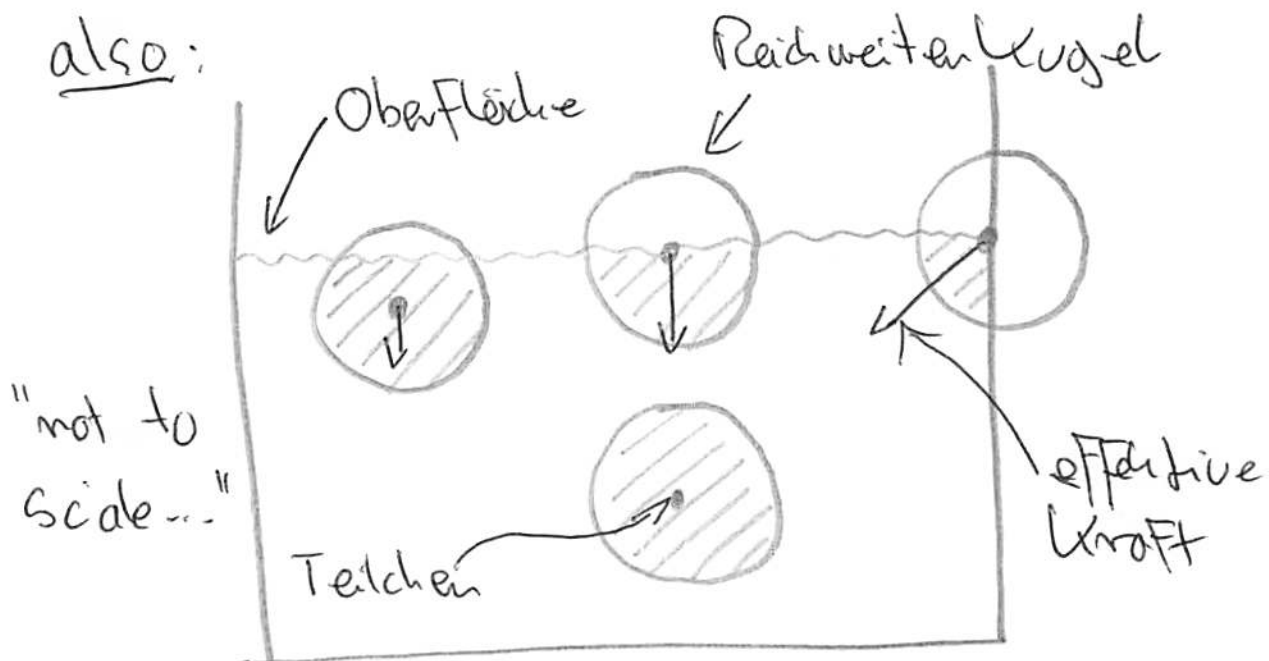
OEMO Tropfen

→ Oberflächenspannung

Erinnerung: Kräfte zwischen neutralen Flüssigkeitsteilchen:



also:



→ Teilchen nahe der Oberfläche (oder am Rand) haben eine zusätzliche pot. Energie!

→ Oberflächenspannung

→ Oberflächenenergie

Also: Es ist energetisch ungünstig, an der Oberfläche zu sein

↳ Oberfläche will minimal werden

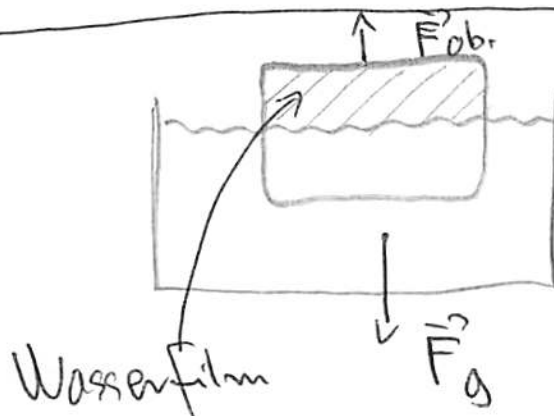
quantitativ:

$$\gamma = \frac{\text{Zunahme Oberflächenenergie}}{\text{Zunahme Oberfläche}}$$

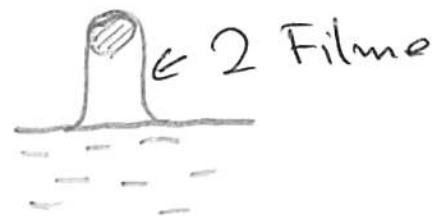
↑
↳ "Oberflächenspannung"

$$\text{Einheit: } 1 \frac{\text{Nm}}{\text{m}^2} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

DENO: Drahtbügelmethode



Seitenansicht:



Werte für γ (20°C):

Material	$\gamma \left(\frac{\text{N}}{\text{m}} \right)$
H ₂ O	0.073
Alkohol	0.022
Hg	0.491 ← !

DEMO: Quecksilberkugeln

Hinweis: Kernfusion

↳ Kernkräfte haben qualitativ die gleiche Struktur

Oberflächenspannung kann von außen beeinflusst werden.

- Verunreinigungen (z.B. Tenside)
- el. Felder

DEMOS:

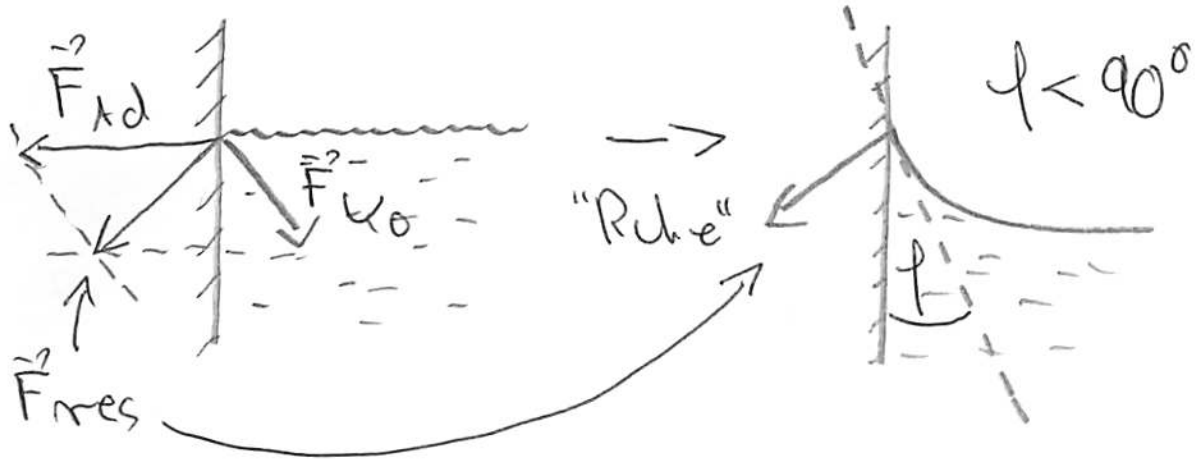
- Teezich (→ Tenside)
- Alkoholtropfen
- el. Felder (Absättigung der Kräfte)
↑ 6-7 kV

Effektive Kräfte treten auch an Grenzflächen zu anderen Körpern auf.

- Kräfte zwischen Teilchen einer Flüssigkeit → Kohäsion
- Kräfte zwischen Flüssigkeit und einem anderen Material → Adhäsion

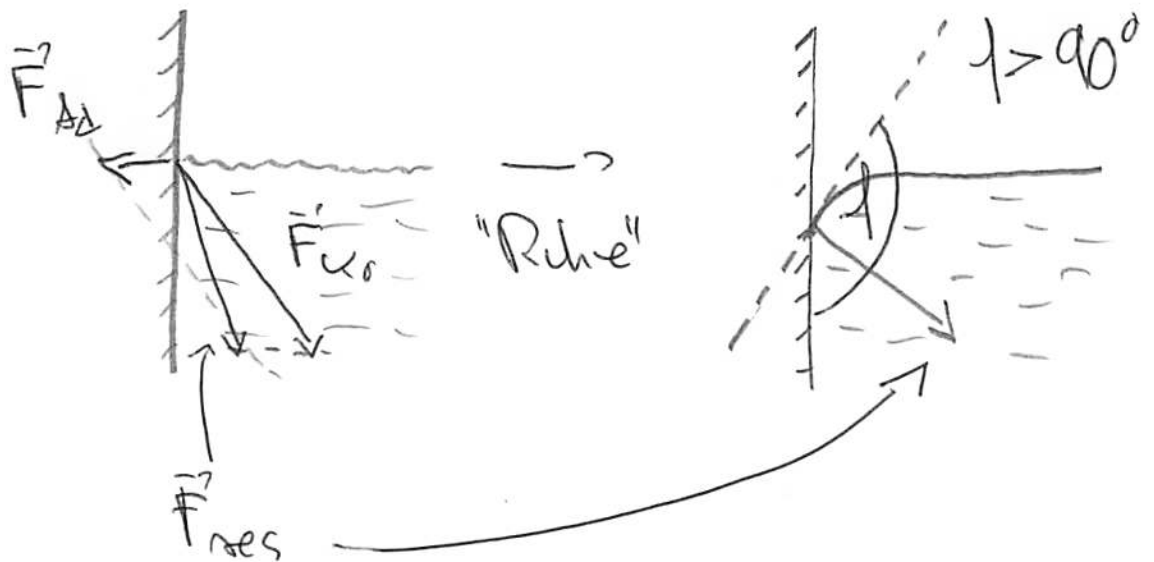
Es kommt nun darauf an, wer von den beiden "gewinnt":

a) Resultierende nach außen:



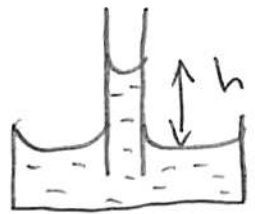
"benetzende Flüssigkeit"
→ typisch kleines φ

b) Resultierende nach innen

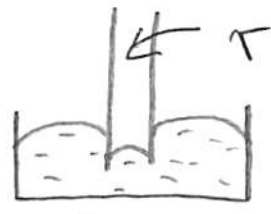


"nicht benetzende Flüssigkeit"
→ typisch großes φ

Bei kleinen Abständen der Wände kommt es zur "Kapillarwirkung"



$\varphi < 90^\circ$



$\varphi > 90^\circ$

Quincke (NF. von Kirchhoff in Heidelberg)
hat dafür folgende Gleichung
hergeleitet:

$$h = \frac{2 \cdot \gamma \cdot \cos \varphi}{r \cdot \rho \cdot g}$$

↑
Dichte der Fl.

DEMO: 4 Röhren mit Alkohol

Natur: Bäume

1 μm Kapillare, $\varphi = 0$ (Annahme),

$h = 15 \text{ m} \rightarrow$ offensichtlich nicht
die ganze Wahrheit...

2. Gase

Wesentlicher Unterschied:

Gase haben eine hohe
Kompressibilität!

DEMO: Kolbenspritze

Quantitative Messung DEMO

Resultat:

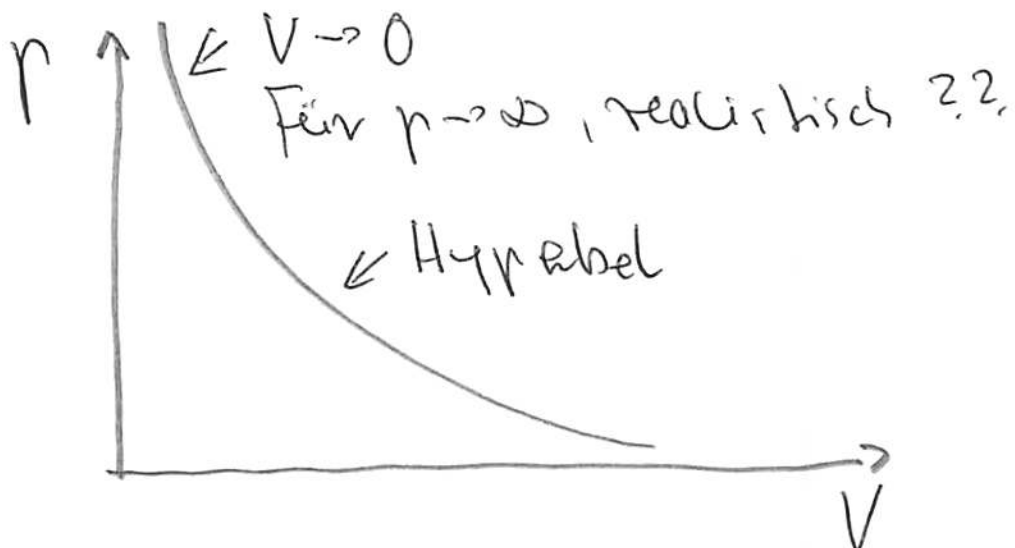
p	V	$p \cdot V$
2 bar	5	10
1 bar	10	10
0.66 bar	15	10
0.5 bar	20	10

↑
willkürliche
Einheiten

also: $p \cdot V = \text{const.}$ oder $p \sim \frac{1}{V}$

Gesetz von Boyle-Mariotte

$p \cdot V = \text{const.}$ ($T = \text{const.}$,
isotherm)

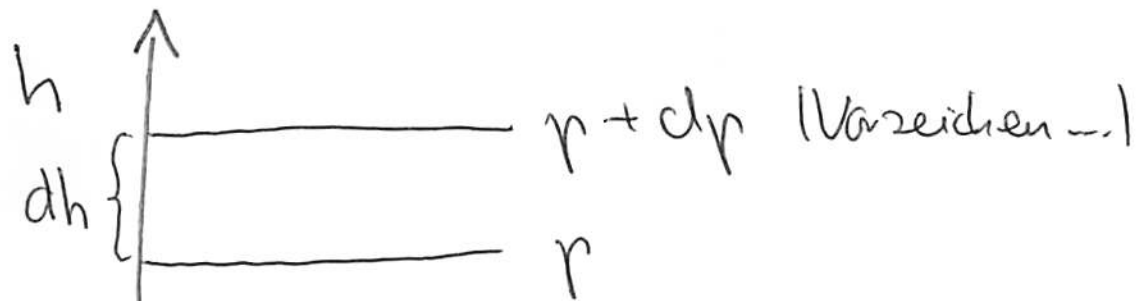


Robert Boyle (1627-1691)

Edme Mariotte (1620-1684)

Speziell: Gasdruck im Schwerfeld

→ Erdatmosphäre



$$0 + h=0, p=p_0, \rho=\rho_0$$

Offensichtlich nimmt der Druck mit der Höhe ab, verwende für dp den bekannten hydrost. Druck:

$$dp = - \rho(h) \cdot g \cdot dh$$

↑ neu, ρ ist nicht konstant!

Dazu sagt Boyle-Mariotte:

$$\frac{p(h)}{\rho(h)} = \frac{p_0}{\rho_0} = \text{const.}$$

$$\text{also: } dp = - p(h) \cdot \frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot dh$$

Das ist eine Differentialgleichung:

$$\frac{dp}{r} = - \underbrace{\frac{\rho_0 \cdot g}{\rho_0}}_{\text{const.}} \cdot dh$$

Integration:

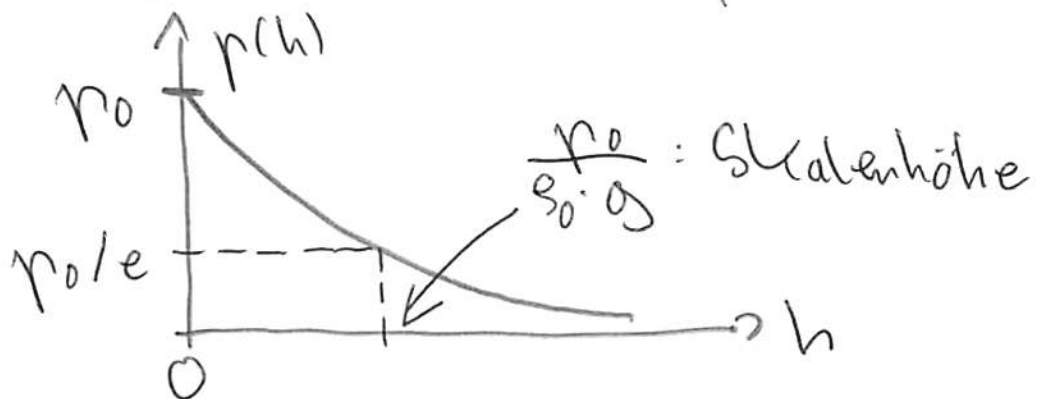
$$\int_{p_0}^{p(h)} \frac{dp'}{r'} = - \frac{\rho_0 \cdot g}{\rho_0} \cdot \int_0^h dh'$$

$$\ln \left(\frac{p(h)}{p_0} \right) = - \frac{\rho_0 \cdot g}{\rho_0} \cdot h$$

oder

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\left(\frac{\rho_0 \cdot g}{\rho_0}\right) \cdot h}$$

"barometrische Höhenformel"



Skalenhöhe: 7.8 km

"Dicke der Atmosphäre" $\sim 10 \text{ km}$

$p = \frac{1}{2} p_0$ bei 5.45 km

Space Shuttle: 200 km

merke:

1000 mbar (Luftdruck)

$\sim 10 \text{ N/cm}^2$

$\sim 1 \text{ kg} \cdot g / \text{cm}^2$

DEMOs:

- Magdeburger Halbkugeln
- Kanister
- Glas mit Karte

2.3.3. Bewegte Flüssigkeiten und Gase

- $\rightarrow$ Hydrodynamik
 - $\rightarrow$ Aerodynamik
- } eigene
} Spezialvorlesungen

Worum geht es?

$\vec{v}(x, y, z, t)$ Geschw.-Feld

$p(x, y, z, t)$ Druck-Feld

$\rho(x, y, z, t)$ Dichte-Feld

} Vektor
}
} Skalare

Wesentliche Fortschritte durch
Parallelrechner $\rightarrow$ Comput. Physics
Aber: Vereinfachende Annahmen
erlauben interessante Erkenntnisse.

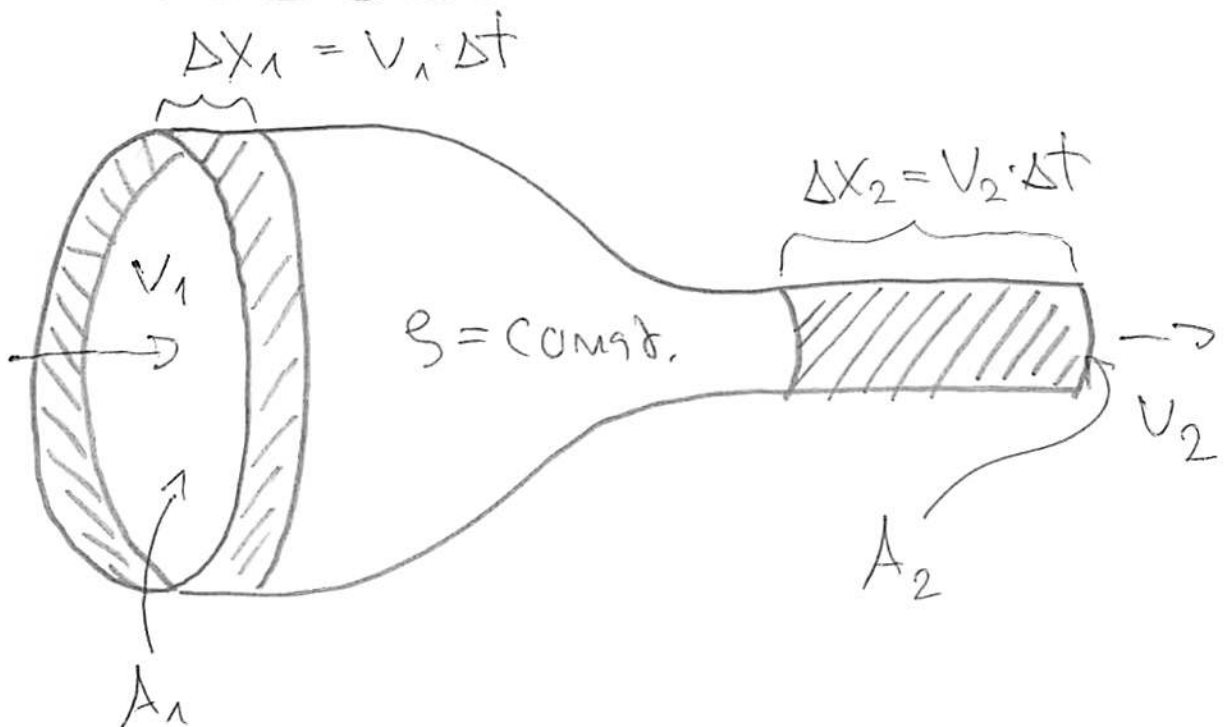
$\rho = \text{const.}$ für Flüss. und Gase

$\rho \neq \rho(p)$: In Kompressibilität

Weitere Annahme (zunächst):
Keine Schubkräfte (keine
innere Reibung)

Dann:

Kontinuitätsgleichung



pro Zeit Δt fließt durch A_1 die
Masse: $\Delta m = \rho \cdot A_1 \cdot \Delta x_1 = \rho \cdot A_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t$

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho \cdot A_1 \cdot v_1$$

Massestrom
(später mehr)

nun: Es wird im Inneren keine Masse erzeugt und es geht keine Masse verloren

- keine Quellen (quellfrei)
- keine Senken (senkenfrei)

dann:

$$\rho \cdot A_1 \cdot v_1 = \rho \cdot A_2 \cdot v_2$$

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$$

"Kontinuitätsgleichung"

DEMO: Wasserschlauch

Aus dieser Gleichung lernen wir:

Flächenänderung

↳ Geschwindigkeitsänderung

↳ Beschleunigung

↳ Kraft

↳ Arbeit

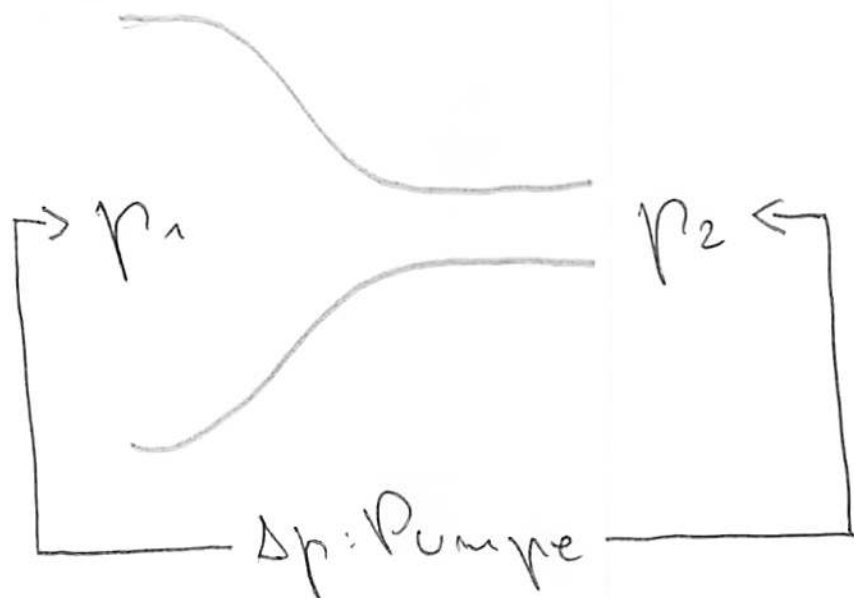
↳ Druckdifferenz

$$F \cdot dx = p \cdot dV$$

$$\text{Arbeit} = - \text{kin. Energie}$$

Arbeit gegen die Trägheitskraft

Wichtige Annahme: Keine Reibung!



$$\underbrace{p_1 \cdot A_1 \cdot \Delta x_1 - p_2 \cdot A_2 \cdot \Delta x_2}_{\text{Arbeit}} = \underbrace{\frac{\Delta m}{2} \cdot v_2^2 - \frac{\Delta m}{2} \cdot v_1^2}_{\text{kin. Energie (Änderung)}}$$

rel. Minuszeichen!

$$(p_1 - p_2) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Volumen}}}{\Delta V} = \frac{\Delta m}{2} \cdot \underset{\substack{\uparrow \quad \uparrow \\ \text{Geschwindigkeiten}}}{(v_2^2 - v_1^2)}$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho \cdot (v_2^2 - v_1^2)$$

oder

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2$$

das ist ein Erhaltungssatz

"Vorher" "nachher"

Energie!

(Keine Reibung...)

Aber: Formuliert durch Verwendung
des Druckes für die pot. Energie.

Wir wissen: Vielleicht gibt es auch
noch einen Schweredruck.

$$\underbrace{p + \rho \cdot g \cdot h}_{E_{\text{pot}}} + \underbrace{\frac{\rho}{2} \cdot v^2}_{E_{\text{kin}}} = \text{const.}$$

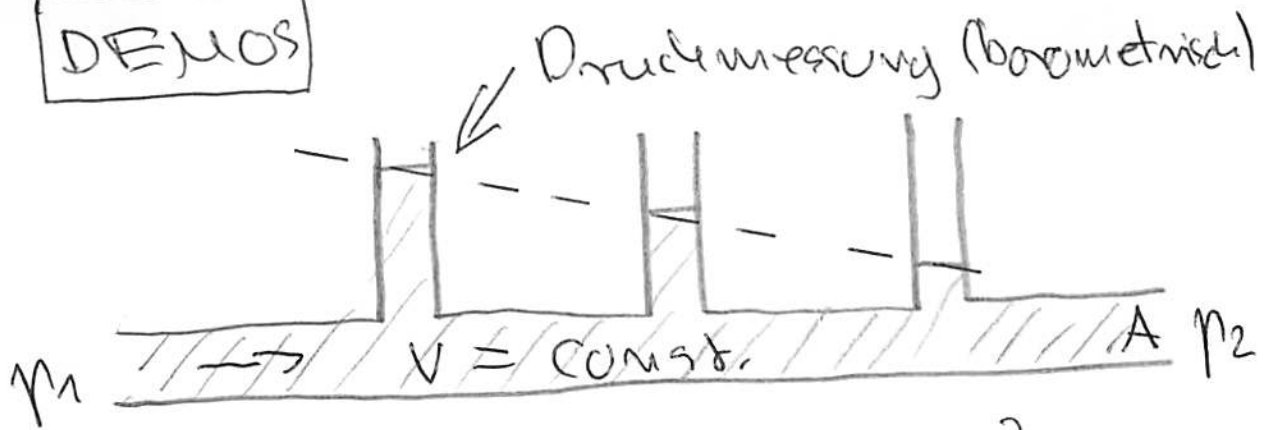
"Staudruck"

"dyn. Druck"

"Bernoulli-Gleichung"

(1700 - 1782)

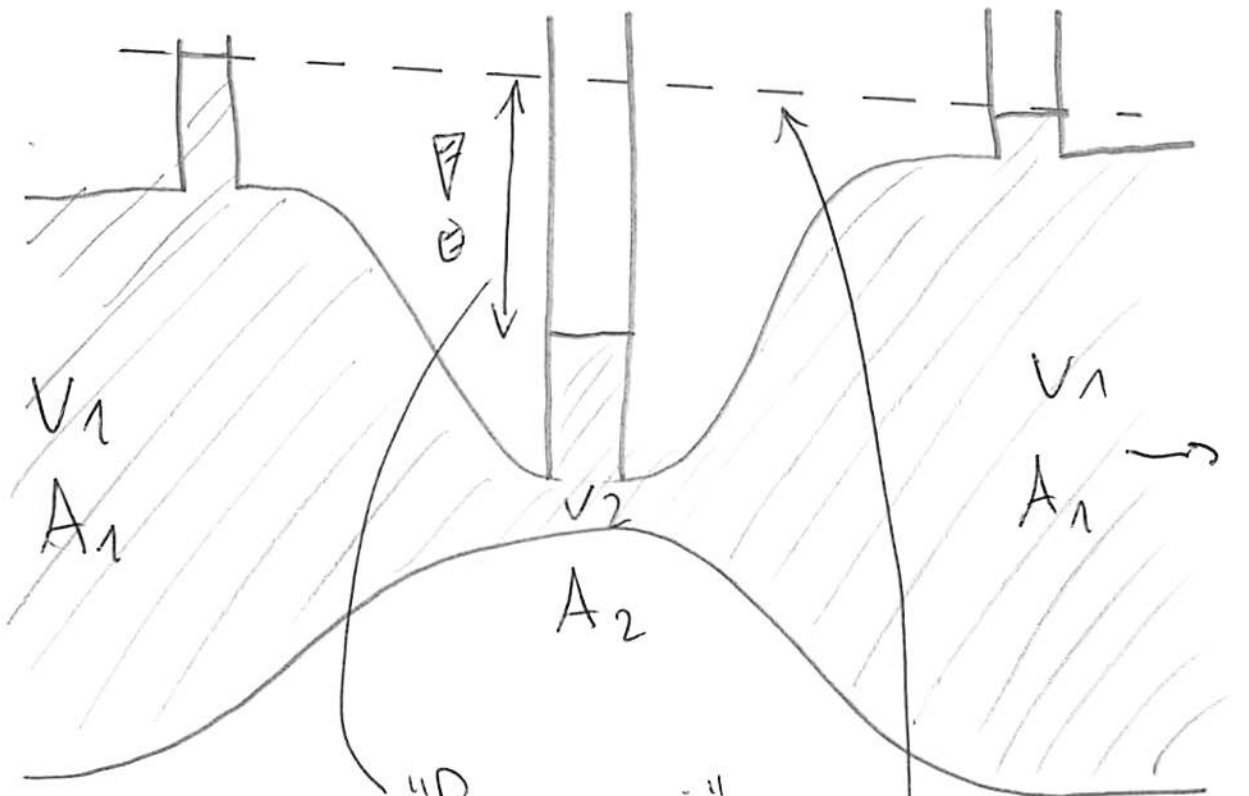
DEMOS



- $\rightarrow$ Keine Reibungsfreiheit ... !
- $\rightarrow$ Konstantes V erfordert Δp bei konstantem A

$\hookrightarrow$ Innere Reibung ...

Aber wir können einmal A ändern:



"Bernoulli"

Dyn. Druck

$$V_2 > V_1$$

wegen K.-Gleichung

erwartet durch
innere
Reibung

also wegen:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_2^2$$

und $v_2 > v_1$

ist $p_2 < p_1$

↑ geringe Steighöhe

DEMO Hydrostat. Paradoxon

a) Pressluft

b) Friedliche Version

DEMO Bälle im Luftstrom

Innere Reibung scheint doch eine gewisse Rolle zu spielen ...

Reibung: Mechanische Arbeit gegen dissipative (nicht konservative) Kräfte.

2 Konzentrate zur form. Beschreibung

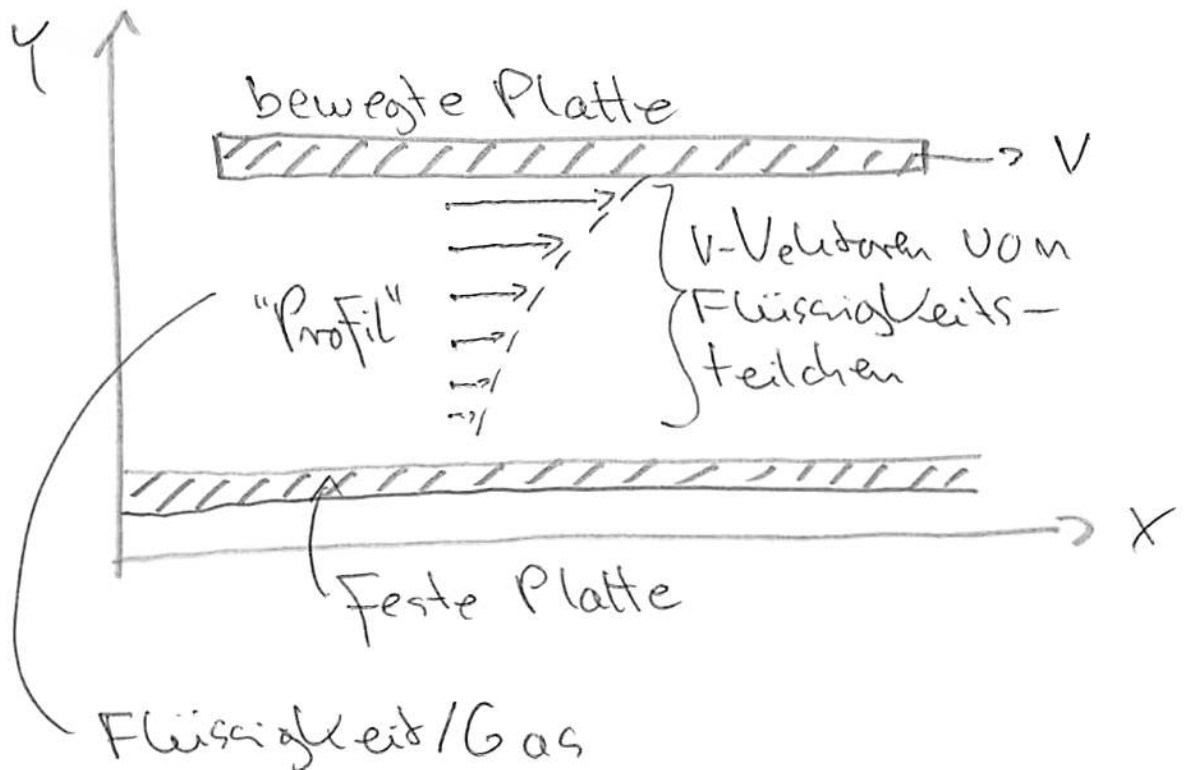
a) Verschieben von Flüssigkeitsschichten gegen innere Reibungskräfte
(→ kleine Geschwindigkeiten)

b) Transport von makroskopischen
Objekten durch eine Flüssigkeit/
Gas mit Turbulenzen
(→ große Geschwindigkeiten)

unädrer Fall a)

Schubkräfte zwischen Flüssigkeits-
schichten

laminare Strömungen
(lat.: Lamina = Blatt)



Schubkräfte erzeugen ein
Geschwindigkeitsprofil

DEMO: Glasstab im Glycerin

Profil

$$\frac{du_x}{dy}$$

Newton: Schubkraft ist prop. zur Änderung der Geschwindigkeit (und zur Größe der reibenden Fläche)

$$F_R \sim A \cdot \frac{du_x}{dy}$$

Profil Funktion

Offensichtlich muß das Material eine Rolle spielen!

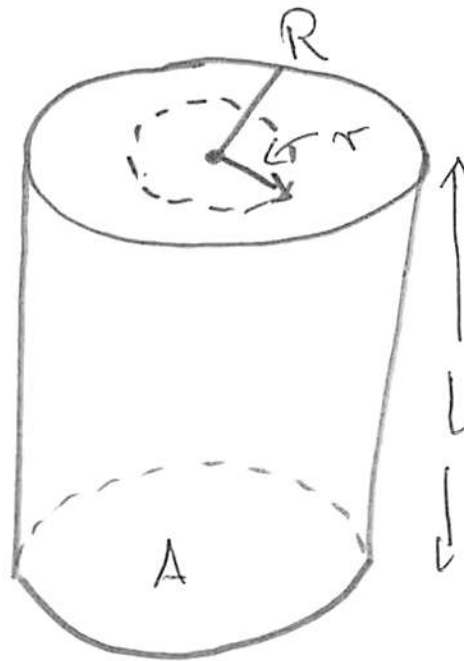
$$F_R = \eta \cdot A \cdot \frac{du_x}{dy}$$

↑ "Viskosität"
"Zähigkeit"

"Newtonsche Reibungsgesetz"

$$\text{Einheit } \eta: 1 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

Anwendung: Strömung durch
 zylindrisches Rohr
 (→ z.B. Betankung von Flugzeugen)



$$\frac{F}{A} = \eta \cdot \frac{dv}{dr} \quad \left. \vphantom{\frac{F}{A}} \right\} \text{Newton}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{\Delta p \cdot \pi \cdot r^2}{2\pi \cdot r \cdot L} \quad \left. \vphantom{\frac{F}{A}} \right\}$$

↳ Ursache der
 Strömung

gleichsetzen und integrieren: ($r \rightarrow R$)

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta \cdot L} \cdot (R^2 - r^2)$$

maximal für $r=0$!

↑
 "Paraboldoid" ↑

DEMO: eingefärbtes Glycerin

Wie viel Flüssigkeit fließt pro
 Zeit durch das Rohr?

$$dV = \underbrace{2\pi \cdot r \cdot dr}_{\text{Kreisring}} \cdot \underbrace{v(r)}_{\text{Kennen wir!}} \cdot dt$$

Integration:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi \cdot \Delta p}{8 \cdot \eta \cdot L} \cdot R^4 \leftarrow$$

Gesetz von Hagen-Poiseuille

Laminarer Durchfluß durch
ein zylindrisches Rohr:

$$\frac{dV}{dt} \sim R^4$$

↑ Volumenstrom

Eine interessante Größe ist die
mittlere Geschwindigkeit im Rohr:

$$\bar{V} = \frac{\text{Volumen pro Zeit}}{\text{Rohrquerschnitt}} = \frac{dV}{dt} \cdot \frac{1}{\pi \cdot R^2}$$

$$= \frac{R^2}{8 \eta \cdot L} \cdot \Delta p$$



$$\bar{V} \sim \Delta p$$

↑
Kompensation der Reibung
durch Δp

Konstante Geschwindigkeit

also: $F_{\text{Reibung}} \sim V$

Wichtige Erkenntnisse:

Bei laminaren Strömungen ist die Reibungskraft $\propto V$

Das haben wir schon in der Vergangenheit häufig genutzt!

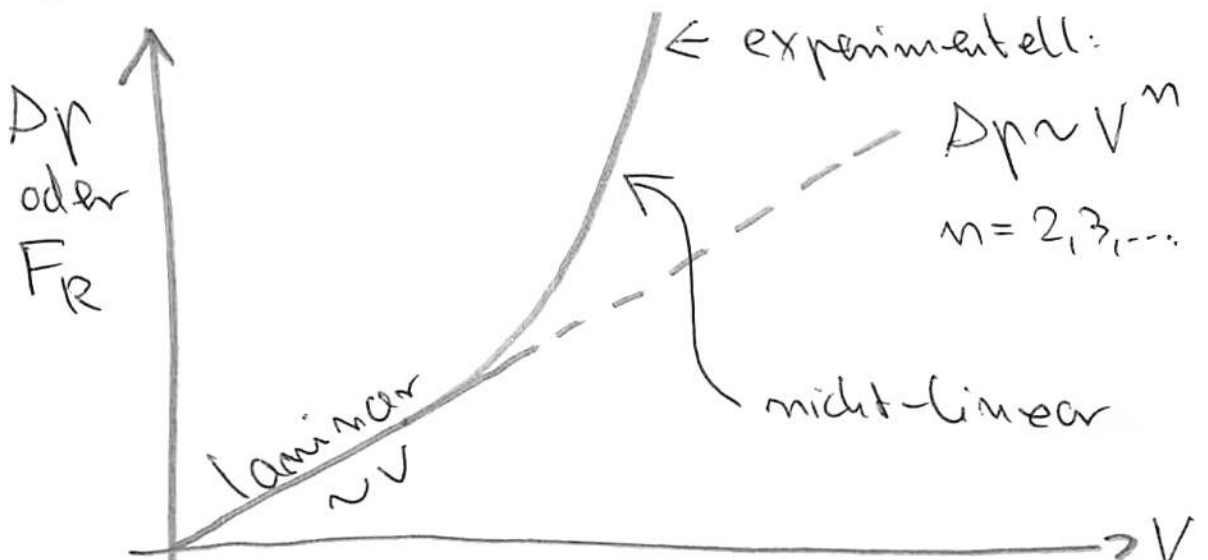
Speziell Bewegung einer Kugel durch ein ~~to~~ viskoses Medium:

$$F_{\text{Reibung}} = -6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot V$$

"Stokes-Reibung"
(ohne Beweis)

Radius
Kugel

also



→ laminare Beschreibung ist nicht mehr adäquat bei großen v

Fall b) unserer Reibungskonzepte

DEMO Stromfadenexperiment

→ Turbulenz: Strömungen nicht parallel zur Flußrichtung

Grund: Flüssigkeitsvolumina müssen transportiert werden

↳ "Ersetzung" von Volumina

↳ Beschleunigungsarbeit

$$\Delta p \sim \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \quad \uparrow \text{quadratisch}$$

Wo bleibt die geleistete Arbeit?

↳ Wirbel, Turbulenzen

Empirisch gilt dann für die schnelle Bewegung eines Körpers durch eine Flüssigkeit, bzw. ein Gas:

$$F_{\text{Reibung}} = -C_w \cdot \frac{\rho \cdot A \cdot v^2}{2}$$

C_w : Reibungsbeiwert
 $\hookrightarrow$ Körperform

A : Projektizierte Fläche (Bew. Richtung)

DEMO... Strömungsfäden

einige C_w -Werte

 ≈ 20

Bew.



 ≈ 8

 ≈ 25

 ≈ 1

3. Thermodynamik

Wichtiges Konzept der bisherigen Vorlesung:

"Erhaltung der Energie"

$$E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \text{const.}$$

↗ ↖
Kons. Kraft Trägheit

Offensichtlich ist dieser Er.-Satz dauernd verletzt!

DEMO

Dissipative Effekte

↓
Reibung

↓
Änderung d. Temperatur

↳ Was ist das?

Alltag: Klar, Uns fehlt aber eine reproduzierbare phys. Definition!

Konzept der Physik:

"Meßvorschrift"

DEMO: Händereiben

→ physiologische Empfindung
(Sensoren)

→ Wir brauchen etwas Besseres!

DEMOS: Wärmebildkamera Gasthermometer

Und was passiert mit dem Energiesatz?

Idee: Rette den Energiesatz durch
Einführung einer "inneren Energie"

Folie: Helmholtz / Mayer

Dann folgte ~~erfolg~~ eine gedankliche
Revolution, noch im Gedankengebäude
der Klassischen Physik:

Phänomenologie der Wärme (Kap. 3)

↓
Rückführung auf Newtonsche
Mechanik (Kap. 2)

↓
Verwendung der Statistik (Kap. 1)

Pionier: Ludwig Boltzmann

Berücksichtigung der inneren Energie
in der Energieerhaltung:

"1. Hauptsatz der Thermodynamik"

Dann etwas radikal Neues: Statistisch
formuliert Wahrscheinlichkeiten.

Prozesse, die energetisch möglich
sind passieren nicht, weil sie
unwahrscheinlich sind!

DEMO: Ball

3.1. Phänomenologische Grundlagen

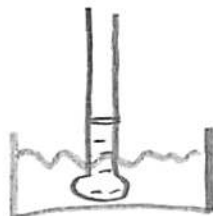
Experimentelle Beobachtung

"Wärmeausdehnung"

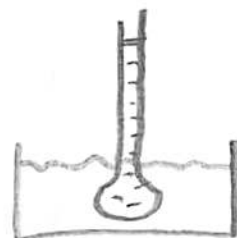
→ so ähnlich wie beim Druck / Kraft,
nur ist die Ursache eine andere

DEMO: Gasthermometer

Idee: Nutze diesen Effekt zur
physikalischen Definition der
Temperatur.



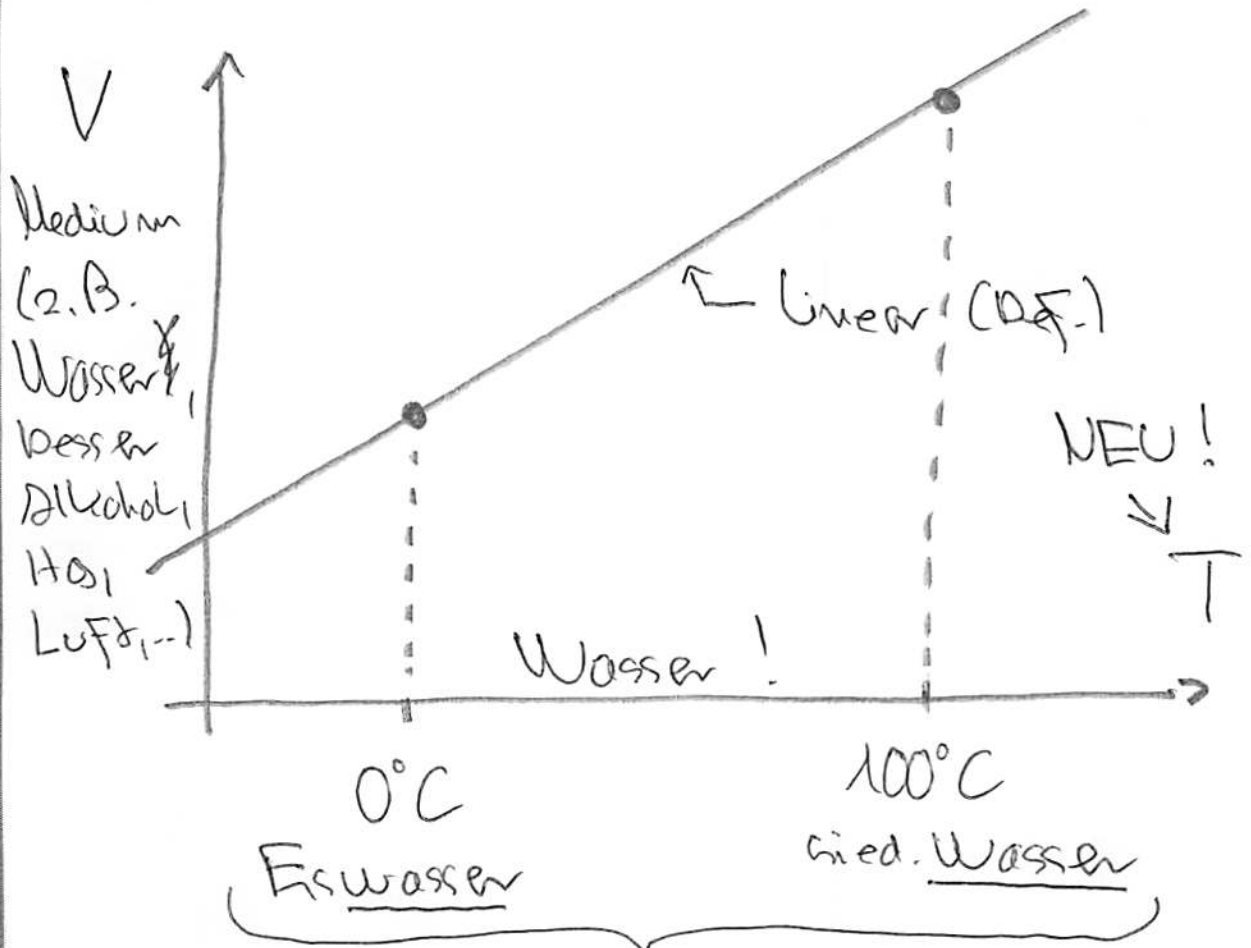
Eiswasser



Siedendes Wasser

DEMO

Durch die Beobachtung von "Phasen-
übergängen" ist dies für jeden
überall reproduzierbar!



definierte Einteilung
in 100 Skalenteile (Grad)

Anders Celsius (1701-1744)

quantitativ:

$$V(T) = V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot T) \quad (p = \text{const.})$$

T in °C (Grad Celsius)

$V = V_0$ (materialabhängig) bei $T = 0^\circ\text{C}$

T kann pos. oder neg. sein

Bei den "meisten" Gasen (als
Thermometermedium) macht man
eine bemerkenswerte Beobachtung:

$$\alpha \approx \frac{1}{273.16^\circ\text{C}}$$

Dann:

$$\underbrace{V(T)=0}_{\text{minimales Volumen}} \text{ für } \alpha \cdot T = -1$$

oder

$$\underbrace{T(V=0)}_{\text{minimale Temperatur}} \approx -273.16^\circ\text{C}$$

minimale Temperatur

(Kommentar: maximaler Druck)

Diese Beobachtung legt die Definition
einer vom Wasser unabhängigen
Temperaturskala nahe:

"absolute Temperatur"

"thermodynamische Temperatur"

$$0\text{ K} = -273.16^\circ\text{C}$$

Einheit: 1 K (Kelvin)

Unterteilung in Gradsschritte
bleibt erhalten.

Die absolute Temperatur ist immer positiv.

Unser Gesetz für die Gasausdehnung sieht nun viel einfacher aus:

$$V(T) = V_0 \cdot \alpha \cdot T \quad (p = \text{const.})$$

$$V = V_0 \text{ bei } T = 273.16 \text{ K}$$

also:

$$V \sim T$$

Achten Sie immer auf die Verwendung der richtigen Temperaturskala!

(im Mikroskop und im Leben ...)

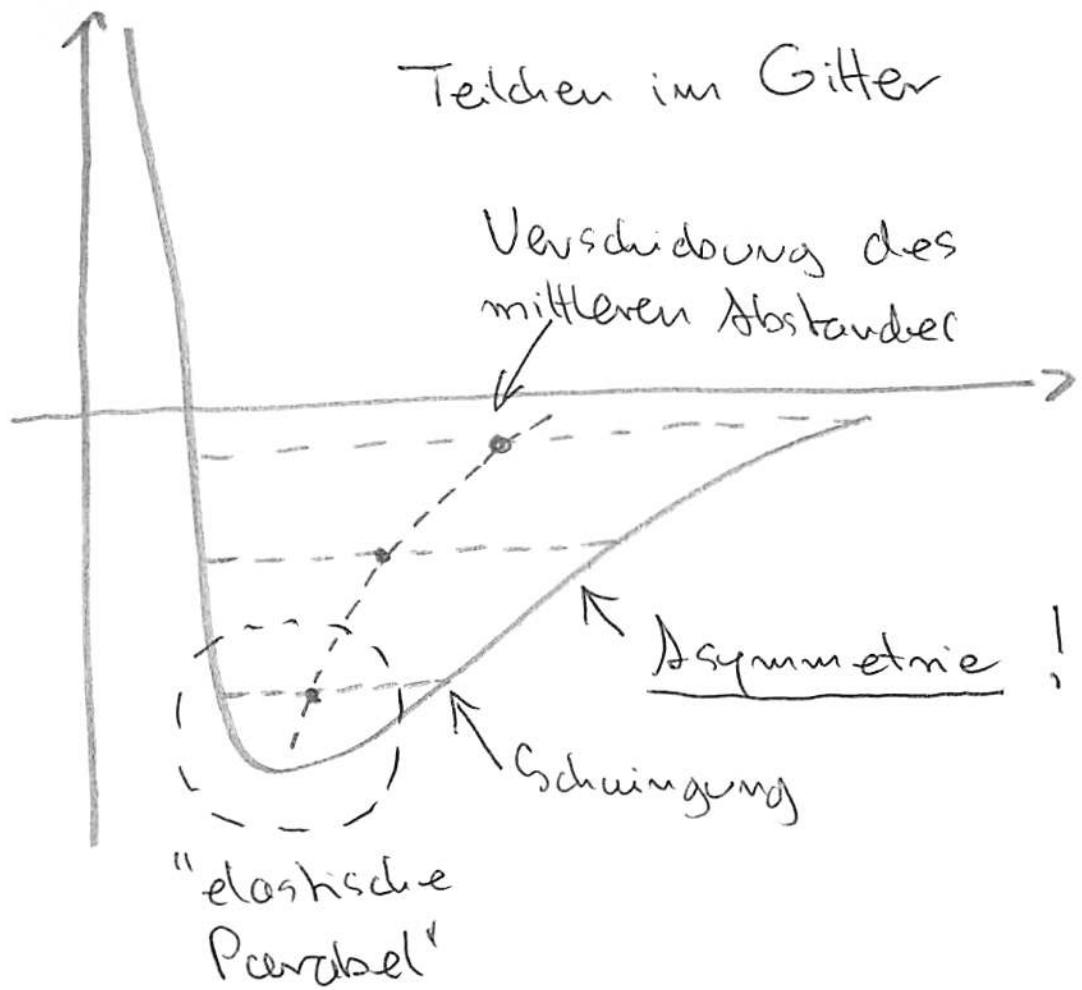
Warum dehnen sich Gase aus?

↳ Vergrößerung der Teilchenabstände
ohne starke Bindung

Auch Festkörper dehnen sich aus!

DEMO: Sprengbolzen, heißer Draht

Erklärung?



→ thermische Kräfte sind groß!
 (→ Bolzen Experiment)

Festkörper → Längenskalen

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha \cdot \Delta T$$

oder

$$L = L_0 + L_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

$$= L_0 (1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

α : therm. Ausdehnungskoeff.

Bei Flüssigkeiten: Volumenausdehnung

DEMO Wasserkocher

Nun: Bemerkungen zur Beschreibung
von Stoffmengen

Wichtig: Bezug zur Mikrowelt

Def: Atomare Masseneinheit

$\frac{1}{12}$ Masse des C-Atoms vom
vom Typ ^{12}C ($6p + 6n + 6e$)

Bezug zu Proton, Neutron, Nukleon
und Elektron:

$$\begin{array}{lcl} 1u : 1.661 \cdot 10^{-27} \text{ kg} & \left. \begin{array}{l} 1p : 1.672 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \\ 1n : 1.675 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Mittelwert} \\ 1.6735 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \end{array} & \leftarrow \\ 1e : 9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg} & \uparrow & \\ & \text{extrem} & \\ & \text{klein!} & \end{array}$$

↳ Verschieden!

Ein Atom wiegt weniger, als die
Summe seiner Bestandteile
→ "Bindungsenergie", $E = m \cdot c^2$

Def. 1 Mol ist die Stoffmenge
einer Substanz, die genau so
viele Teilchen (Atome/Moleküle)
enthält wie 12 g ^{12}C

näherungsweise:

Ein Mol einer Substanz enthält
A Gramm, A: Massenzahl

(näherungsweise?
↳ m/p-Verhältnis
Bindungsenergie für versch. A)

Damit können wir berechnen, wie
viele Teilchen in einem Mol sind:

$$N_A = \frac{10^{-3} \text{ kg}}{1 \text{ u}} = 6.022 \cdot 10^{23}$$

merke fürs Leben:

N_A : Avogadro-Zahl

(= Loschmidt Konstante)

↳ technisch gesehen etwas
anderes ...

$\approx 6 \cdot 10^{23}$ Teilchen / Mol

witzig: Etwa 10^{23} Sterne im
Universum ...

Nun aber zurück zur Thermodyn.

Def: Eine Zustandsgröße

beschreibt die makroskopischen Eigenschaften eines Systems.

Gleichungen aus Zustandsgrößen heißen Zustandsgleichungen

Beispiele: p, V, T, n

↑ Anzahl d. Mole

Wir hatten experimentell gefunden (Gase!)

$$p \sim \frac{1}{V} \text{ (Boyle-Mariotte) } (T = \text{const.})$$

$$V \sim T \text{ (Gay-Lussac) } (p = \text{const.})$$

Man kann auch noch eine dritte Beziehung überprüfen:

$$p \sim T \text{ (V = const.)}$$

Damit:

$$\frac{p \cdot V}{T} = \text{const.}$$

→ jedenfalls, so lange es nicht noch andere Abhängigk. Verhältnisse gibt...

und, was bedeutet "const."?

wähle z.B.

$$\begin{cases} p_0 = 1,01325 \text{ bar} = 760 \text{ Torr} \\ T_0 = 273,16 \text{ K} \end{cases}$$

↳ Def. "Normalbedingungen" (NTP)

dann: Messe V_0 für eine vorgegebene Stoffmenge bei "einem Gas"

$$\text{finde: } V_0 = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot n$$

↑
Stoffmenge

$$= 22,4 \text{ Liter} \cdot n$$

"Molvolumen" für
"viele" Gase

Also:

$$\underbrace{\frac{p_0 \cdot V_0}{T_0}}_{\text{NTP}} = \underbrace{\frac{p \cdot V}{T}}_{\text{beliebig}} = n \cdot \underbrace{8,3146 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{Mol}}}_{\substack{\text{R: allg.} \\ \text{Gaskonstante}}}$$

↑
Stoffmenge

↙ Energie!

damit:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

"ideale Gasgleichung"

$$R = 8.3146 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{mol}}$$

"universelle Gaskonstante"

"Zustandsgleichung für ideale Gase"

Def. Ideales Gas:

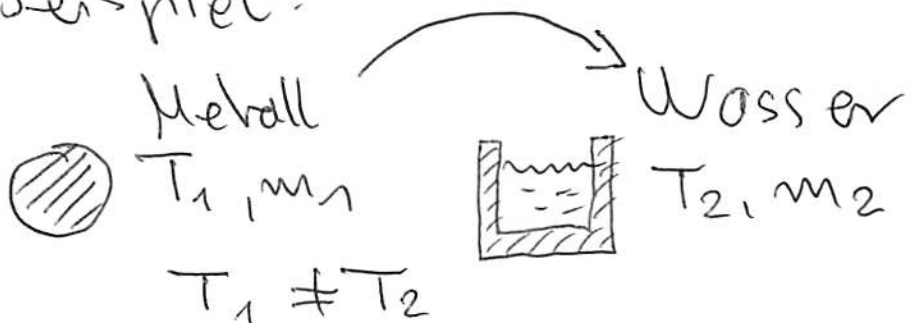
Ein Gas, welches dieser Zustandsgleichung genügt
(später: Relation zur Mikrowelt)

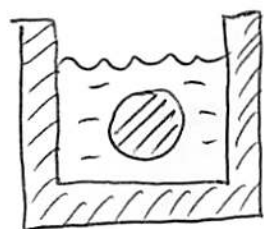
Jetzt kommt eine wichtige Beobachtung

"Thermodyn. Gleichgewicht"

Def. Thermodyn. Gleichgewicht herrscht, wenn sich die Zustandsgrößen als Funktion der Zeit nicht ändern

Gegenbeispiel:





T_1
 T_2

T (Mischtemperatur)
 ↑
 therm. Gleichgewicht

Wenn $T_1 > T_2$, dann kühlt sich das Metall ab und das Wasser erwärmt sich. Viel Masse hat dabei viel Einfluß:

$$\underbrace{(T_1 - T)}_{\substack{\text{Abkühlung} \\ \Delta T_1}} \cdot m_1 \sim \underbrace{(T - T_2)}_{\substack{\text{Erwärmung} \\ \Delta T_2}} \cdot m_2$$

T-Skala egal!

Für eine Gleichung benötigen wir nun 2 Materialkonstanten:

$$c_1 \cdot (T_1 - T) \cdot m_1 = c_2 (T - T_2) \cdot m_2$$

Die Größe

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta T$$

bezeichnen wir als "Wärmemenge" oder kurz "Wärme". Sie bezeichnet eine phys. Größe, die transportiert werden muß,

um die Temperatur eines
Körpers zu ändern.

Zunächst hat Q keinen Bezug
zu uns bekannten phys. Größen.
Wir geben ihr deshalb eine
neue, willkürliche Einheit:

1 cal (Kalorie)

Meßvorschrift:

$Q = 1 \text{ cal}$ erwärmt 1g Wasser
um 1 Grad

Auch c hat nun eine Einheit

$$1 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \text{K}}$$

daher:

c : spezifische Wärme

(Wärme bezogen auf die Masse
und die Temperaturdifferenz)

Man muß c nicht auf die Masse
m beziehen. Es geht auch

"Molwärme"

Einheit $1 \frac{c}{\text{Mol} \cdot \text{K}}$
 $\hat{=}$ "pro Mol"

c kann man nun experimentell
für Gase, Flüssigkeiten und
Festkörper durch Mess experimente
bestimmen.

Interessant

$$c \left(\frac{\text{cal}}{\text{Mol} \cdot \text{K}} \right) \approx 6 \frac{\text{cal}}{\text{Mol} \cdot \text{K}}$$

Festkörper

"Regel von Dulong-Petit"

(→ später mikroskopische Erklärung
durch Gitterschwingungen)

Bei Gasen ist die Sache komplizierter.

→ Kompressibilität

2 Möglichkeiten:

$$p = \text{const.} \rightarrow c_p$$

$$V = \text{const.} \rightarrow c_v$$

Dabei macht man eine interessante
exp. Beobachtung:

$$c_p > c_v$$

$$c_p - c_v \approx 2 \frac{\text{cal}}{\text{Mol} \cdot \text{K}}$$

} für praktisch
alle
Gase...

Diese eigentlich völlig unscheinbare Beobachtung war Schlüssel zu einer revolutionären Idee:

Warum ist $C_p > C_v$

Weil bei einem C_p -Experiment (T -Änderung) das Volumen des Gases geändert wird

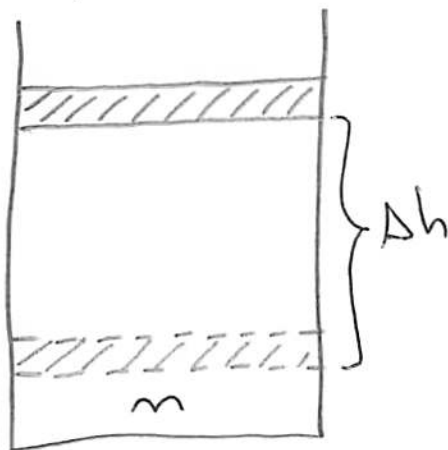
↳ mechanische Arbeit!

Mechanische Arbeit und Wärme sind äquivalent

↳ Beides sind Energieformen

Genauer:

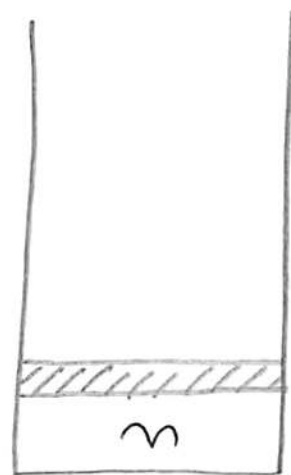
C_p -Versuch



ΔT

$$Q_p = C_p \cdot m \cdot \Delta T$$

C_v -Versuch



ΔT

$$Q_v = C_v \cdot m \cdot \Delta T$$

und

$$W = F \cdot \Delta h = p \cdot dV \leftarrow \text{Unterschied!}$$

Also :

$$Q_p - Q_v = \underbrace{(C_p - C_v) \cdot m \cdot \Delta T}_{\text{beobachtet}} = \underbrace{p \cdot \Delta V}_{\text{mögliche Erklärung}}$$

↑
Wärme

↑
Energie

_____ = _____

Wir kennen die Gasgleichung

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

hier $p \cdot \Delta V = n \cdot R \cdot \Delta T$

Also :

$$\underbrace{(C_p - C_v) \cdot n \cdot \Delta T}_{\text{---}} = \underbrace{\gamma \Delta U}_{\text{---}} = \underbrace{n \cdot R \cdot \Delta T}_{\text{---}}$$

$$\underbrace{C_p - C_v}_A = R \quad (= \text{const.})$$

Kann man
messen

Kann man
messen

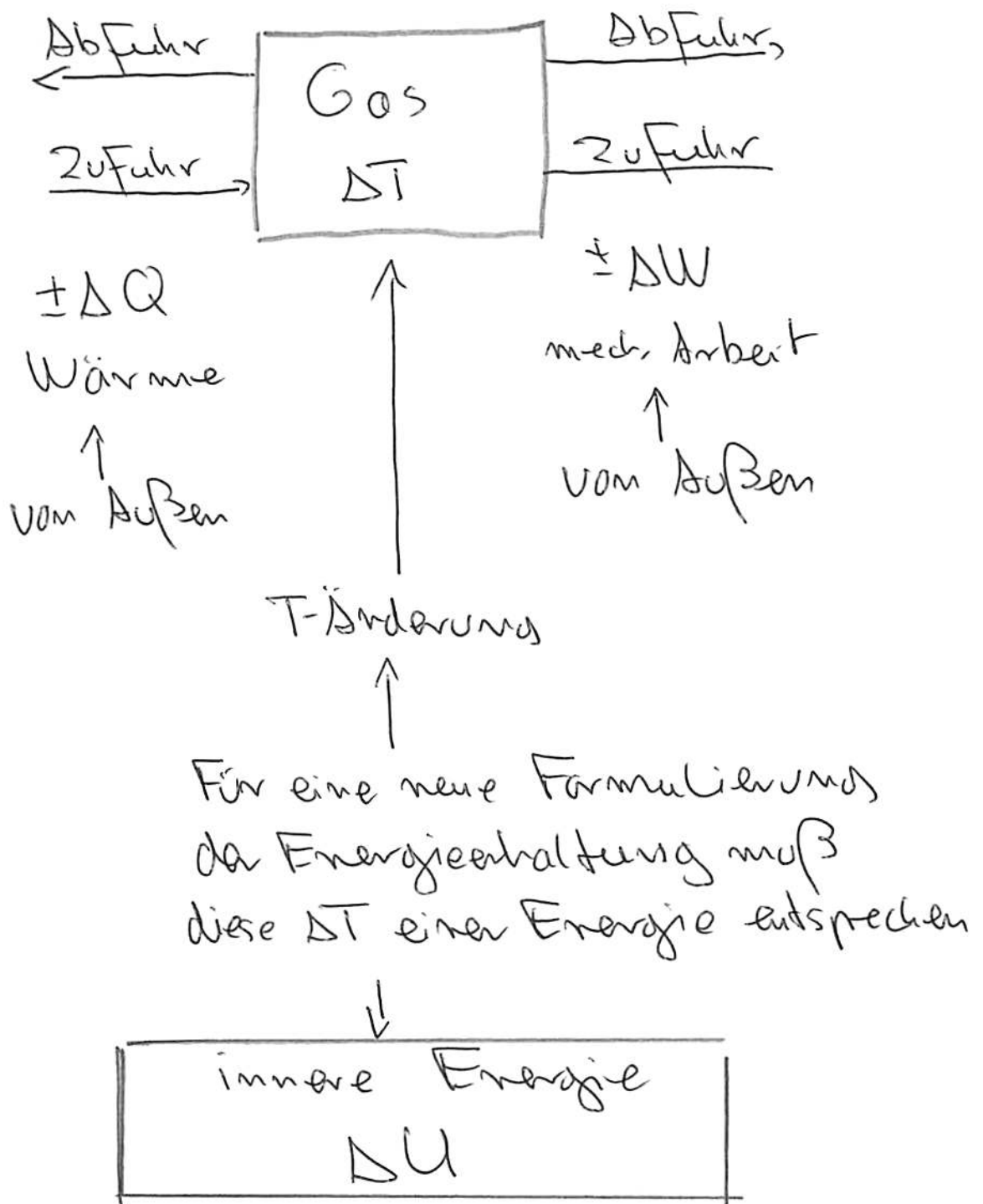
Unterschiedliche Experimente
↓
Stimmt!

Die GasKonstante enthält nicht
"Kalorien", sondern "Joule", also:

$$1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J (Nm)}$$

"mechanisches Wärmeäquivalent"

Zusammenfassung:



als Gleichung

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W$$

$\uparrow$
Zunahme
innere Energie
 $\rightarrow \Delta T$

$\nwarrow$
zugeführte
Wärmeenergie

$\nearrow$
zugeführte mech.
Arbeit

ersetze zu durch ab

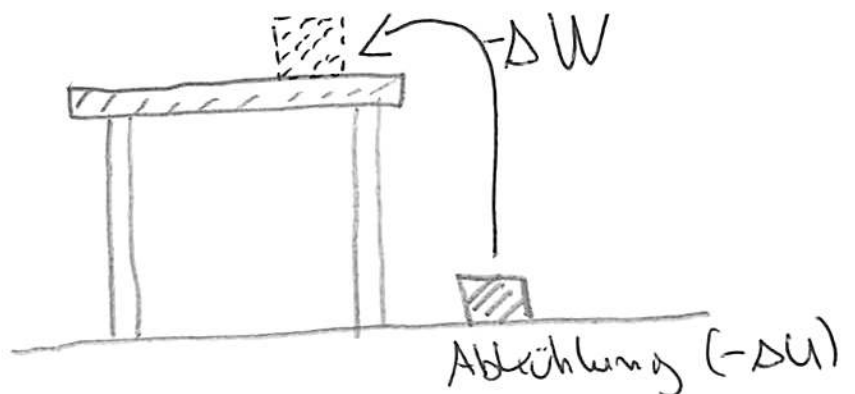
$\hookrightarrow$ Vorzeichenänderung

"Energiesatz"

"I. Hauptsatz der Thermodynamik"

$\rightarrow$ Im Prinzip beliebige Umwandlung
von U, Q, W so lange die
Gleichung erfüllt wird

z.B. (?)

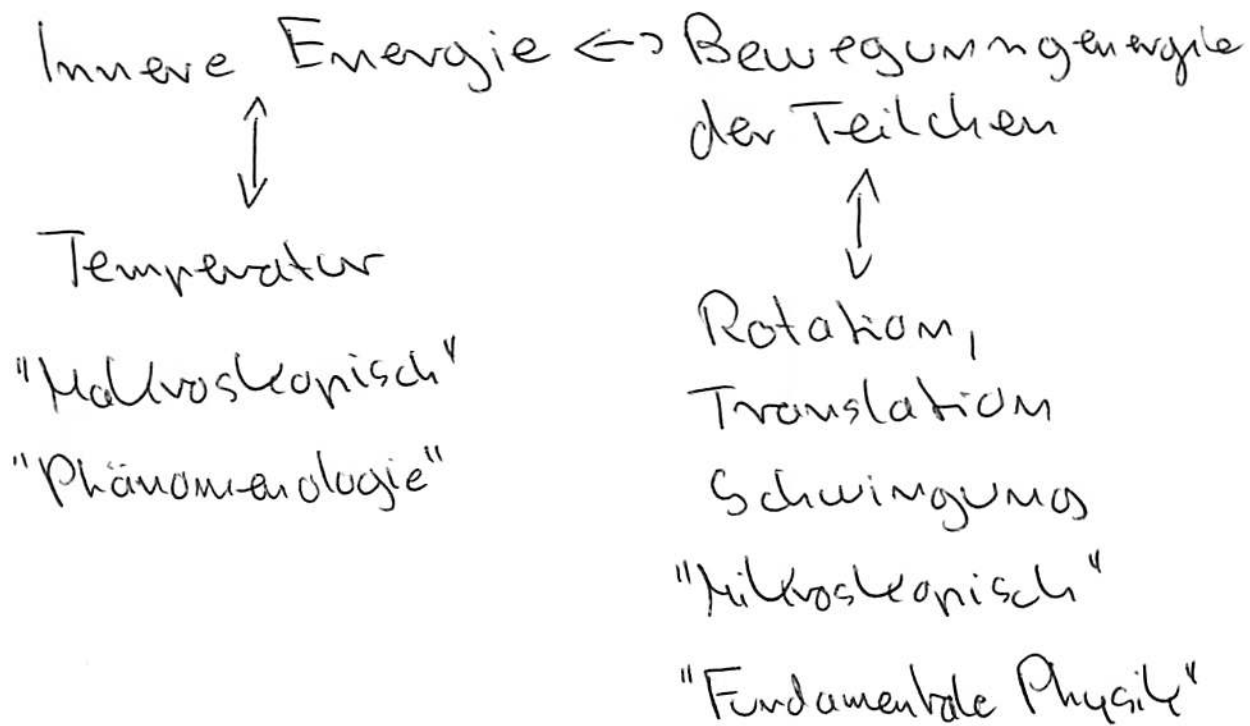


$\rightarrow$ passiert nie!

$\rightarrow$ Es gibt noch einen weiteren Hauptsatz
Aber nunächst...

3.2. Kinetische Gastheorie

Grundidee:



Aber: Noch ein weiterer revolutionärer
Gedanke!

Zustandsgrößen $\leftrightarrow$ statistische Mittelung
mikroskopischer
Größen!

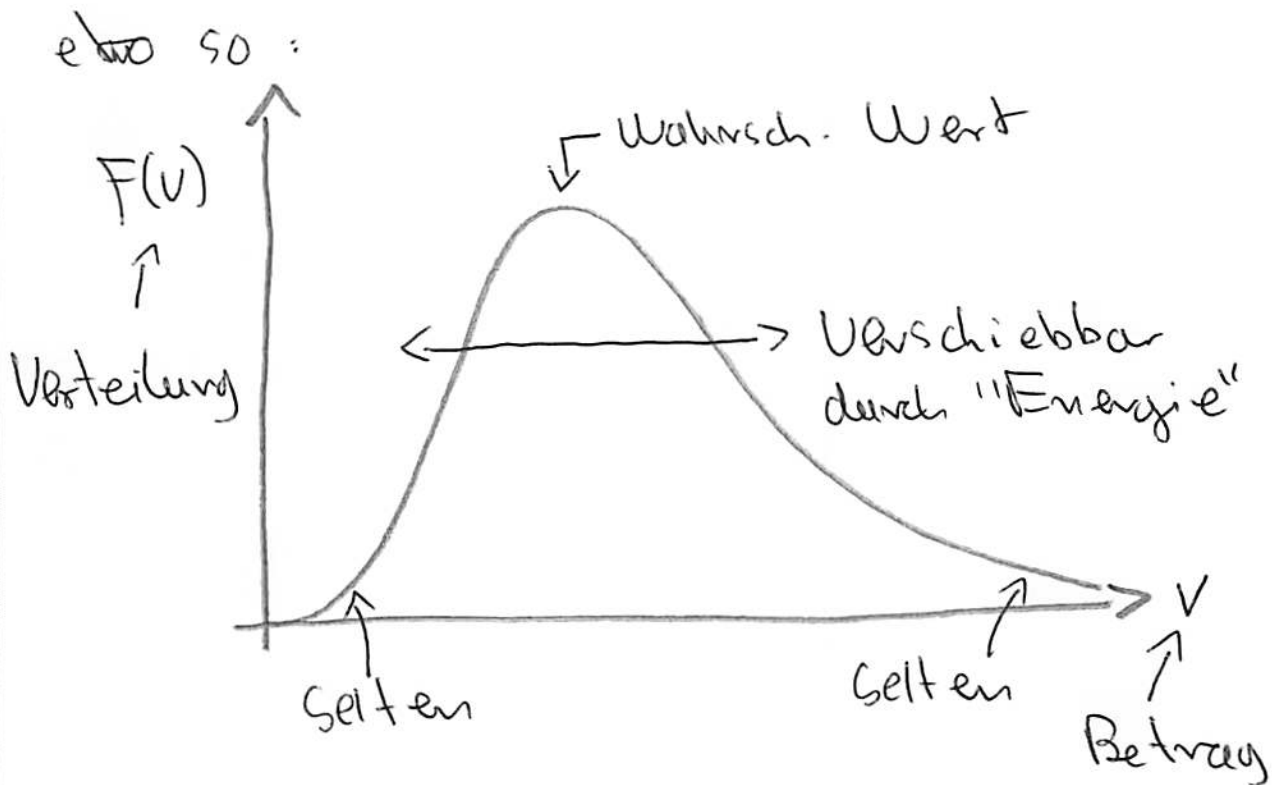
Idealisierungen

- ① Keine inneren Kräfte
- ② Eigenvolumina vernachlässigbar
gegenüber Abständen
- ③ Nur Translationsbewegungen

wir werden gleich sehen, daß diese 3 Punkte äquivalent zur Definition des idealen Gases sind $\leftrightarrow$ id. Gasgleichung

DEMO Kugelmodell

→ viele Geschwindigkeiten (Beträge und Richtungen)



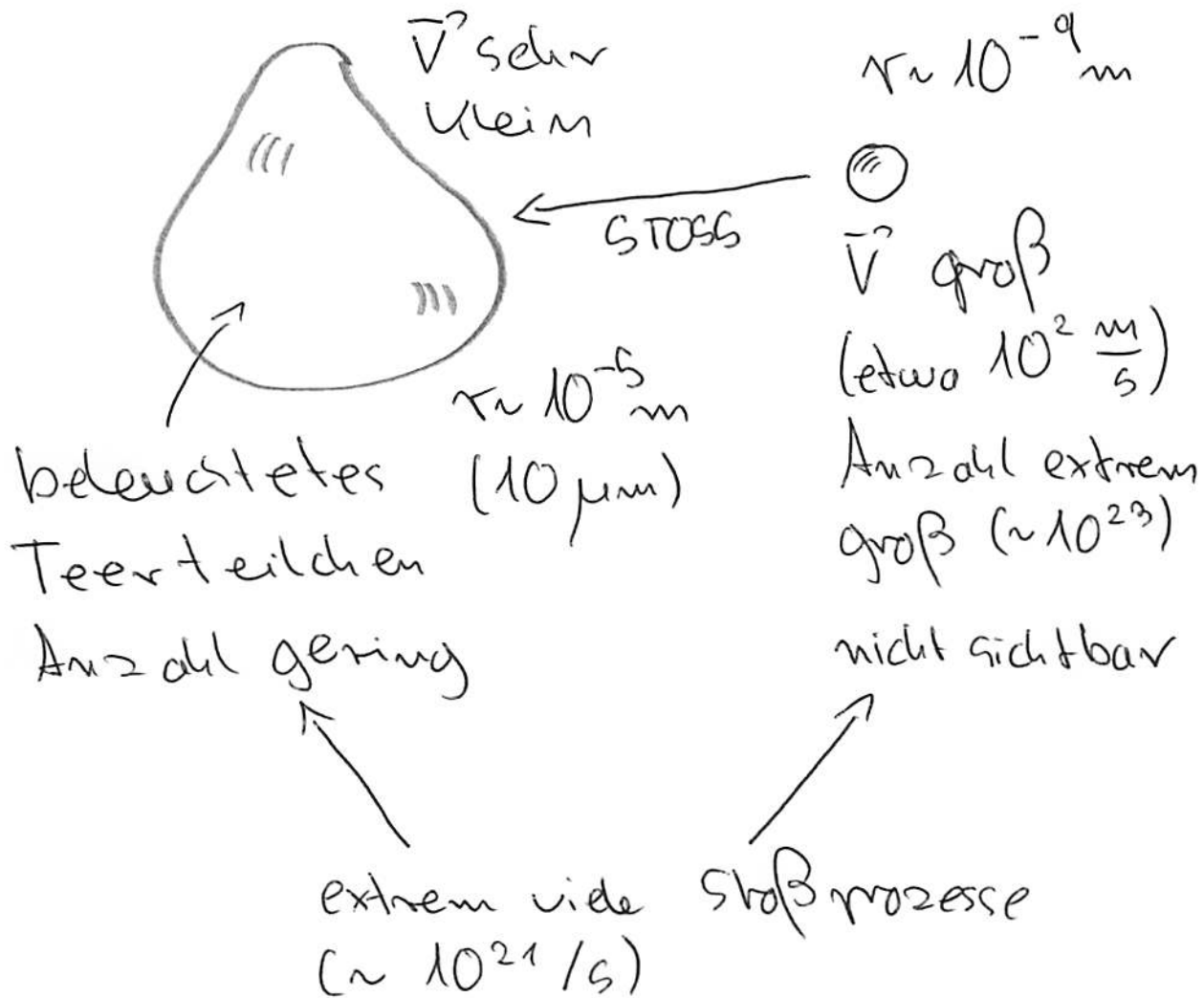
$F(v)$: Wahrscheinlichkeit, v im Intervall $[v, v+dv]$ zu finden

Normierung:
$$\int_0^{\infty} F(v) \cdot dv = 1$$

DEMO Java

Berühmtes Experiment:

DEMO: Brownsche Molekularbewegung



Random Walk
Weg $\sim \sqrt{t}$ (Einstein 1905)

+ globale Strömung (Drift)

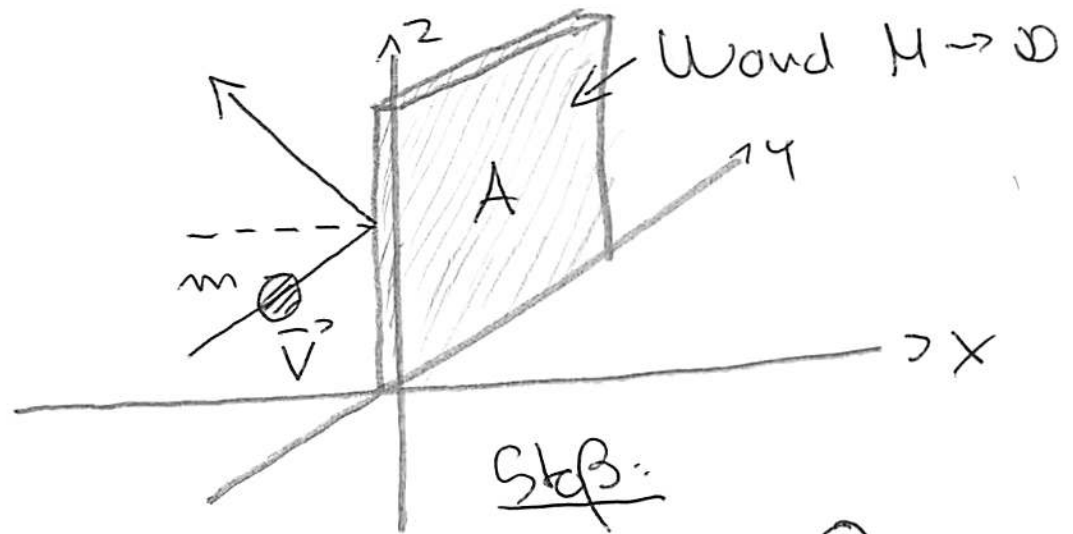
(Robert Brown, 1773-1858)

DEMO: Kugelexperiment

Nun zu unseren Zustandsgrößen

Druck

Idee: Elastische Stöße von Teilchen an der Behälterwand



Stoß:

$$\Delta E_{\text{kin}} = 0$$

$$\Delta p \neq 0$$

DEMO Fußball

$$\Delta p_x = 2 \cdot m \cdot v_x \leftarrow \text{Impuls übertragen}$$

$$\Delta p_y = \Delta p_z = 0$$

$$\Delta E_{\text{kin}} = 0$$

Kraft auf Fläche A :

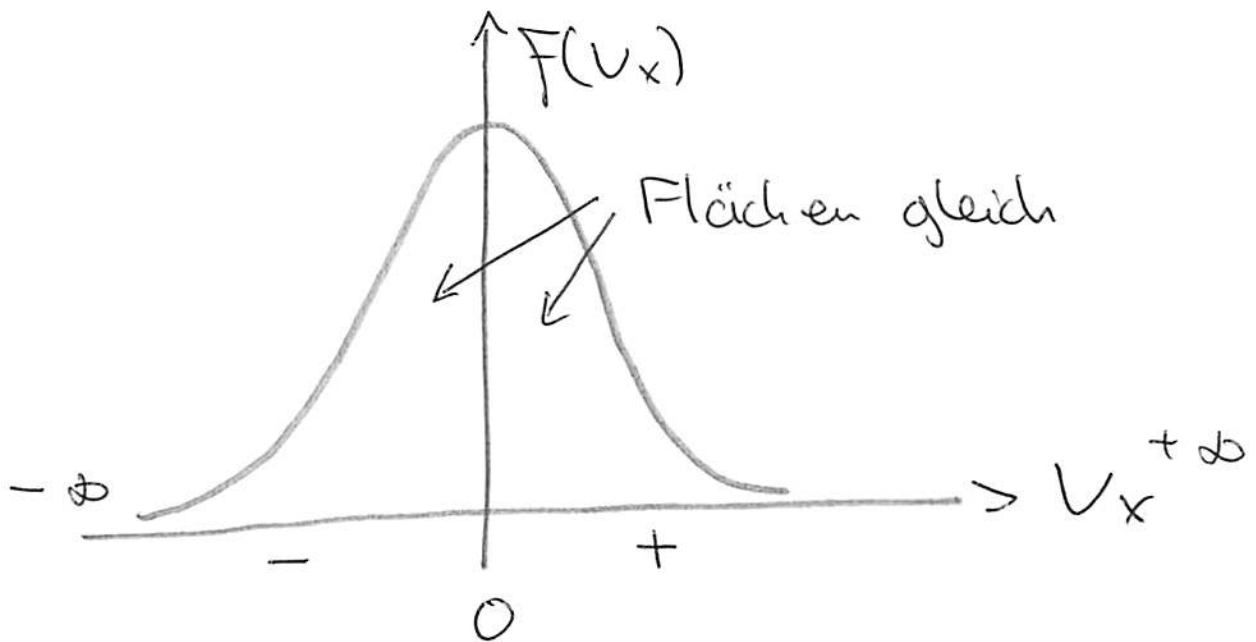
$$F = \frac{\text{Impuls übertragen}}{\text{Stoß}} \cdot \frac{\text{Stöße}}{\text{Zeit}} = \frac{dp}{dt}$$

hier:

$$F = 2 \cdot m \cdot v_x \cdot \frac{\text{Stöße}}{\text{Zeit}}$$

Wichtig: Auch die v_x -Komponente folgt einer Verteilung.

→ symmetrisch um $v_x = 0$, da sich das Gas als Ganzes nicht bewegt



Statt $F(v_x)$ können wir auch über die Teilchenzahl $n(v_x)$ reden, dann

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} n(v_x) \cdot dv_x$$

Gesamtzahl

(z.B. pro Volumen)

$$\bar{v}_x = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} v_x \cdot n(v_x) \cdot dv_x = 0$$

↑
Symmetrie

Interessanter ist der Mittelwert von v_x^2 (immer positiv)

$$\overline{V_x^2} = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\infty} V_x^2 \cdot n(V_x) \cdot dV_x \neq 0$$

n.b.

$$\overline{V_x^2} \neq (\overline{V_x})^2 = 0 !$$

Nun zur Kraft auf die Wand

$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{2 \cdot m \cdot V_x}_{\text{Imp. \u00c4bertrag pro Sto\u00df}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot n(V_x) \cdot dV_x}_{\text{Teilchenzahl pro Volumen}} \cdot \underbrace{V_x \cdot dt \cdot A}_{\text{Volumen mit sto\u00dfenden Teilchen}} \cdot \underbrace{\frac{1}{dt}}_{\text{"pro Zeit"}}$

nur die H\u00e4lfte der V_x hat pos. Komponente (nur Wand)

St\u00f6\u00dfe pro Zeit



$$= m \cdot A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \cdot n(v_x) \cdot dv_x$$

$$= m \cdot A \cdot N \cdot \overline{v_x^2} \quad (\text{siehe quadr. Mittel})$$

also ist der Druck:

$$p = \frac{F}{A} = m \cdot N \cdot \overline{v_x^2}$$

Sorry, nicht
Impuls ...!

Was nun?

$$\text{Es ist sicher: } \overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$$

$$\text{und: } \overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$$

$$\text{oder } \overline{v_x^2} = \frac{1}{3} \cdot \overline{v^2}$$

damit:

$$p = \frac{1}{3} \cdot N \cdot m \cdot \overline{v^2}$$

wir kennen:

$$\overline{E_{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \overline{v^2}$$

also: $p = \frac{2}{3} \cdot N \cdot \overline{E_{kin}}$

OH !!!

Unsere phänomenologischen Experimente sagen uns:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Es ist $N = \frac{n \cdot N_A}{V}$



Teilchen pro Volumen

DAMIT IST DIE BRÜCKE GEBAUT !

$$p \cdot V = n \cdot \underbrace{\frac{2}{3} \cdot N_A \cdot \overline{E_{kin}}}_{\text{Messung} \rightarrow R \cdot T \text{ im Experiment}}$$

Erinnerung: fragwürdige Definition...

Erinnerung: fragwürdige Definition...

Sensationell:

$$\overline{E_{kin}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{N_A} \cdot T$$

$\hat{=} k_B$

k_B : Boltzmann-Konstante