

Höhere Analysis

Prof. Dr. BANAGL

WS 2015/16

- 1) Maßtheorie, Lebesgue-Integral
- 2) L^p -Räume Funktionen zu Menge zusammenfassen + Integrierbarkeitsbedingungen, L^2 bildet Hilbertraum
- 3) Fouriertransformation + Reihen; Abstrakte Theorie
- 4) Abstrakte Mannigfaltigkeiten, Differentialformen beliebigen Grades, Allg. Satz von Stokes
Kreis $\bigcirc$ in $\mathbb{R}^3$ oder als Knoten $\bigcirc$

bis Weihnachten
Januar

MAßTHEORIE

Motivation: Warum benötigen wir einen allgemeineren Integralbegriff?

Das Riemann-Integral verhält sich sehr schlecht unter Grenzübergängen

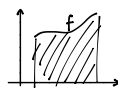
Bsp: $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$. Def $f_n(x) := \begin{cases} 1, & x \in \{q_1, \dots, q_n\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$, $x \in [0,1]$, $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$. Die Folge (f_n) ist monoton wachsend, $f_n \leq f_{n+1}$ $\forall n$, f_n uniform beschränkt, $0 \leq f_n(x) \leq 1 \forall n, x$. f_n hat n Unstetigkeitsstellen und ist daher R-integrierbar. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ "charakteristische Funktion von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ ".

$\chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ nicht R-integrierbar. Folge von R-int. Fkten, monoton + unif. beschr., u. nicht ist Grenzwert nicht R-int.

Dieses Problem wird durch die Lebesguesche Integrationstheorie behoben.

Warum Maßtheorie? Maß μ . $A \subset X$ Teilmenge $\mapsto \mu(A) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ "Länge" "Fläche" "Volumen"

Sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Fkt, $f \geq 0$. $\int f d\mu := \mu(\{(x,y) \in X \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq f(x)\})$ nicht leer da $f(x)$ immer ≥ 0



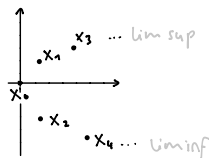
Notation: $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ $\mathbb{R}$ mit 2 Elementen zusätzlich $x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty$

$A \subset \mathbb{R}$. $\sup(A) := \begin{cases} \sup A \in \mathbb{R}, & \text{wenn } A \text{ nach oben beschr. ist} \\ +\infty, & \text{sonst} \end{cases}$

$A \subset \overline{\mathbb{R}}$ und $+\infty \in A$, dann $\sup(A) := +\infty$. (Analog für $\inf(A) \in \overline{\mathbb{R}}$)

$\limsup x_n := \inf \left(\sup_{m \geq n} x_m \right)$ mit $(x_n)_{n=0,1,2,\dots} \subset \overline{\mathbb{R}}$

$\liminf x_n := \sup \left(\inf_{m \geq n} x_m \right)$



Algebraische Operationen: $(+\infty) + (+\infty) := +\infty$

$(-\infty) + (-\infty) := -\infty$

$x + (+\infty) := +\infty$

$x + (-\infty) := -\infty$

$(+\infty) + x := +\infty$

$(-\infty) + x := -\infty$ (Wir def. nicht $(+\infty) + (-\infty)!$)

$(+\infty) \cdot (+\infty) := +\infty$

$(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$

$(+\infty) \cdot x = x \cdot (+\infty) := \begin{cases} +\infty, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\infty, & x < 0 \end{cases}$

Ähnlich $(-\infty) \cdot x$

(Wir def. keine Quotienten $\frac{*}{\pm\infty}$.)

MESSBARE MENGEN

Sei X eine Menge und $\mathcal{X}$ eine Familie von Teilmengen von X .

Def: $\mathcal{X}$ heißt σ -Algebra auf X , wenn gilt: 1. $\emptyset, X \in \mathcal{X}$

2. $A \in \mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{C}(A) \in \mathcal{X}$ mit $\mathcal{C}(A) := X - A$ "Komplement"

3. $(A_n)_{n=0,1,2,\dots} \subset \mathcal{X} \Rightarrow \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{X}$ abzählbare Vereinigungen
 $\Rightarrow$ daher Sigma "σ"

Bem: De Morgan $\mathcal{C}(\bigcup A_n) = \bigcap \mathcal{C}(A_n)$
 $\mathcal{C}(\bigcap A_n) = \bigcup \mathcal{C}(A_n)$ } $A_n \in \mathcal{X} \Rightarrow \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{X}$ nützlich in Beweisen, manchmal mit Durchschnitt arbeiten

Bsp: $\mathcal{X} = \{\emptyset, X\}$ ist eine σ -Algebra

• $\mathcal{X} = P(X)$ Potenzmenge auch eine σ -Alg. größte σ -A da alle Teilmengen drin sind

• Sind $\mathcal{X}_1$ und $\mathcal{X}_2$ σ -Algebren auf X , dann ist auch $\mathcal{X}_1 \cap \mathcal{X}_2$ auch σ -Alg gilt auch für bel. Durchschnitte

• Sei $\mathcal{A} \neq \emptyset$ eine bel. Familie von Teilmengen von X . $\mathcal{X}(\mathcal{A}) := \bigcap \{ \mathcal{X} \mid \mathcal{X} \text{ } \sigma\text{-Algebra auf } X \mid \mathcal{A} \subset \mathcal{X} \}$ ist eine σ -Alg. $\mathcal{X}(\mathcal{A}) \supset \mathcal{A}$. $\mathcal{X}(\mathcal{A})$ ist die kleinste σ -Alg. die $\mathcal{A}$ enthält. $\neq \emptyset$

(?)
 $\mathcal{A}$ ist σ -A
 $\Rightarrow \mathcal{X}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$

$\mathcal{X}(\mathcal{A})$ ist "die von $\mathcal{A}$ erzeugte σ -Algebra"

• Sei $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} := \{ \text{alle offenen Intervalle } (a,b) \subset \mathbb{R} \}$ selbst noch keine σ -Alg

$\mathcal{B} := \mathcal{X}(\mathcal{A})$ heißt die Borel-Algebra auf $\mathbb{R}$ von offenen Intervallen erzeugte σ -Algebra

Sei $\mathcal{X}$ eine σ -Alg. X . Die Mengen $A \in \mathcal{X}$ nennen wir messbar und $(X, \mathcal{X})$ heißt messbarer Raum.

16/10/15 $\mathcal{X} = \{ \emptyset, X \}$ Menge $\mathcal{X}$ Menge von Teilmengen, $\emptyset + X$ immer in σ -Alg

$\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ Borel-Alg., alle offenen Intervalle sollen messbar sein (minimal Anforderung)

$\cup$ 2 Intervalle $\neq$ immer Intervall (zB wenn disjunkt) $\Rightarrow$ keine σ -Alg.

• st. Fkt sollen messbar sein

Erweiterte Borel Algebra $\overline{\mathcal{B}}$: $X = \mathbb{R}$. Wenn $A \subset \mathbb{R}$:

$$A_{+\infty} := A \cup \{+\infty\}$$

$$A_{-\infty} := A \cup \{-\infty\}$$

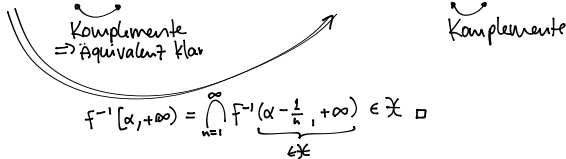
$$A_{\pm\infty} := A \cup \{-\infty, +\infty\}$$

$\overline{\mathcal{B}} := \{ A, A_{-\infty}, A_{+\infty}, A_{\pm\infty} \mid A \in \mathcal{B} \}$ ist eine σ -Algebra $(\mathbb{R}, \overline{\mathcal{B}})$

Def: Sei $(X, \mathcal{X})$ ein messbarer Raum. Eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt $(\mathcal{X})$ -messbar, wenn $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

$$\underbrace{\{x \in X \mid f(x) > \alpha\}}_{f^{-1}(\alpha, +\infty)} \in \mathcal{X}$$

Bem: $f^{-1}(\alpha, +\infty) \in \mathcal{X} \Leftrightarrow f^{-1}(-\infty, \alpha] \in \mathcal{X} \Leftrightarrow f^{-1}[\alpha, +\infty) \in \mathcal{X} \Leftrightarrow f^{-1}(-\infty, \alpha) \in \mathcal{X}$ je $\forall \alpha$



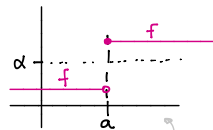
Bsp: Konstante Fkten sind messbar: $f(x) = c \quad \forall x \in X$. $\alpha \in \mathbb{R}$: $c \leq \alpha$: $\{x \mid f(x) > \alpha\} = \emptyset \in \mathcal{X}$. $c > \alpha$: $\{x \mid f(x) > \alpha\} = X \in \mathcal{X}$.

Charakteristische Funktionen: $A \subset X$. $\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$

Beh: Ist $A \in \mathcal{X}$, dann ist χ_A messbar: $\chi_A^{-1}(\alpha, +\infty) \in \{\emptyset, A, X\} \subset \mathcal{X}$

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f Borel-messbar.

Bew: $f^{-1}(\alpha, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a_n, b_n)}_{\in \mathcal{B}}$ st Fkt sind immer messbar
 f st $\Rightarrow$ offen



Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton, zB mon. wachsend. $f^{-1}(\alpha, +\infty)$ ist von der Form $\underbrace{(a, +\infty)}_{\in \mathcal{B}}$ oder $\underbrace{[a, +\infty)}_{\in \mathcal{B}}$

Lemma Seien $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar, $c \in \mathbb{R}$. Dann sind $cf, f^2, f+g, fg, |f|$ auch messbar.

Bew: cf : Wenn $c=0 \Rightarrow cf=0$ konst $\checkmark$

Wenn $c>0$: $\{x \mid cf(x) > \alpha\} = \{x \mid f(x) > \frac{\alpha}{c}\} \in \mathcal{X}$ also messbar $\checkmark$ $c<0$ analog.

f^2 : $\alpha < 0$: $\{x \mid f^2(x) > \alpha\} = X \in \mathcal{X}$ $\checkmark$

$\alpha \geq 0$: $\{x \mid f^2(x) > \alpha\} = \{x \mid f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \mid f(x) < -\sqrt{\alpha}\} \in \mathcal{X}$ $\checkmark$

$f+g$: $f(x) + g(x) > \alpha$. $\varepsilon = f(x) + g(x) - \alpha > 0$. $\exists r \in \mathbb{Q}$: $0 < f(x) - r < \varepsilon$. $f(x) > r$ und $-r < g(x) - \alpha$

also $g(x) > \alpha - r$. $\forall r \in \mathbb{Q}$ setze $S_r := \{x \mid f(x) > r\} \cap \{x \mid g(x) > \alpha - r\} \Rightarrow$ Wir haben gezeigt:

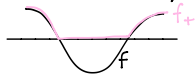
$\{x \mid f(x) + g(x) > \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} S_r \in \mathcal{X}$ abzählbar!

$f \cdot g = \frac{1}{4}[(f+g)^2 - (f-g)^2]$ klar durch Bew 1-3 $\checkmark$

$|f|$: $\alpha < 0$: $\{x \mid |f(x)| > \alpha\} \in \mathcal{X}$ $\checkmark$

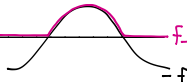
$\alpha > 0$: $\{x \mid |f(x)| > \alpha\} = \{x \mid f(x) > \alpha\} \cup \{x \mid f(x) < -\alpha\} \in \mathcal{X}$ $\checkmark$

Notation: $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. $f_+(x) := \max\{f(x), 0\}$



"positiver Teil von f"

$f_-(x) := \max\{-f(x), 0\}$



"negativer Teil"

$\Rightarrow f_+, f_- \geq 0$. $f = f_+ - f_-$, $|f| = f_+ + f_-$.

Ist f messbar, dann auch f_+ : $f_+ = \frac{1}{2}(f_+ + f_+) = \frac{1}{2}(f_+ + f_- + |f| - f_-) = \frac{1}{2}(f_+ + |f|)$ messb. nach Lemma $\checkmark$

Ähnlich ist f_- messbar.

Es gilt also: f ist messbar $\Leftrightarrow f_+$ und f_- beide messbar.

Wir erweitern den Begriff der Messbarkeit auf Fktn mit Werten in $\mathbb{R}$:

Def: $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **messbar**, wenn $\forall \alpha \in \mathbb{R}: \{x \mid f(x) > \alpha\} \in \mathcal{K}$. $M(X, \mathcal{K}) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ messbar}\}$.

Bem: $f^{-1}(+\infty) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overbrace{\{x \mid f(x) > n\}}^{\in \mathcal{K}} \in \mathcal{K}$. Analog $f^{-1}(-\infty)$ immer messbar.

Kriterium: $f: X \rightarrow \mathbb{R}$.

f messbar $\Leftrightarrow f^{-1}(-\infty), f^{-1}(+\infty) \in \mathcal{K}$ und $f_0: X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar sind, wobei $f_0(x) := \begin{cases} f(x), & f(x) \neq \pm\infty \\ 0, & f(x) = \pm\infty \end{cases}$.

Daraus folgt zusammen mit dem Lemma: $f \in M(X, \mathcal{K}) \Rightarrow cf, f^2, |f|, f_+, f_- \in M(X, \mathcal{K})$.

$f, g \in M(X, \mathcal{K})$. Dann ist $f+g$ nicht wohldefiniert auf der Menge

$$\{x \mid f(x) = +\infty, g(x) = -\infty\} \cup \{x \mid f(x) = -\infty, g(x) = +\infty\} = E$$

Definieren wir $(f+g)(x) := \begin{cases} f(x)+g(x), & x \in X-E \\ 0, & x \in E \end{cases}$. Dann gilt $f+g \in M(X, \mathcal{K})$. $f \cdot g$ folgt später...

Lemma: Sei $(f_n) \subset M(X, \mathcal{K})$ eine Fktnfolge. Wir setzen $f(x) := \inf_n f_n(x)$

$$F(x) := \sup_n f_n(x)$$

$$f^*(x) := \liminf_n f_n(x)$$

$$F^*(x) := \limsup_n f_n(x)$$

Dann gilt: $f, F, f^*, F^* \in M(X, \mathcal{K})$.

Bew: $\{x \mid f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \mid f_n(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{K}$. $\{x \mid F(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid f_n(x) > \alpha\} \in \mathcal{K}$.

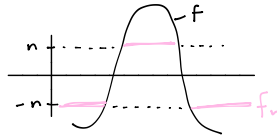
$$f^* = \sup_n (\inf_{m \geq n} f_m(x)) \Rightarrow f^* \in \mathcal{K}$$

F^* analog.

Korollar: Konvergiert die Folge $(f_n) \subset M(X, \mathcal{K})$ gegen f , dann ist $f \in M(X, \mathcal{K})$.

Bew: $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \liminf_n f_n$.

Zurück zu $f \cdot g$: $n=1, 2, \dots: f_n(x) := \begin{cases} n, & f(x) > n \\ f(x), & |f(x)| \leq n \\ -n, & f(x) < -n \end{cases}$



$\Rightarrow f_n$ sind messbar.
 $\lim f_n = f$.

Ähnlich g_m .

$$\underbrace{f_n \cdot g_m}_{\text{messbar}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \underbrace{f_n \cdot g_m}_{\text{messbar}}$$

Kor.

$$\underbrace{f \cdot g}_{\text{messb.}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f_n \cdot g}_{\text{messb.}}$$

Kor.

21/10/15 σ -abzählbare Vereinigungen, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar wenn $f^{-1}(\alpha, +\infty) \in \mathcal{K}$

Satz: Approximation durch messbare Treppenfunktionen

Sei $f \in M(X, \mathcal{K})$, $f \geq 0$ keine große Einschränkung da wir f_+ u. f_- extrahieren können (beide nicht neg.)

Dann $\exists$ Folge $(\varphi_n) \subset M(X, \mathcal{K})$, $\varphi_n \geq 0$ mit:

$$1. \varphi_n \text{ nimmt endlich viele Werte an ("Treppenfunktion")}$$

$$2. \varphi_n \leq \varphi_{n+1} \quad \forall n$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = f$$

Bew: $\varphi_1: X_0 := f^{-1}\left[0, \frac{1}{2}\right) \in \mathcal{X}$
 $X_1 := f^{-1}\left[\frac{1}{2}, 1\right) \in \mathcal{X}$
 $X_2 := f^{-1}\left[1, +\infty\right] \in \mathcal{X}$ } $X = X_0 \sqcup X_1 \sqcup X_2$ *disjunkte Vereinigung*

$$\varphi_1(x) := \begin{cases} 0, & x \in X_0 \\ \frac{1}{2}, & x \in X_1 \\ 1, & x \in X_2 \end{cases} \Rightarrow \varphi_1 \in M(X, \mathcal{X})$$

$\varphi_2: X_0 := f^{-1}\left[0, \frac{1}{4}\right)$
 $\vdots$
 $\left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right)$
 $\left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right)$
 $\vdots$
 $\left[\frac{7}{4}, 2\right)$
 $X_3 := f^{-1}\left[2, +\infty\right)$

$$\varphi_2(x) := \begin{cases} 0, & x \in X_0 \\ \frac{1}{4}, & x \in X_1 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{7}{4}, & x \in X_3 \\ 2, & x \in X_3 \end{cases} \Rightarrow \varphi_2 \in M(X, \mathcal{X})$$

$X_j \in \mathcal{X} \forall j$
 $X = X_0 \sqcup \dots \sqcup X_3$

$\varphi_3 \dots$ usw jedes Mal halb so große Intervalle $\rightarrow$ endl. viele Werte; jedes Mal doppelt so viele
Dann gilt 1., 2., 3.

Komplexwertige Funktionen ($\hookrightarrow$ Fouriertransf.)

Def: $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ heißt messbar, wenn sowohl der Realteil von f als auch der Imaginärteil von f messbar sind.

MAßE

Def: Sei $(X, \mathcal{X})$ ein messbarer Raum. Ein Maß auf $\mathcal{X}$ ist eine Funktion $\mu: \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, so dass gilt:

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. $\mu(E) \geq 0 \quad \forall E \in \mathcal{X}$

abzählb. additiv $\leftarrow$ **3.** Ist $(E_n)_{n=1,2,\dots} \subset \mathcal{X}$ eine disjunkte Folge (d.h. $E_n \cap E_m = \emptyset \quad \forall n \neq m$), dann $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$

Bem: Wenn $\sum \mu(E_n) = +\infty$, dann $\exists n: \mu(E_n) = +\infty$ oder die unendliche Reihe $\sum \mu(E_n)$ divergiert.

Gäbe es Überlappung $\odot$ würde rechts die Mitte doppelt gezählt; links nicht $\int$

Def: μ heißt endlich, wenn $\mu(E) < +\infty \quad \forall E \in \mathcal{X}$

Def: μ heißt σ -endlich, wenn $\exists (E_n) \subset \mathcal{X}, X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ und $\mu(E_n) < +\infty$



Bsp: ① $\mathcal{X} := \mathcal{P}(X)$ Potenzmenge. $p \in X$ fest. $\mu(E) := \begin{cases} 1, & p \in E \\ 0, & p \notin E \end{cases}$

ist ein Maß, das sog. Diracmaß konzentriert im Punkt p . μ ist endlich.

② $X = \mathbb{N}, \mathcal{X} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. $\mu(E) := \begin{cases} \text{card}(E), & E \text{ endl. Anzahl der Elemente in } E \\ +\infty, & \text{sonst} \end{cases}$

μ ist ein σ -endliches Maß, das sog. "Abzählmaß". μ ist nicht endlich.

Intervall; $a, b \in \mathbb{R}$

Bem: $X = \mathbb{R}, \mathcal{X} = \mathcal{B}$ Borel-Alg. Wir werden später sehen, dass $\exists!$ Maß λ auf $\mathcal{B}$ mit $\lambda((a, b)) = |b - a|$.

λ heißt Lebesguemaß.

Lemma 1 Sei μ ein Maß auf $\mathcal{X}$, $E, F \in \mathcal{X}$, $E \subset F$. Dann gilt $\mu(E) \leq \mu(F)$ und wenn $\mu(E) < +\infty$, dann

$$\mu(F-E) = \mu(F) - \mu(E).$$

Bew: $F = E \cup (F-E)$. $\textcircled{3} \Rightarrow \mu(F) = \mu(E) + \overbrace{\mu(F-E)}^{\geq 0}$. Wenn $\mu(E) < \infty$, dann darf man $\mu(E)$ auf beiden Seiten subtrahieren.

Lemma 2 $\textcircled{1} E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots \subset E_n \in \mathcal{X} \quad \forall n$. Dann $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$

$\textcircled{2} X \supset F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \in \mathcal{X}$, $\mu(F_n) < \infty$. Dann $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n)$

Bew: $\textcircled{1} A_1 := E_1, A_n := E_n - E_{n-1}, n \geq 2$. $\textcircled{18}$ — A ist die Differenz. [Zunächst für $\mu(E_n) < +\infty \quad \forall n$]:
 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$. $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n) \stackrel{3}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \mu(A_n) \stackrel{\text{Lem. 1}}{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(\sum_{n=1}^m E_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(E_m)$
Teleskop

damit wir Lemma 1 anwenden können

Wenn $\exists n: \mu(E_n) = +\infty$, dann $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = +\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$

$\textcircled{2}$ Folgt aus $\textcircled{1}$ mit $E_n = F_1 - F_n$ (E_n aufsteigend). Man erhält $\mu(F_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) = \mu(F_1) - \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n)$
 $\mu(F_1) < \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n)$

Def: Ein **Maßraum** ist ein Tripel $(X, \mathcal{X}, \mu)$, wobei $(X, \mathcal{X})$ ein messbarer Raum ist und $\mu: \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ein Maß auf $\mathcal{X}$

Sprechweisen: Wir sagen eine Aussage A gilt **μ -fast überall**, wenn $\exists N \in \mathcal{X}, \mu(N) = 0$ ("**Nullmenge**"), so dass A für alle $x \in X - N$ gilt.

$\mathbb{R}$: $f, g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. $f = g$ μ -f.ü. $\Leftrightarrow \exists N \in \mathcal{X}, \mu(N) = 0, f(x) = g(x) \quad \forall x \in X - N$

$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ μ -f.ü., wenn $\exists N \in \mathcal{X}, \mu(N) = 0, f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \quad \forall x \in X - N$.
Menge mit verschwindendem Maß

Erzeugte Maße

$X = \mathbb{R}$. $\mathcal{F} := \{\text{endl. Vereinigungen von Intervallen der Form } (a, b], (-\infty, b], (a, +\infty), (-\infty, +\infty)\}$

Wir def. auf $\mathcal{F}$ die **Längenfkt** $\ell: \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}: \ell(I) := \begin{cases} b-a, & I = (a, b], a, b \in \mathbb{R}, a < b \\ +\infty, & I = (-\infty, b] \\ +\infty, & I = (a, +\infty) \\ +\infty, & I = (-\infty, +\infty) \end{cases}$ Für $I = \bigsqcup_{j=1}^n I_j, \ell(I) := \sum_{j=1}^n \ell(I_j)$.

Frage: Ist $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \ell)$ ein Maßraum? Nein, denn $\mathcal{F}$ ist keine σ -Alg! Nicht abg. unter abzählb. Vereinigungen

Def: X eine Menge, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{A}$ heißt **Algebra**, wenn 1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$ 2. $E \in \mathcal{A} \Rightarrow X - E \in \mathcal{A}$ 3. $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow E_1 \cup \dots \cup E_n \in \mathcal{A}$
ohne σ disjunkte Mengen $\rightarrow$ Verein. $\sum$ unendl. $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, b - \frac{1}{n})$ wird aber nie $b \Rightarrow (-\infty, b) \notin \mathcal{F}$

Bsp: $\mathcal{F}$ ist eine Algebra

23/10/15 | Letztes Mal: Algebra $\mathcal{F}$, Längenfkt $\ell: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$

Def: Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra. Ein **Maß auf $\mathcal{A}$** ist eine Fkt $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$, sd

1. $\mu(\emptyset) = 0$

2. $\mu(E) \geq 0$

3. Wenn $(E_n) \subset \mathcal{A}$ eine disjunkte Folge ist mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$, dann gilt: $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$

Hilfssatz: Sei $(E_n) \subset \mathcal{A}$ mit $\bigcup E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu(\bigcup E_n) \leq \sum \mu(E_n)$ "Subadditivität"

Satz: ℓ ist ein Maß auf $\mathcal{F}$.

Bew: 1. u. 2. klar

3. Es genügt $\forall I = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, $I, I_j \in \mathcal{F}(a, b], (-\infty, b], (a, +\infty), (-\infty, +\infty)$. Wir behandeln nur den Fall $I = (a, b]$, Rest: Übung. $(a, b] = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j]$

• $\ell(a, b] \geq \sum_{j=1}^{\infty} \ell(a_j, b_j]$: Durch Umindizieren: $a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq b$.

$$\ell(a, b] = b - a \geq \sum_{j=1}^n (b_j - a_j) = \sum_{j=1}^n \ell(a_j, b_j]. \quad n \text{ bel., } n \rightarrow \infty: \ell(a, b] \geq \sum_{j=1}^{\infty} \ell(a_j, b_j]$$

• $\ell(a, b] \leq \sum_{j=1}^{\infty} \ell(a_j, b_j]$: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\varepsilon_j > 0$ mit $\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j < \varepsilon$.

$\exists j_0: a_{j_0} - a < \frac{\varepsilon}{2}$. Umindizieren $j_0 = 1$. $a_1 - a < \frac{\varepsilon}{2}$. $I_1 := (a_1 - \frac{\varepsilon_1}{2}, b_1 + \frac{\varepsilon_1}{2}) \Rightarrow a \in I_1$

$j \geq 2: I_j = (a_j, b_j + \varepsilon_j) \Rightarrow [a, b] \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$. $\{I_j\}_j$ ist eine offene Überdeckung des kompakten Intervalls $[a, b]$. $\Rightarrow \exists m: [a, b] \subset I_1 \cup \dots \cup I_m$. Umindizieren falls nötig

$$b - a \leq (b_m + \varepsilon_m) - (a_1 - \frac{\varepsilon_1}{2}) \leq (b_m + \frac{\varepsilon_m}{2}) - (a_1 - \frac{\varepsilon_1}{2}) + \sum_{j=2}^m (b_j + \varepsilon_j - a_j) \\ = (b_m - a_1) + \varepsilon_1 + \sum_{j=2}^m ((b_j - a_j) + \varepsilon_j) = \sum_{j=1}^m (b_j - a_j) + \sum \varepsilon_j \leq \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) + \varepsilon.$$

Da ε bel. $\Rightarrow \ell(a, b] = b - a \leq \sum_{j=1}^{\infty} \ell(a_j, b_j]$ $\square$

Sei X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine Algebra auf X , μ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Wir wollen $\mathcal{A}$ zu einer σ -Alg. $\mathcal{A}^*$ erweitern, sd $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$ und μ sich zu einem Maß μ^* auf $\mathcal{A}^*$ fortsetzen lässt.

Def: Sei $B \subset X$ bel.

$\mu^*(B) = \inf \{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \mid (E_n) \subset \mathcal{A}, B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \}$ B von außen approximieren durch Mengen auf denen ein Maß μ schon erklärt ist
wirkt additiv! Man nennt $\mu^*(B)$ das **äußere Maß** von B , obwohl $\mu^*: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ gar kein Maß sein muss.

Eigenschaften: $\mu^*(\emptyset) = 0$. $\mu^*(B) \geq 0 \quad \forall B$. Wenn $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

Lemma: (I) Wenn $B \in \mathcal{A}$, dann $\mu^*(B) = \mu(B)$

(II) Subadditivität: $(E_n), E_n \subset X$, dann $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$

Bew: (I) • $B \in \mathcal{A}$. $E_1 := B, E_2 := \emptyset, E_3 := \emptyset, \dots \Rightarrow (E_n) \subset \mathcal{A}, B \subseteq \bigcup E_n$. $\mu^*(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \mu(B) + \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) + \dots$

• Nun zu $\mu(B) \leq \mu^*(B)$: Geg $(E_n) \subset \mathcal{A}, B \subset \bigcup E_n$.

$B = \bigcup (E_n \cap B)$. Hilfssatz $\Rightarrow \mu(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n \cap B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \Rightarrow \mu(B) \leq \mu^*(B)$ $\xrightarrow{\mu(B) = \mu^*(B)}$

(II) $E_n \subset X$. $\varepsilon > 0$. $\exists E_{n,k} \in \mathcal{A}, E_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n,k}: \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{n,k}) - \mu^*(E_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$.

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{n,k}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon. \quad \varepsilon \text{ bel.} \Rightarrow \mu^*(\bigcup E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) \quad \square$$

$\leq \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$

Wir verwenden μ^* um eine geeignete σ -Alg. $\mathcal{A}^*$ zu finden, auf der μ^* abz. additiv ist:

Def: (Carathéodory)

$E \subset X$ heißt μ^* -messbar, wenn $\forall A \subset X$ bel.: $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E)$

Sei $\mathcal{A}^*$ die Familie aller μ^* -messbaren Mengen.

Erweiterungssatz von Carathéodory

Sei X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine Algebra auf X und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$. Dann ist die Familie $\mathcal{A}^*$ der μ^* -messbaren Mengen eine σ -Alg., $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$ und μ^* ein Maß auf $\mathcal{A}^*$.

Bew: $\emptyset \in \mathcal{A}^* : \mu^*(\emptyset) = \mu^*(\emptyset \cap \emptyset) + \mu^*(\emptyset - \emptyset) \checkmark$

$X \in \mathcal{A}^* : \mu^*(X) = \mu^*(X \cap X) + \mu^*(X - X) \checkmark$

$\mathcal{A}^*$ ist abg. unter Komplementbildung: Sei E μ^* -messbar. $\mu^*(A \cap (X - E)) + \mu^*(A - (X - E)) = \mu^*(A) \checkmark$

$\mathcal{A}^*$ ist abg. unter Bildung von endl. Durchschnitten: E, F μ^* -messbar, $A \subset X$ bel.

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E) = \mu^*(A \cap E \cap F) + \mu^*((A \cap E) - F) + \mu^*(A - F)$$

$$\mu^*(A) \stackrel{||}{=} \mu^*(A \cap \underbrace{E \cap F}_B) + \mu^*(\underbrace{A - (E \cap F)}_{:= B})$$

$\Rightarrow$ Wir haben gezeigt: $\mathcal{A}^*$ ist eine Algebra.

28/10/15 X Menge, $\mathcal{A}$ Alg auf X , μ ein Maß auf $\mathcal{A}$.

äußeres Maß: $B \subset X$ bel., nichts zu tun mit $\mathcal{A}$! $\mu^*(B) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \mid E_n \in \mathcal{A}, B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right\}$
 $\hookrightarrow$ abz. subadditiv

$E \subset X$ heißt μ^* -messbar, wenn $\forall A \subset X : \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E)$

$\mathcal{A}^* := \{ \text{alle } \mu^* \text{-messbare Mengen } \subset X \}$

Satz: Erweiterungssatz $\mathcal{A}^*$ ist eine σ -Alg., $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$, und μ^* ist ein Maß auf $\mathcal{A}^*$

Bew: Wir haben schon gezeigt: $\mathcal{A}^*$ ist eine Algebra. Wir zeigen jetzt: μ^* ist (endl.) additiv auf $\mathcal{A}^*$.

E, F μ^* -messbar, $E \cap F = \emptyset$. $A \subset X$. $\mu^*(A \cap (E \cup F)) = \mu^*(A \cap (E \cup F) \cap E) + \mu^*((A \cap (E \cup F)) - E)$
 $= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap F)$

Für $A := X \Rightarrow \mu^*(E \cup F) = \mu^*(E) + \mu^*(F)$

Wir zeigen simultan, dass $\mathcal{A}^*$ eine σ -Alg. ist u. dass μ^* abzählbar additiv auf $\mathcal{A}^*$ ist.

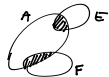
Seien $E_n \subset \mathcal{A}^*$, (E_n) disjunkt, $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. $F_n := E_n \cup \dots \cup E_1 \Rightarrow F_n$ μ^* -messbar. $A \subset X$.

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A - F_n) \geq \sum_{j=1}^n \mu^*(A \cap E_j) + \mu^*(A - E) \quad (\text{da } F_n \subset E \Rightarrow A - F_n \supset A - E)$$

$$n \rightarrow \infty : \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A - E) \leq \mu^*(A) \quad \mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E) \quad (*) \quad (\text{wg Subadditivität})$$

$$* \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A - E) \leq \mu^*(A) \Rightarrow \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E) \Rightarrow E \in \mathcal{A}^* \checkmark$$

Für $A := E : \mu^*(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \mu^*(E - E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) \Rightarrow \mu^*$ abz. additiv $\Rightarrow \mu^*$ ist Maß auf $\mathcal{A}^*$.



- Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$. Sei $E \in \mathcal{A}$. zu zeigen: E ist μ^* -messbar. (Wir wissen schon, dass $\mu^*(E) = \mu(E)$.)
 $A \subset X$ bel. $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E)$ ✓ Bleibt zu zeigen: $\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E) \leq \mu^*(A)$.
 $\varepsilon > 0$. $\exists F_n \in \mathcal{A}$, $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$: $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) - \mu^*(A) \leq \varepsilon$
 $A \cap E$: $\mu^*(A \cap E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(F_n \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n \cap E)$
 $A - E$: $\mu^*(A - E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(F_n - E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n - E)$
 $\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(F_n \cap E) + \mu(F_n - E)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$.
 Da ε bel. $\Rightarrow \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A - E) \leq \mu^*(A)$. Es besteht Gleichheit $\Rightarrow E \in \mathcal{A}^*$ □

"Es wäre natürlich
 public gewesen
 wenn es nicht klappt"

Anwendung: Das Lebesgue-Maß

Wir wenden den Erweiterungssatz an auf $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{F}, \ell)$ Wir wissen schon, dass ℓ längenft. ein Maß auf $\mathcal{F}$ ist.

Wir erhalten eine σ -Alg. $\mathcal{F}^*$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^*$, und ein Maß ℓ^* auf $\mathcal{F}^*$.

Def: $\mathcal{F}^*$ heißt Familie der **Lebesgue-messbaren** Mengen in $\mathbb{R}$. $\lambda := \ell^*$ heißt **Lebesgue-Maß** auf $\mathcal{F}^*$.

$\mathcal{K}(\mathcal{F})$ ist (nach Def) die kleinste σ -Alg., die $\mathcal{F}$ enthält $\Rightarrow \mathcal{F} \subset \mathcal{K}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}^*$. $\mathcal{K}(\mathcal{F}) = \mathcal{B}$, die Borel σ -Algebra.
 $\Rightarrow \mathcal{F} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{F}^*$

Kor: Borelmengen sind Lebesgue-messbar. Insbesondere sind alle offenen Mengen $\subset \mathbb{R}$ Leb.-messbar.

Bem: Es gilt $\mathcal{B} \neq \mathcal{F}^*$.

Wir konstruieren später ein Bsp. einer nicht Leb.-messbaren Menge. Dazu benötigt man aber:

TRANSLATIONSINVARIANZ DES LEBESGUE-MASSES

$x \in \mathbb{R}$ fest. $E+x := \{y+x \mid y \in E\}$ verschobene Menge

Lemma: Wenn $E \in \mathcal{F}$, dann $E+x \in \mathcal{F}$ und $\ell(E+x) = \ell(E)$

Bew: $(a, b] + x = (a+x, b+x]$. $(-\infty, a] + x = (-\infty, a+x]$ etc

$$\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right) + x = \bigcup_{j=1}^{\infty} (I_j + x) \quad \ell((a, b] + x) = \ell((a+x, b+x]) = (b+x) - (a+x) = b-a = \ell((a, b]) \quad \text{etc} \quad \square$$

Prop 1: $E \subset X$ bel. $\Rightarrow \ell^*(E+x) = \ell^*(E)$

Bew: Sei $\varepsilon > 0$. $\ell^*(E) = \inf \{ \sum \ell(E_n) \mid F_n \in \mathcal{F}, E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \} \Rightarrow \exists F_n \in \mathcal{F}, E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n : \sum_{n=1}^{\infty} \ell(F_n) - \ell^*(E) \leq \varepsilon$ (*)
 $E+x \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n+x)$. $\ell^*(E+x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(F_n+x) \stackrel{\text{Lemma}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \ell(F_n) \stackrel{(*)}{\leq} \ell^*(E) + \varepsilon$. ε bel. $\Rightarrow \ell^*(E+x) \leq \ell^*(E)$

Anderer Ungleichung folgt sofort aus $\ell^*(E) = \ell^*((E+x)-x) \leq \ell^*(E+x) \Rightarrow \ell^*(E+x) = \ell^*(E)$ □

Prop 2: $E \in \mathcal{F}^* \Rightarrow E+x \in \mathcal{F}^*$.

Bew: Sei $A \subset X$ bel. $\ell^*(A \cap (E+x)) + \ell^*(A - (E+x)) = \ell^*((A'+x) \cap (E+x)) + \ell^*((A'+x) - (E+x))$
 $= \ell^*((A' \cap E) + x) + \ell^*((A' - E) + x) \stackrel{\text{Prop 1}}{=} \ell^*(A' \cap E) + \ell^*(A' - E) = \ell^*(A') \stackrel{\text{Prop 1}}{=} \ell^*(A-x) \stackrel{\text{Prop 1}}{=} \ell^*(A)$
 $\Rightarrow E+x$ ist ℓ^* -messbar. □

Zusammenfassend: Ist $E \subset \mathbb{R}$ Leb.-messbar, dann auch $E+x$, und $\lambda(E+x) = \lambda(E)$.

Haar-Maß ?!

BEISPIEL EINER NICHT LEBESGUE-MESSBAREN MENGE

Äquivalenzrel. $\sim$ auf $\mathbb{R}$: $x, y \in \mathbb{R}$. $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$

$\leadsto$ Äqu. Klassen $[x]$. $\mathbb{R}/\mathbb{Q} := \{[x] \mid x \in \mathbb{R}\}$

Für jede Klasse $\xi \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$, wähle einen Repräsentanten x_ξ in $(0, 1)$: $\xi = [x_\xi]$. $E := \{x_\xi \mid \xi \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}\} \subset (0, 1)$

Beh: E ist nicht Leb.-messbar.

► $x \in (0, 1)$. $[x] = \xi = [x_\xi] \Rightarrow x - x_\xi = r \in \mathbb{Q}$. $x = x_\xi + r$, also $x \in E + r$. $|r| = |x - x_\xi| \leq 1$, d.h. $r \in (-1, +1)$

► Wenn $r, s \in \mathbb{Q}$, $r \neq s$, dann $(E + r) \cap (E + s) = \emptyset$:

$$x_\xi + r = x_\eta + s \Rightarrow x_\xi - x_\eta = s - r \in \mathbb{Q} \Rightarrow \xi = [x_\xi] = [x_\eta] = \eta \Rightarrow x_\xi = x_\eta \Rightarrow r = s \text{ im Ann.}$$

$$S = \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{Q} \\ r \in (-1, 1)}} (E + r). \text{ Ang } E \text{ wäre } \lambda\text{-messbar} \Rightarrow \text{auch } S \text{ } \lambda\text{-messb.}$$

$$S \subset (-1, 2) \Rightarrow \lambda(S) \leq \lambda((-1, 2)) = 3$$

$$\stackrel{\text{unv. E u. r}}{=} \sum \lambda(E + r) = \sum \lambda(E)$$

obere Schranke 3
 $\Rightarrow$ konvergiert
aber gleiche Zahl
 $\Rightarrow \lambda(E) = 0$

$$\Rightarrow \lambda(E) = 0. \Rightarrow \lambda(S) = 0$$

$$(0, 1) \subset S \text{ wg } * \Rightarrow 1 = \lambda((0, 1)) \leq \lambda(S) \not\leq 0$$

kann nicht = 0 und ≤ 1 sein!

$\Rightarrow E$ nicht λ -messb.

