

Nachfolgend findet Ihr einige Aufgaben, von denen ich denke, dass diese so oder so ähnlich auch in der Klausur gestellt werden könnten. Die Aufgaben variieren in Schwierigkeit und Anwendungsgebiet. Es ist selbsterklärend, dass ein erfolgreiches Lösen dieser Aufgaben keine Garantie ist, dass man eine gute Note in der Klausur erreichen wird. Genauso selbsterklärend ist aber auch, dass man besser im Umgang mit Aufgaben wird, je mehr Übungsaufgaben man rechnet.

1. Vollständige Induktion

Aufgabe 1.1

Beweisen Sie per vollständiger Induktion, dass

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 1.2

a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in [-1, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$ die folgende Ungleichung gilt:

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in (0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{\ln(1+nx)}{\ln(1+x)} \leq n.$$

(Tipp: Versuchen Sie nicht, den Beweis per Induktion zu führen.)

2. Grenzwertaufgaben

Aufgabe 2.1 (Folgenkonvergenz)

Entscheiden Sie, welche der unten stehenden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert:

a) $a_n := n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right),$

b) $a_n := \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n, \quad x \in \mathbb{R},$

c) $a_n := \frac{3n^5 - n^2}{2n^5 + 1}.$

Aufgabe 2.2 (Rekursive Folgen)

Sei die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ gegeben durch

$$a_0 := 1, \quad a_{n+1} := \sqrt{a_n} + 2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- a) Zeigen Sie: Falls die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, dann gilt für den Grenzwert $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$:

$$a - \sqrt{a} = 2.$$

- b) Bestimmen Sie diesen Grenzwert.
c) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch tatsächlich konvergiert.

Aufgabe 2.3 (Häufungspunkte)

Die reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei gegeben durch

$$a_n := (-1)^{n+1} \frac{2n+10}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- a) Zeigen Sie, dass die Folge $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
b) Berechnen Sie die Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und geben Sie für jeden Häufungspunkt eine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an, die gegen diesen Häufungspunkt konvergiert.

Aufgabe 2.4 (Reihen)

- a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

- (i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{11^k}$ (Zusatz: Falls diese Reihe konvergiert, was ist der Grenzwert?),
- (ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$
- (iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!},$
- (iv) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k + \sin(k)}{k^2 - 1}.$

- b) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, \infty)$ eine Folge, sodass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann auch die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2$$

konvergiert.

- c) Für welche $q \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} q^k$$

und für welche q divergiert sie? (Begründen Sie Ihre Antwort.)

Aufgabe 2.5 (l'Hospital)

- a) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x}{e^x - 1}$. Begründen Sie alle Zwischenschritte.

- b) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf ganz $\mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar ist. Zeigen Sie, dass dann für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f'''(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 2h) + 3f(x_0 + h) - f(x_0)}{h^3}.$$

Aufgabe 2.6 (Gleichmäßige Konvergenz)

Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$. Man sagt, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

- a) Geben Sie die Negation der obigen Aussage an. Formulieren Sie diese in Quantorenschreibweise und mit Worten.
- b) Konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n(x) := x^n$ auf dem Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion? Begründen Sie Ihre Antwort.
- c) Konvergiert die Funktionenfolge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $g_n(x) := x^{1/n}$ auf dem Intervall $(0, 1]$ gleichmäßig? Wenn ja, was ist die Grenzfunktion?

3. Stetigkeit

Aufgabe 3.1

- a) Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Beweisen Sie, dass dann auch die Funktion

$$\begin{aligned} \min(f, g) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \min f(x), g(x) \end{aligned}$$

stetig ist.

- b) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige, beschränkte Funktion. (Wdh: f beschränkt bedeutet, dass $\exists a, b \in \mathbb{R} : a \leq f(x) \leq b \forall x \in \mathbb{R}$). Zeigen Sie, dass dann ein $x_0 \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $f(x_0) = x_0$. Bemerkung: Solch ein x_0 nennt man Fixpunkt von f .

Aufgabe 3.2

Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = 1 - 2|x - 2n| \quad \text{für } x \in (2n - 1, 2n + 1] \text{ und für } n \in \mathbb{Z}.$$

- a) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

b) Untersuchen Sie, ob die Funktion $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) := f(\frac{1}{x})$ stetig ist.

c) Untersuchen Sie, ob die Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(x) := \begin{cases} x g(x) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

stetig ist.

Aufgabe 3.3 (Stetigkeit und Kompaktheit)

Sei $K \subset \mathbb{R}$ eine kompakte Teilmenge, d.h. jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ besitzt eine in K konvergente Teilfolge, und sei $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Beweisen Sie bitte, dass dann auch $f(K) \subset \mathbb{R}$ eine kompakte Teilmenge ist.

4. Differentiation und Integration

Aufgabe 4.1 (Ableitungen)

Sind folgende Funktionen differenzierbar. Falls ja, berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x^{1/3}(1-x)^{2/3}(1+x)^{1/2}$,

b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := 2^{(x^2)}$,

c) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(x) := \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

Wo liegen die Maxima/Minima der Funktion g ?

Aufgabe 4.2 (Zweite Ableitung)

Zeigen Sie dass die Funktion $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, die durch die Zuordnung

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & \text{für } x \geq 0, \\ -\frac{1}{2}x^2, & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

gegeben ist, auf $(-1, 1)$ stetig differenzierbar, aber nicht zweimal differenzierbar ist.

Aufgabe 4.3 (Stammfunktionen)

Bestimmen Sie alle Stammfunktionen der folgenden Abbildungen:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x \cdot (\pi - x) \cdot \sin(x)$,

b) $g : [0, 1] \cup [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) := 8x \cdot \sin(x^2)$,

c) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) := \cos(x) \cdot e^x$.

Aufgabe 4.4 (Integrale)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a)

$$I_1 := \int_0^2 x \cdot e^{-x^2} dx,$$

b)

$$I_2 := \int_1^x t \cdot \ln(t) dt.$$

Aufgabe 4.5 (Taylorentwicklung)

Sei die Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{x}$. Berechnen Sie das Taylorpolynom 5. Grades von f um die Entwicklungsstelle $x_0 = 1$, $T_5 f(x; x_0)$, und geben Sie eine Formel für das Restglied

$$R_5 f(x; x_0) := f(x) - T_5 f(x; x_0)$$

an.