



Ruprecht-Karls-Universität
Heidelberg

Mathematisches Institut

PROF. DR. MARKUS BANAGL

D-69120 Heidelberg

Im Neuenheimer Feld 288

Telefon: (06221) 54-5763

Telefax: (06221) 54-8312

email:
banagl@mathi.uni-heidelberg.de

ANALYSIS I ÜBUNGSAUFGABEN 9

DEADLINE: Fr. 19. 12. 2014, 16:00.

1. Man nennt eine Menge $U \subset \mathbb{R}$ *offen*, wenn ihr Komplement $\mathbb{R} - U$ abgeschlossen ist. Zeigen Sie: U ist offen genau dann, wenn jedes $x \in U$ eine ϵ -Umgebung $(x - \epsilon, x + \epsilon)$, ($\epsilon > 0$) besitzt, die ganz in U enthalten ist. Zeigen Sie weiter folgende Aussagen: Ist $\{U_i\}_{i \in I}$ eine beliebige Familie von offenen Teilmengen, dann ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen. Ist die Indexmenge I endlich, dann ist $\bigcap_{i \in I} U_i$ offen. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig genau dann, wenn das Urbild $f^{-1}(U)$ jeder offenen Menge $U \subset \mathbb{R}$ wieder offen ist.
2. Beweisen Sie:
 - (a) $\cos : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton fallend.
Hinweis: Drücken Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die Differenz zwischen zwei Cosinus-Werten als Produkt zweier Sinus-Werte aus. Warum ist $\sin x > 0$ für $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$?
 - (b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt
$$\cos(x+\pi) = -\cos x, \quad \sin(x+\pi) = -\sin x, \quad \cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin x, \quad \sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos x.$$
 - (c) Ermitteln Sie alle Nullstellen von $\cos, \sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 - (d) Finden Sie alle reellen Lösungen x der Gleichung $\exp(ix) - 1 = 0$.
3. (Landau-Symbol “ o ”.) Für zwei Funktionen $f, g : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ schreiben wir $f(x) = o(g(x))$ für $x \rightarrow \infty$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $x_0 > a$ existiert mit $|f(x)| \leq \epsilon|g(x)|$ für alle $x \geq x_0$. (Dies ist lediglich als Schreibweise, nicht als Gleichung zu verstehen.) Beweisen Sie, dass für jedes $k = 1, 2, 3, \dots$:

$$\log x = o(\sqrt[k]{x}).$$

Der Logarithmus wächst also langsamer als jede Wurzelfunktion.

4. Für welche $x \in [0, \infty)$ ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ differenzierbar? Berechnen Sie die Ableitung von $f(x) = x^x$.