



**Ruprecht-Karls-Universität
Heidelberg**

Mathematisches Institut

PROF. DR. MARKUS BANAGL

D-69120 Heidelberg

Im Neuenheimer Feld 288

Telefon: (06221) 54-5763

Telefax: (06221) 54-8312

email:
banagl@mathi.uni-heidelberg.de

ANALYSIS I ÜBUNGSAUFGABEN 10 X-MAS Special

DEADLINE: Fr. 9. 1. 2015, 16:00.

Aufgabe 1 ist abzugeben; Aufgabe 2 ist optional, kann aber zum zusätzlichen Erwerb von Punkten genützt werden.

1. Es werden n Messungen einer gewissen von einem Parameter x abhängigen Größe durchgeführt. Für den Parameterwert x_i , $i = 1, \dots, n$, ergibt die Messung den Wert y_i . (Nicht alle x_i sind 0.) Auf der Basis der Messresultate soll die Größe bestmöglich durch eine lineare Funktion $f(x) = ax$ approximiert werden. Bestmöglich bedeutet hier, dass der Fehler $\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2$ minimal werden soll. Wie muss $a \in \mathbb{R}$ gewählt werden?
2. Ein Problem der Mechanik: Diese Aufgabe geht zurück auf den einflussreichen Topologen Hassler Whitney. Ein Zug fährt von Station A zu Station B entlang einer geraden Strecke. Dabei kann er beliebig beschleunigen und bremsen, stehenbleiben, sogar rückwärts fahren, bis er schließlich B erreicht. Die exakte Bewegung des Zuges ist aber im Voraus bekannt, d.h. die Funktion $s = s(t)$ ist gegeben, wobei s die Entfernung des Zuges von Station A ist und t die Zeit, die seit dem Start vergangen ist. Auf dem Boden eines Wagens des Zuges ist eine Stange so an ihrem einen Ende angebracht, dass sie sich frei in einer Ebene senkrecht zum Boden reibungslos drehen lässt (siehe Skizze auf der nächsten Seite). Die Extremalpositionen der Drehung sind die beiden Stellungen, in denen die Stange horizontal auf dem Boden liegt. Wenn die Stange während der Fahrt den Boden berührt, dann bleibt sie bis zum Ende in dieser Stellung liegen. (Sie wird also nicht etwa durch Vibrationen wieder hochbewegt.) Ist es möglich, vor Beginn der Fahrt die Stange so zu positionieren, dass sie, wenn sie genau im Moment des Losfahrens losgelassen wird, und sich dann nur mehr unter dem Einfluss der Gravitation und der Bewegung des Zuges bewegt, während der gesamten Fahrt des Zuges nie zu Boden fällt?

Hinweis: Diese Aufgabe lässt sich nur mit den Methoden der Vorlesung lösen und erfordert keinerlei physikalische Kenntnisse. Es genügt zu wissen: Die physikalischen Gesetze implizieren, dass die Bewegung der Stange stetig von ihrer Ausgangsposition abhängt.

