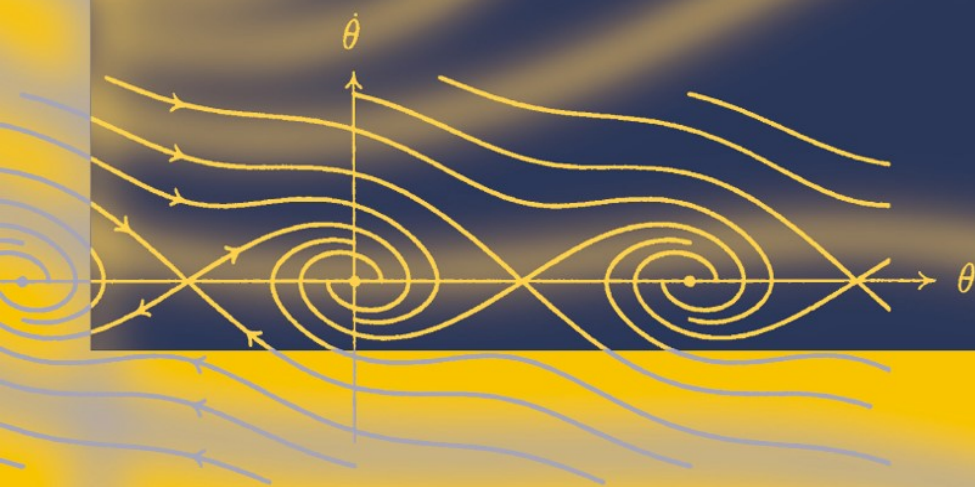


Jänich Mathematik 1

Geschrieben für Physiker



2., korrigierte Auflage



Springer

Klaus Jänich

Mathematik 1

Geschrieben für Physiker

Zweite, korrigierte Auflage

Prof. Dr. Klaus Jänich
Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
93040 Regensburg
Deutschland
e-mail: klaus.jaenich@mathematik.uni-regensburg.de

Mathematics Subject Classification (2000): 15-01, 26-01, 34-01, 42-01, 54-01

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <<http://dnb.ddb.de>> abrufbar.

ISBN 3-540-21392-9 Springer Berlin Heidelberg New York

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media

springer.de

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005
Printed in Germany

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Satz: Datenerstellung durch den Autor unter Verwendung eines $\text{\TeX}$ -Makropakets
Einbandgestaltung: *design & production* GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier 44/3142/at - 5 4 3 2 1 0

Vorwort zur zweiten Auflage

Versteht sich, dass ich alle mir bekannt gewordenen Druckfehler korrigiert habe, und die Hoffnung, dass dies auch fast alle *vorhanden* *gewesenen* Druckfehler waren, verdanke ich Torsten Becker und Ulrich Riegel, wie im Vorwort des zweiten Bandes schon berichtet, sowie Herrn Dieter Schüler vom Ketteler-Kolleg in Mainz. Ihnen und jenen Lesern, die mich auf einzelne Versehen aufmerksam gemacht haben, sei nochmals herzlich gedankt.

Ich ergreife die Gelegenheit, unten auch gleich noch die Berichtigungen der wenigen mir bekannten sinnstörenden Druckfehler des *zweiten* Bandes anzugeben.

Langquaid, im August 2004

K. Jänich

Druckfehler im zweiten Band, 1. Auflage 2002. Die Zeilenangabe "68-5" bedeutet "Seite 68, fünfte Zeile von unten": 68-5: Statt " C^r " setze " C^{r+1} " (oder kurz: 68-5: $C^r :: C^{r+1}$) /112, Figur: $f :: \Psi$ /322-13: werden und $::$ und werden /348-11: $\alpha(t)^{k-1}\dot{\alpha}(t) :: k\alpha(t)^{k-1}\dot{\alpha}(t)/$.

Vorworte zur ersten Auflage

Vorwort für Studienanfänger

Dieses Buch habe ich für Erstsemester mit dem Studienziel *Diplom in Physik* geschrieben. Es ist der erste Teil eines dreiteiligen Kurses, der die Mathematik bis zum Vordiplom behandelt. Am zweiten Band schreibe ich derzeit emsig, er soll im Frühjahr 2002 erscheinen. Der dritte Teil des Kurses besteht in dem schon länger vorhandenen Buch *Analysis für Physiker und Ingenieure*, Springer-Verlag, 4. Auflage 2001.

Die mathematische Ausbildung der Physiker bis zum Vordiplom umfasst gewöhnlich vier, an manchen Universitäten auch fünf Mathematikvorlesungen mit Übungen. Behandelt werden darin jedenfalls Differential- und Integralrechnung in einer und mehreren Variablen, lineare Algebra, Differentialgleichungen, Vektoranalysis und Funktionentheorie als unverzichtbare Bestandteile, und darüber hinaus in wechselndem Umfang speziellere mathematische Themen von physikalischem Interesse.

Der Aufbau dieser Kurse ist von Universität zu Universität und innerhalb einer Universität von Dozent zu Dozent verschieden. Das Grundstudium der Mathematiker, obwohl variabel genug, wirkt dagegen geradezu uniform. Die Aufgabe scheint so problematisch zu sein, dass nach einer besseren Lösung immerfort gesucht wird. Tatsächlich ist die mathematische Ausbildung der Physiker mit zwei tief wurzelnden Schwierigkeiten konfrontiert, die ich schlagwortartig so kennzeichnen will:

- “Die Mathematik kommt immer zu spät.”
- Mathematiker und Physiker sprechen nicht dieselbe mathematische Sprache.

Das Erste werden Sie bald selbst bemerken: in den Physikvorlesungen werden mathematische Techniken verwendet, die in den Mathematikvorlesungen noch nicht dran waren. Das zweite Problem ist anfangs weniger spürbar, nimmt aber mit wachsendem Niveau zu und wird auch nicht, wie doch schließlich das erste, von der Zeit geheilt.

Nanu, denken Sie, warum können die sich nicht einigen, inhaltlich und sprachlich? — Das ist nicht so einfach wie ein Außenstehender meinen sollte, weil die Probleme in die unterschiedlich gewachsenen Strukturen der beiden Wissenschaften hinabreichen. Es wird aber *manches* getan. Eine vielerorts ergriffene Notmaßnahme sind von Physikern gehaltene Zusatzvorlesungen und -übungen mit Titeln wie *Mathematische Ergänzungen für Physiker*, in denen knapp und pragmatisch die Rechtzeitigkeit der Inhalte und die Bekanntschaft mit der mathematischen Sprache der Physiker hergestellt werden.

Ich will die Notwendigkeit solcher Zusatzveranstaltungen unter den jeweiligen Umständen nicht bestreiten, aber es ist kein Geheimnis, dass sie noch nicht vorhandenes mathematisches Verständnis in der Regel auch nicht herbeiführen können und die Sprachschwierigkeiten zwischen den Fächern nicht abbauen helfen.

Der Kurs, dessen ersten Band Sie hier in Händen haben, macht den entschlossenen Versuch, Rechtzeitigkeit des Stoffes, aus physikalischer Sicht, mit der systematischen Entwicklung der mathematischen Einsicht zu verbinden. Auf Unterschiede der mathematischen Sprache in Mathematik und Physik gehe ich immer wieder ein und gebe Übersetzungshilfe.

Lassen Sie sich eine *Gebrauchsanweisung* dieses ersten Bandes gefallen, Sie müssen ja nicht danach handeln, nur zu Ihrer Information, wie es eigentlich damit gemeint sei. Der Band entspricht einem Lehrumfang von sechs Semesterwochenstunden Vorlesung mit doppeltem Übungsbetrieb (“6+4”), also wie zwei dreistündige Vorlesungen mit Übungen. Das ist zwar stundenmäßig weniger als das

klassische Erstsemesterpensum aus Analysis I (4+2), Linearer Algebra I (4+2) und Mathematischen Ergänzungen I (2+2), aber trotzdem eine ganze Menge. Sie sollten im ersten Semester damit fertig werden, eigentlich schon ein bis zwei Wochen vor Semesterende, denn die ersten beiden Kapitel des zweiten Bandes gehören auch noch zum Stoff des ersten Semesters.

Es zwingt Sie niemand. Aber wenn Sie den Inhalt des Bandes über drei Semester verzetteln, dann ist's mit der Rechtzeitigkeit natürlich Essig, und die Tricks, die ich mir ausgedacht habe, um gewisse Begriffe in einem sehr frühen Stadium zugänglich zu machen, sind für die Katz' — was ja weiter kein Unglück wäre, ich suche nur die Forderung abzulehnen, der Band müsse, weil er so dick aussieht, für mehrere Semester reichen.

Könnte man, um Zeit zu gewinnen, vielleicht schon vor Studienbeginn anfangen, diesen Band durchzuarbeiten? — Ganz gewiss, auch in der zwölften Jahrgangsstufe des Gymnasiums schon, ich sehe gar keinen Grund, weshalb das zu schwierig sein sollte. Wenn ich wüsste, wie die künftigen Physikstudenten unter den Schülern zu erreichen wären, würde ich ihnen das Buch empfehlen! Bei aller Eignung zum Selbststudium, die mein Buch vielleicht mehr als andere hat, muss ich aber doch eine Einschränkung machen: kein Buch kann einen richtigen universitären *Übungsbetrieb* ersetzen.

Ich weiß schon, Sie stellen sich das ganz einfach vor, der Autor brauche ja nur die Lösungen zu den Übungsaufgaben mit abzudrucken, dann kann der Benutzer des Buches seine eigenen Lösungen damit vergleichen und eventuelle Fehler berichtigen. Klingt ganz vernünftig, funktioniert aber nicht. Das fängt damit an, dass es "die Lösung" gar nicht gibt. Ihre Lösung weicht von der Lösung im Buche ab. Und nun? Ist sie deshalb falsch? Sie ist vielleicht besser! Aber das sagt Ihnen niemand.

Der Lebensnerv eines wirksamen Übungsbetriebes ist die *individuelle Korrektur*. Es gehört aber noch mehr dazu: mit anderen Übungsteilnehmern über die neuen Aufgaben zu sprechen, Professor und Assistenten in den Fragestunden zur Rede zu stellen, mit dem Übungsgruppenleiter über die Korrektur zu streiten, zu sehen, dass man nicht der Einzige ist, der die eine schwierige Aufgabe nicht herausgebracht hat, für eine gute Idee auch Anerkennung zu finden usw.

Die Aufgaben im meinem Buch sind alle im Übungsbetrieb wirklich gestellt gewesen, allerdings sind es die Aufgaben aus zwei Jahrgängen. Pro Woche bestand das Aufgabenpensum im ersten Semester immer aus vier Rechen- und vier Theorieaufgaben, darauf bezieht sich die Kennzeichnung "R" und "T". Schauen Sie die Aufgaben an, versuchen Sie den Bezug zum neu behandelten Stoff herzustellen, lösen Sie manche, aber seien Sie nicht deprimiert, wenn Ihre Ausdauer dabei nicht sehr weit reicht. Das hat psychologische Gründe, Sie stoßen hier auf natürliche Grenzen des Selbststudiums. Engagieren Sie sich aber mit vollem Einsatz im Übungsbetrieb Ihres Universitätsstudiums.

Die anderen beiden Teile meines Kurses, für das zweite und dritte Semester, haben je den Umfang 4+2. Wenn Sie den ganzen Kurs durchlaufen haben, sollten Sie, was die Mathematik angeht, für das Vordiplom in Physik gerüstet sein.

Vorwort für höhere Semester

Ob Ihnen dieses Buch etwas nützen kann? Ich weiß es nicht. Vielleicht blättern Sie ein wenig darin und finden eine Stelle, bei der Sie denken: 'da schau! Warum hat *uns* das niemand gesagt?' und Sie lesen sich ein Viertelstündchen darin fest. Sollte mich freuen! Allerdings muss ich gestehen, dass ich beim Schreiben absichtlich nicht an Sie gedacht, sondern mich ganz auf die Anfänger konzentriert habe.

Sie würden das Buch zur Prüfungsvorbereitung nutzen, wenn es nicht so weitschweifig wäre? Zu schade. Aber alles hat seine Zeit. Dieses Buch ist kein Kompendium, das vorhandene Kenntnisse Revue passieren lässt, sondern soll helfen, sich diese Kenntnisse ein allererstes Mal zu erarbeiten, und dabei gelten andere Gesetze als bei der Prüfungsvorbereitung.

Sollten Sie gleichwohl Verwendung für das Buch finden, so werde ich mich geschmeichelt fühlen. Eine Bitte aber habe ich. Wenn Sie als gestandener Akademiker sich beim Lesen fragen: 'Wie red't denn der mit mir?', so geben Sie sich doch, noch bevor Sie ärgerlich werden, die Antwort: 'Wie mit einem Anfänger'. Es ist nämlich ein Buch für Erstsemester.

Vorwort für Kollegen

Dem Buch liegt eine sechsstündige Vorlesung zugrunde. Mein erstes Ziel war, in einer physikverträglichen Reihenfolge alles das an Mathematik auf die Beine zu stellen, was die Physiker im ersten Semester in ihren Vorlesungen direkt oder atmosphärisch brauchen. Das ist etwas Differential- und Integralrechnung in einer und mehreren Variablen, Differentialgleichungen, besonders lineare, Fourierreihen und die zu all dem gehörige lineare Algebra. Daraus wurden die Kapitel 1-17, etwa neun bis zehn Wochen der Vorlesung entsprechend.

Wenn ich das erreichen will, darf ich natürlich nicht schon in der ersten Woche mit der Einführung der reellen Zahlen im Stau stehen. Das bedeutet aber nicht, dass ich eine populärwissenschaftliche oder propädeutische Darstellung wähle, sondern ich mache es wie jeder, der ein Lehrbuch für Fortgeschrittene schreibt: ich setze einiges als bekannt voraus.

Ob das “geht”, hängt nicht nur davon ab, inwieweit die vorausgesetzten Kenntnisse bei den Hörern wirklich vorhanden sind, sondern auch davon, welche operative Rolle diese Voraussetzungen im Fortgang der Vorlesung tatsächlich spielen. Darüber nachzudenken bietet eine orthodox aufgebaute Anfängervorlesung wenig Anlass, aber ich fand, dass es ganz wunderbar *geht*. (Betroffen sind besonders jene Schlüsse, die von der Vollständigkeit der reellen Zahlen Gebrauch machen. Ich halte die Interessenten durch Fußnoten¹ auf dem Laufenden, wenn in einem unterdrückten Beweis die Vollständigkeit benutzt wird.) Da es sich um Anfänger handelt, nehme ich auf diese Weise natürlich einen gewissen Kredit auf, der einmal getilgt werden muss. Zuerst wird aber damit gearbeitet, und die Rückzahlung am Ende des ersten Semesters, hier zu Beginn des zweiten Bandes, habe ich in bester Erinnerung. Es ist einfach herrlich, wieviel leichter man sich dann mit den Hörern über

¹Apropos Fußnoten. In meinen jüngeren Jahren bin ich einem eloquenten Spruch auf den Leim gegangen, etwa des Sinnes, Fußnoten seien überflüssig und gehörten in den Text integriert oder aus dem Buch geworfen. Eigene Leseerfahrung hat mir aber gezeigt, wie angenehm die Zusatzinformation sein kann, die der Autor gibt, indem er einer Passage den Fußnotenstatus verleiht, wie man je nach Stimmung alle Fußnoten begierig liest oder froh ist, sie übergehen zu dürfen. In diesem Buch gibt's Fußnoten, aber nur diese am Fuß der Seite, die anderen am Ende des Buches gesammelt.

die Grundlegung der reellen Zahlen verständigen kann als in der ersten Studienwoche, in der die Neulinge diesen zwiebacktrockenen Anbiss doch sehr widerwillig verkosten.

Vorerst befreit vom unmittelbaren Druck der Physikvorlesungen, kann ich in den Kapiteln 18-20 nun eine überfällige Erweiterung des mathematischen Horizonts vornehmen: Axiomatische Methode am Beispiel der Gruppen; Ringe, Körper, Vektorräume über Körpern; topologische und metrische Räume, Kompaktheit, Kategorien. Obwohl ich wahrlich mit der Zeit haushalten muss, gehe ich sorgfältig auf die Quotientenbildung nach Äquivalenzrelationen ein, eine Investition, die sich bald bezahlt macht.

Die Kapitel 21 und 22 bringen die lineare Algebra zu einem akzeptablen Abschluss, wenn auch die Jordansche Normalform fehlt. Jedenfalls können sich die Studenten von hier aus bei Bedarf selbstständig in der linearen Algebra fortbewegen.

Der zweite Band beginnt wie gesagt mit zwei Kapiteln über Grundlagen der reellen Zahlen, Funktionenfolgen und Reihen, die eigentlich noch ins erste Semester gehören. Danach wird die Differentialrechnung in mehreren Variablen fortgesetzt: Taylorentwicklung, Hesseform, kritische Punkte von Funktionen, Umkehrsatz, implizite Funktionen. Dann globale Analysis auf Untermannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$, zunächst als *Analysis unter Nebenbedingungen*, dann als klassische Vektoranalysis und Cartan-Kalkül (im Hinblick auf die Elektrodynamik), schließlich etwas Variationsrechnung und Lagrangetheorie (im Hinblick auf die theoretische Mechanik).

Das dritte Semester, nach dem vorhandenen Buch, bringt die Funktionentheorie, nochmals Differentialgleichungen, und die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Ende des Kurses.

In den ersten beiden Semestern lernen die Kursteilnehmer vieles, das in der Mathematikerausbildung des gleichen Zeitraums nicht enthalten ist. Durch welche mathematischen Defizite wird das erkaufte? Die mathematische *sophistication* ist am Ende des zweiten Semesters, wenn auch auf anderem Wege erworben, derjenigen der Mathematikstudenten gleichwertig. Einige Beweise sind übergangen worden. Wirkliche Defizite sehe ich eigentlich nur zwei: das Fehlen der Vorlesung Lineare Algebra II, sowieso, und das Fehlen der Lebesgueschen Integraltheorie.

Die Frage ist deshalb von Belang, weil manche Studenten sich die Entscheidung, ob sie Physiker oder Mathematiker werden wollen, noch eine Zeitlang offen halten möchten. Nun, nach dem ersten Semester dieses Kurses ist der Übergang ins Mathematikstudium (Analysis II, Lineare Algebra II) sowieso problemlos, wer aber die Entscheidung noch weiter hinausschieben und den Kurs nicht verlassen will, muss eben Lineare Algebra II noch hinzunehmen und kann dann nach dem zweiten Semester immer noch in die Mathematik wechseln, die Lebesgue-Theorie gelegentlich nachlernend — falls die Mathematikstudenten sie überhaupt im zweiten Semester schon hatten.

Ich muss aber gestehen, dass ich über die Modalitäten des Zauderns nur mit Unbehagen rede, denn der beste Ratschlag ist: *entscheide dich bald*. Den Physikstudenten kann ich versichern, dass ich diesen Kurs bewusst so gestaltet habe, dass er keine mathematische Sackgasse ist, sondern den Zugang zu mathematischen Vorlesungen des Hauptstudiums ermöglicht.

Danksagung

Viele Kollegen aus der Physik haben mich bei der Auswahl des Stoffes beraten und meine Fragen beantwortet, welche Inhalte bis wann spätestens bereit stehen sollten. Den meisten Dank schulde ich aber dem Physiker-Kollegen Herrn Prof. Dr. Joachim Keller, der die Übungen mit mir durchführte und die Vorlesung im ersten Jahr durch seine Anwesenheit begleitete.

Herr Keller steuerte die wöchentlichen “Rechenaufgaben” mit den direkten physikalischen Bezügen bei, die ich nun als die R-Aufgaben in das Buch übernehmen durfte, während ich die “Theorieaufgaben” lieferte, mit denen die Begriffe eingeübt werden, die man zum Verstehen der Vorlesung braucht. Die Anwesenheit von Herrn Keller in der Vorlesung, die Fragen und Einwürfe, die er dort als Stimme der Physik vorbrachte, waren sehr hilfreich für mich und für die Hörer.

Das ganze Unternehmen hindurch, auch jetzt noch beim Schreiben des Buches, fühlte ich mich vom Wohlwollen der Fakultät für Physik getragen, und es freut mich besonders, dass sowohl Theoreti-

ker als auch Experimentalphysiker mit dem Gang meiner Vorlesung einverstanden sind.

Meiner eigenen Fakultät danke ich dafür, dass sie es mir trotz der prekären Personalsituation ermöglicht hat, mich vier Semester lang ganz in den Dienst der Nachbarfakultät zu stellen.

Langquaid, den 19. Juni 2001

K. Jänich

Inhaltsverzeichnis

1. Funktionen

1.1 Der Funktionsbegriff.....	1
1.2 Neue Funktionen aus alten.....	4
1.3 Notationsfragen	7
1.4 Erste Beispiele von Funktionen	9
1.5 Exponentialfunktion und Logarithmus	11
1.6 Trigonometrische Funktionen	14
1.7 Die Arcusfunktionen.....	15
1.8 Übungsaufgaben	19

2. Die Ableitung

2.1 Stetigkeit und Differenzierbarkeit	21
2.2 Notationsfragen	24
2.3 Ableitungsregeln	25
2.4 Erste Beispiele	28
2.5 Ableitungen elementarer Funktionen.....	31
2.6 Die Ableitungen der Arcus- und Areafunktionen	35
2.7 Übungsaufgaben	39

3. Integration

3.1 Riemann-integrierbare Funktionen	41
3.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	47
3.3 Partielle Integration	51
3.4 Substitution.....	53
3.5 Übungsaufgaben	59

4. Differentialgleichungen erster Ordnung

4.1 Der Begriff der Differentialgleichung erster Ordnung	61
4.2 Drei Musterbeispiele	67
4.3 Ein Eindeutigkeitssatz für Differentialgleichungen erster Ordnung	72
4.4 Getrennte Variable	75
4.5 Homogene und inhomogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	78
4.6 Gekoppelte Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung	82
4.7 Übungsaufgaben	85

5. Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

5.1 Differentialgleichungen zweiter Ordnung	88
5.2 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung	91
5.3 Konstante Koeffizienten	93
5.4 Übungsaufgaben	101

6. Bereiche und Abbildungen in mehreren Variablen

6.1 Beispiele von Bereichen im $\mathbb{R}^n$	103
6.2 Offene, abgeschlossene und kompakte Bereiche	109
6.3 Abbildungen in mehreren Variablen und ihre Veranschaulichung	113
6.4 Stetigkeit	119
6.5 Übungsaufgaben	121

7. Partielle Ableitungen und Mehrfachintegrale

7.1 Partielle Ableitungen	123
7.2 Mehrfachintegrale	130
7.3 Übungsaufgaben	138

8. Grundbegriffe der linearen Algebra

8.1 Lineare Abbildungen und Matrizen	142
8.2 Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$	150
8.3 Lineare Abbildungen zwischen Untervektorräumen ..	156
8.4 Übungsaufgaben	163

9. Basen und Dimensionen

9.1 Der Begriff der Basis	165
9.2 Basisergänzungssatz und Dimensionsbegriff	172
9.3 Der Rang	177
9.4 Rangbestimmung	181
9.5 Übungsaufgaben	184

10. Lineare Approximation in der Analysis

10.1 Die Jacobimatrix	186
10.2 Die Jacobimatrizen von Kurven und Funktionen ...	192
10.3 Die mehrdimensionalen Ableitungsregeln	198
10.4 Infinitesimale Größen	202
10.5 Übungsaufgaben	210

11. Multilineare Abbildungen und die Determinante

11.1 Multilinearität	212
11.2 Symmetrieeigenschaften	217
11.3 Die Determinante	220
11.4 Übungsaufgaben	230

12. Quadratische Formen, Skalar- und Kreuzprodukt

12.1 Quadratische Formen	231
12.2 Skalarprodukte	238
12.3 Geometrische Bedeutung der Determinante	246
12.4 Das Kreuzprodukt	252
12.5 Übungsaufgaben	255

13. Schwingungen und Fourierreihen

13.1 Erzwungene Schwingungen	258
13.2 Fourierreihen	265
13.3 Drei Konvergenzsätze für Fourierreihen	279
13.4 Übungsaufgaben	289

14. Dynamische Systeme

14.1 Grundbegriffe	291
14.2 Maximale lokale Flüsse	295
14.3 Rede über das Vektorpfeilchen	298
14.4 Phasenflüsse und Phasenportraits	300
14.5 Die Abhängigkeit von den Anfangswerten	304
14.5 Die Universelle Anwendbarkeit des Satzes von Picard-Lindelöf	307
14.7 Vektorfeld und Richtungsfeld	311
14.8 Übungsaufgaben	316

15. Zweidimensionale Systeme mit konstanten Koeffizienten

15.1 Der e-Ansatz	318
15.2 Der Grenzfall	322
15.3 Der komplexe e-Ansatz	324
15.4 Die Phasenportraits	327
15.5 Linearisierung	337
15.6 Übungsaufgaben	341

16. Linienintegrale

16.1 Kurven	343
16.2 Linienintegrale in freier Wildbahn	346
16.3 Linienintegrale über 1-Formen	351
16.4 Vektorfelder und 1-Formen	355
16.5 Konservative Vektorfelder	358
16.6 Übungsaufgaben	364

17. Koordinatentransformationen

17.1 Koordinaten	366
17.2 Transformation von Koordinaten	370
17.3 Die Integraltransformationsformel	374
17.4 Infinitesimale Volumenelemente	377
17.5 Übungsaufgaben	382

18. Algebraische Strukturen

18.1 Der Gruppenbegriff	385
18.2 Ringe und Körper	398
18.3 Der Körper der komplexen Zahlen	403
18.5 Vektorräume	408
18.5 Übungsaufgaben	411

19. Metrik, Topologie und Kompaktheit

19.1 Metrische Räume	414
19.2 Topologische Räume	417
19.3 Kompaktheit	425
19.4 Wie erkennt man kompakte Räume	431
19.5 Übungsaufgaben	440

20. Kategorien und Quotienten

20.1 Kategorien	442
20.2 Äquivalenzrelationen	445
20.3 Quotienten	448
20.4 Quotienten von Gruppen und Vektorräumen	452
20.5 Übungsaufgaben	459

21. Lineare Algebra in K -Vektorräumen

21.1 Was gibt es Neues?	460
21.2 Eigenwerte und Eigenvektoren	465
21.3 Übungsaufgaben	475

22. Lineare Algebra in euklidischen und unitären Räumen

22.1 Euklidische Räume	477
22.2 Selbstadjungierte Operatoren	482
22.3 Die Hauptachsentransformation	488
22.4 Unitäre Räume	500
22.5 Hermitesche Operatoren	508
22.6 Übungsaufgaben	512
Fußnoten und Ergänzungen	515
Register	547

1 Funktionen

1.1 Der Funktionsbegriff

Sie kennen Funktionen aus der Schule, aber selbst vielgebrauchte Fachausdrücke werden nicht immer ganz einheitlich aufgefasst, und wir wollen deshalb eine Begriffsbestimmung vereinbaren:

Definition: Bezeichnet D irgend eine Menge und f eine Zuordnung, die jedem Element $x \in D$ eine bestimmte reelle Zahl $f(x) \in \mathbb{R}$ zuordnet, so schreiben wir $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $x \mapsto f(x)$ und nennen f eine *reellwertige Funktion* mit dem *Definitionsbereich* D . $\square$

Wilhelm Stoll, mein Universitätslehrer in Tübingen, damals ein junger Privatdozent, meinte: “Was heisst *Zuordnung*? Komme die mit der Poscht?” und erklärte uns dann, was Relationen seien und welche besonderen Relationen man Zuordnungen nennt.¹ Die Metapher hat aber auch etwas für sich: wenn Sie sich D als eine Menge von Briefen und $f(x)$ jeweils als den Empfänger von x vorstellen, so versteht es sich, dass jeder Brief x einen und auch nur einen Empfänger $f(x)$ hat, was indessen nicht ausschließt, dass manche Empfänger mehrere Briefe bekommen und manche potentiellen Empfänger leer ausgehen können, und so ist es ja bei den Funktionen auch gemeint.

Vorerst betrachten wir nur Definitionsbereiche $D \subset \mathbb{R}$, am liebsten $D = \mathbb{R}$ selber oder $D = [a, b]$, ein kompaktes Intervall. Das wird aber doch nicht ganz reichen, und wir müssen auch allgemeinere Definitionsbereiche zulassen, aber welche? Da wir unsere Funk-

tionen ableiten wollen, ist nicht jeder Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ für uns geeignet. Wie sollten wir z.B. die Ableitung bilden, wenn f nur an einem einzigen Punkt definiert wäre? Brauchbar sind die *allgemeinen Intervalle*.

Definition: Jede in der folgenden Liste von Teilmengen von $\mathbb{R}$ soll ein *allgemeines Intervall* heißen:

1. Kompakte Intervalle

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad a < b$$

2. Halboffene Intervalle

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \quad a < b$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \quad a < b$$

3. Offene Intervalle

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \quad a < b$$

4. Abgeschlossene Halbstrahlen

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

$$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

5. Offene Halbstrahlen

$$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

$$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

6. Die Zahlengerade

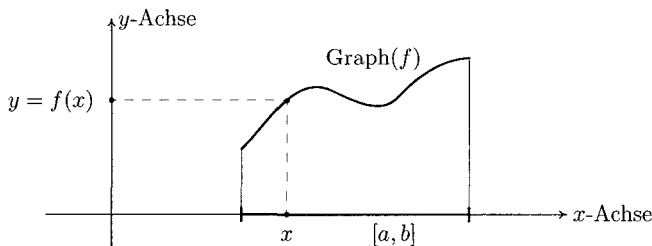
$$(-\infty, \infty) := \mathbb{R}.$$

□

Es sind dies gerade die aus mehr als einem Punkt bestehenden sogenannten *zusammenhängenden* Teilmengen von $\mathbb{R}$. Für die vier von Null ausgehenden Halbstrahlen verwenden wir auch die Schreibweisen $\mathbb{R}^+ := (0, \infty)$ und $\mathbb{R}_0^+ := [0, \infty)$ und analog $\mathbb{R}^- := (-\infty, 0)$ und $\mathbb{R}_0^- := (-\infty, 0]$.

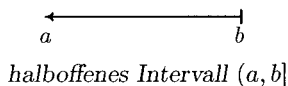
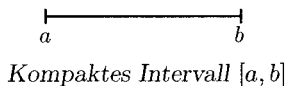
Sie sehen, dass sich die Bezeichnungen “offen” und “abgeschlossen” bei Intervallen darauf beziehen, ob die Randpunkte dazugehören sollen oder nicht. Die kompakten Intervalle $[a, b]$ sind in diesem Sinne auch abgeschlossene Intervalle, und gewöhnlich spricht man von dem *abgeschlossenen Intervall* $[a, b]$. Da wir hier aber

auch die Halbstrahlen zu den (allgemeinen) Intervallen rechnen wollen, brauchen wir eine unterscheidende Benennung, und “kompakt” passt zu dem Sinn, in dem dieses Wort auch sonst in der Mathematik gebraucht wird.²



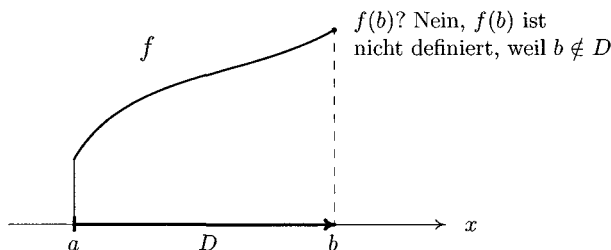
Veranschaulichung einer Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem kompakten Intervall durch ihren Graphen

In Skizzen will ich die Zugehörigkeit oder Nichtzugehörigkeit von Randpunkten bei Bedarf z.B. so andeuten:



Die Pfeilspitze soll daran erinnern, dass sich das Intervall von *jedem* $x \in (a, b]$ aus noch weiter nach links erstreckt.

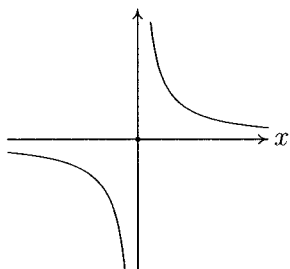
Damit wir uns recht verstehen: an einem Punkt, der nicht zum Definitionsbereich gehört, gilt die Funktion als nicht definiert, auch wenn Sie eine gute Idee hätten, wie man sie dort definieren *sollte*!



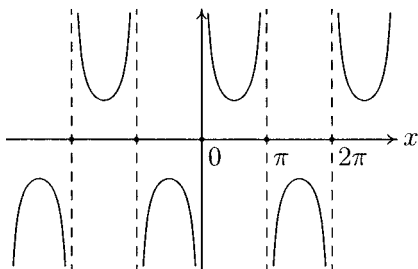
Eine Funktion auf dem halboffenen Intervall $D = [a, b)$

So hat die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ zum Beispiel *keine* Nullstelle, weil $x^2 \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$, auch wenn es Sie noch so sehr in den Fingern juckt, $f(0) = 0$ zu schreiben, weil doch $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$ sei. So ist das mit dem “Definitionsbereich” eben gemeint.

Zumeist wollen wir also Funktionen auf allgemeinen Intervallen betrachten, aber ganz auf diesen Fall einschränken wollen wir uns nicht, damit wir Funktionen wie $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ oder $f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{\sin x}$ mit erfassen, die doch auch einmal vorkommen können.



$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ auf } D = \mathbb{R} \setminus 0$$



$$f(x) = \frac{1}{\sin x} \text{ auf } D = \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$$

Deshalb sollen *Vereinigungen* von allgemeinen Intervallen auch als Definitionsbereiche in Betracht gezogen werden, und unter einer **Funktion einer reellen Variablen** wollen wir eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ verstehen, deren Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ eine Vereinigung von allgemeinen Intervallen ist.

1.2 Neue Funktionen aus alten

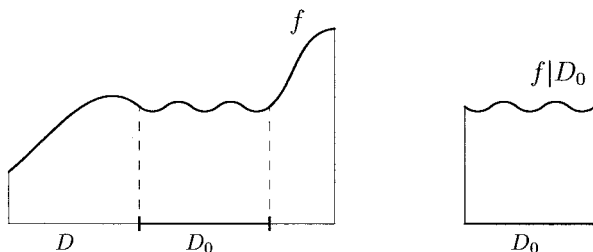
Zwei Funktionen, die denselben Definitionsbereich D haben, kann man auf naheliegende Weise addieren, miteinander multiplizieren usw. So ist mit der **Summe** $f + g : D \rightarrow \mathbb{R}$ eben die Funktion gemeint, die $x \mapsto f(x) + g(x)$ zuordnet, analog für das **Produkt** $fg : D \rightarrow \mathbb{R}$ und, falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, für den **Quotienten** $f/g : D \rightarrow \mathbb{R}$ der beiden Funktionen.

Von ganz anderer Natur sind die drei Operationen *Einschränkung*, *Verkettung* und *Umkehrung*, die ich nun definieren werde. Am einfachsten ist die Einschränkung.

Definition: Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $D_0 \subset D$ eine Teilmenge des Definitionsbereiches, so heißt die durch

$$\begin{array}{ccc} f|_{D_0} : D_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

gegebene Funktion $f|_{D_0}$ mit dem Definitionsbereich D_0 die ***Einschränkung*** von f auf D_0 . $\square$



Übergang zur eingeschränkten Funktion

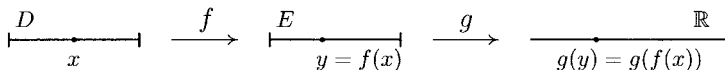
Zur Vorbereitung der anderen beiden Definitionen eine Notation: Wir schreiben $f(D) := \{f(x) \mid x \in D\}$ für das ***Bild*** oder die ***Bildmenge*** der Funktion f .

Definition: Sind $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und $f(D) \subset E$, d.h. $f(x) \in E$ für alle $x \in D$, so heißt die durch

$$\begin{array}{ccc} g \circ f : D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

definierte Funktion (“ g nach f ”) die ***Verkettung*** oder Hintereinanderanwendung von f und g . $\square$

Bei der anschaulichen Vorstellung dieses Vorgangs denkt man besser nicht an die Graphen, sondern fasst die Funktionen wirklich als Zuordnung auf:



Wirkungsweise der Verkettung

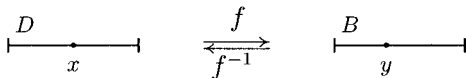
Der Punkt $x \in D$ wird also von f erst einmal nach E geschafft, und dort wird er von g abgeholt und weiter nach $\mathbb{R}$ transportiert.

Schließlich lassen sich manche Funktionen *umkehren*. Die Umkehrung f^{-1} soll jeden Funktionswert von f dorthin zurückwerfen, wo er hergekommen war. Das ergibt natürlich nur dann eine klare Zuordnung, wenn f keinen seiner Werte an mehreren Stellen annimmt, oder in der Postmetapher, wenn kein Empfänger mehrere Briefe erhält. Diese Eigenschaft von f nennt man *Injektivität*.

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $D \subset \mathbb{R}$, und f sei *injektiv*, d.h. $f(x) \neq f(x')$ für alle $x \neq x'$ in D . Es bezeichne ferner $B := f(D)$ die Bildmenge der Funktion. Dann heißt die durch

$$\begin{array}{ccc} f^{-1} : & B & \longrightarrow D \subset \mathbb{R} \\ & f(x) & \longmapsto x \end{array}$$

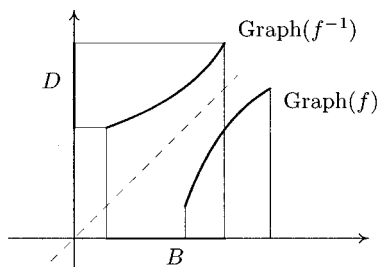
definierte Funktion f^{-1} (gesprochen “ f invers”) die *Umkehrung* von f . $\square$



Wirkungsweise der Umkehrung

Es ist auch nützlich sich zu überlegen, wie man aus dem Graphen von f den von f^{-1} bekommt. Wenn Sie bereit sind, die Definitionsbereichs-Achse für f^{-1} nach oben, die Wertebereichs-Achse für f^{-1} nach rechts laufen zu lassen, dann können Sie den Graphen von f gleich so lassen wie er ist, Sie *lesen* ihn jetzt nur anders. Wollen Sie den Graphen von f^{-1} aber in der üblichen Weise vor sich sehen, so

müssen Sie die beiden Achsen vertauschen, wobei dann der Graph von f^{-1} durch Spiegelung an der ‘Winkelhalbierenden’ aus dem Graphen von f hervorgeht:



Die Graphen von Funktion und Umkehrfunktion

1.3 Notationsfragen

Das alles ist Mathematik aus dem Gewächshaus. Im Freiland weht der Wind! Notationen wie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ werden Sie in den Physikbüchern kaum finden, allenfalls in einem ‘mathematischen Anhang’, aber zur natürlichen wissenschaftlichen Prosa der Physik gehört das nicht. Definitionsbereiche werden kaum erwähnt, geschweige, dass ein Buchstabe zur Notation dafür abgestellt wird. — Aber die Funktion ist doch ohne Definitionsbereich eigentlich noch nicht fertig definiert? Wie soll man das verstehen? — Sie sollen dann immer davon ausgehen, dass der Autor einen der folgenden Standpunkte einnimmt:

- Es geht schon aus dem Zusammenhang hervor, welcher Definitionsbereich gemeint ist, oder
- die Funktion ist überall dort definiert, wo der angegebene Ausdruck gelesen werden kann, also auf $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, wenn

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

oder auf $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ für $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ usw., oder

- der Definitionsbereich spielt für das, was ich über f zu sagen habe, keine Rolle.

Oftmals ist das auch ganz akzeptabel, es kommt eben darauf an, was über die Funktion eigentlich ausgesagt werden soll.³ Der Vorteil ist die Entlastung der Notation, eine gar nicht eingeführte Bezeichnung braucht man weder nachzufragen noch sich zu merken.

Ein zweites Notationsproblem ist die Bezeichnung der Funktion. In der Mathematik legen wir großen Wert auf die begriffliche Unterscheidung zwischen dem einzelnen Funktionswert $f(x) \in \mathbb{R}$ an der Stelle $x \in D$ und der ganzen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Das einzelne $f(x)$ ist ja eine Zahl, die Funktion f dagegen eine Zuordnung $D \rightarrow \mathbb{R}$, also etwas anderes.

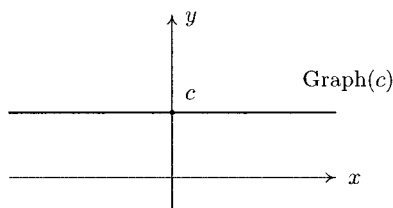
Oft ist es aber bequem, von *der Funktion* $f(x)$ zu sprechen und dem Einwand, das sei doch eine Zahl, dadurch auszuweichen, dass man x für “variabel” erklärt. Das verwischt zwar eine mathematisch eigentlich erwünschte Unterscheidung — und manche Autoren verstehen die Bedeutung absichtlich kunstvoll in der Schwebe zu halten — bringt aber einen immensen Notationsvorteil mit sich: wir können auf eine eigene Bezeichnung der Funktion jetzt ganz verzichten und etwa von *der Funktion* $\sqrt{1-x^2}$ sprechen statt von $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. Bei der Vielzahl der vorkommenden Funktionen fällt eine solche Entlastung schon ins Gewicht. Stellen Sie sich vor, wir sollten zu einer mit f benannten Funktion nun auch noch für so nahe verwandte Funktionen wie $f(2x)$ und $f(x-1)$ zusätzliche Bezeichnungen g und h einführen oder sie als Verkettungen $f \circ m_2$ und $f \circ t_{-1}$ schreiben, wobei $m_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $t_{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Multiplikation mit 2 bzw. die Translation um -1 bedeuten oder genauer $m_2 : D' \rightarrow D$ mit $D' = \{x \mid 2x \in D\}$ usw. Wie aufwendig würde die Beschreibung der einfachsten Sachverhalte!

Nachdem ich das alles zugegeben habe, muss ich Ihnen aber auch sagen, dass die Eleganz der genial-schlampigen Notation ihren Preis hat. Vom Leser oder Hörer wird mehr Durchblick und Eigenständigkeit verlangt als bei der logisch eng geführten mathematischen Notation, die keinen Spielraum für Missverständnisse lässt. Und wenn Sie selbst der Autor sind, zunächst also beim Lösen der Übungsaufgaben und später bei der eigenen wissenschaftlichen Arbeit, dann

sind Sie auch selbst verantwortlich für alles was Sie schreiben und müssen riskante Formulierungen rechtfertigen können, wenn nachgefragt wird. Im Zweifelsfalle, wenn es Ihnen mulmig wird, sind Sie mit der vollständigen mathematischen Notation in mathematischen Dingen immer auf der sicheren Seite.

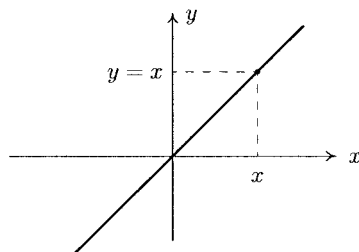
1.4 Erste Beispiele von Funktionen

Gefragt nach den *einfachsten* Funktionen fiel mir die Wahl schwer zwischen den konstanten und der identischen Funktion. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ wird die **konstante Funktion** $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto c$ ebenfalls mit c bezeichnet,



Graph der konstanten Funktion c

ebenso für andere Definitionsbereiche D . Die **identische Funktion** $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ tut gewissermaßen gar nichts, sie lässt jedes x wo es ist.



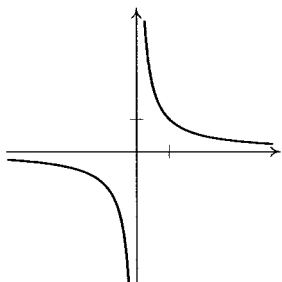
Graph der "Funktion x "

Aus diesen beiden einfachsten Beispielen erhält man durch mehrfache Anwendung der im Abschnitt 1.2 aufgezählten Vorgänge nun

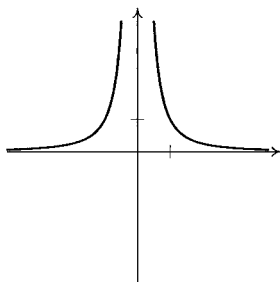
eine ganze Flut von Funktionen. Die **Potenzen** $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ für $n \in \mathbb{N}$, sodann die **Polynome** $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, das sind Funktionen der Form

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mit festen $a_i \in \mathbb{R}$, die man dann die **Koeffizienten** des Polynoms nennt. Beachte die Konvention, dass x^0 die konstante Funktion 1 bezeichnet. **Rationale Funktionen** sind Quotienten von Polynomen, $f = \frac{P}{Q}$ auf dem Definitionsbereich $D = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$. Darunter sind insbesondere die **negativen Potenzen** $\mathbb{R} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ für $n \in \mathbb{N}$

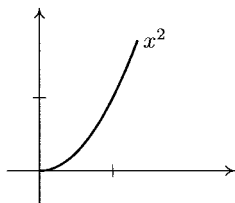


Graph von x^{-1}

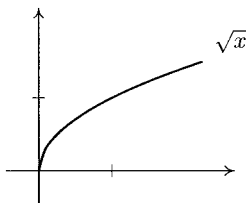


Graph von x^{-2}

Ferner die **Wurzelfunktionen** $\sqrt[n]{} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$, als Umkehrung der auf $\mathbb{R}_0^+$ eingeschränkten n -ten Potenzen:



Potenzfunktion auf $\mathbb{R}_0^+$



Umkehrfunktion auf $\mathbb{R}_0^+$

Für ungerades n können wir natürlich auch ganz $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{2k+1}$ umkehren und $\sqrt[2k+1]{} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erklären. Aber wenn Sie später die Funktionentheorie kennengelernt haben, werden Sie das nicht mehr so sachgemäß finden. Reelle Wurzelfunktionen gehören auf $\mathbb{R}_0^+$ oder

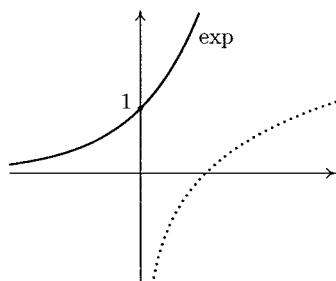
$\mathbb{R}^+$ definiert, sage ich einfach einmal so.⁴ — Und natürlich können wir, ausgehend von den konstanten und identischen Funktionen, durch wiederholte Bildung neuer Funktionen aus alten immer kompliziertere Funktionen auftürmen, wie etwa

$$x \mapsto \frac{x + \sqrt{1 - x^2}}{x - \sqrt{1 - x^2}}$$

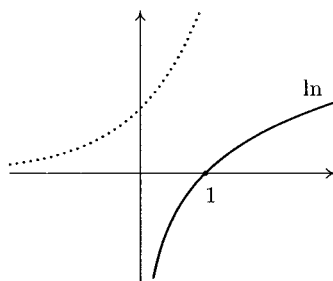
auf einem geeigneten Definitionsbereich usw., an eine vollständige Aufzählung ist gar nicht zu denken.

1.5 Exponentialfunktion und Logarithmus

Diese beiden Funktionen sind bekanntlich Umkehrungen voneinander:



$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto e^x$$



$$\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln x$$

Vielleicht haben Sie zuerst die Exponentialfunktion als

$$e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

kennengelernt und ihre Eigenschaften studiert, darunter gewiss die *Funktionalgleichung der Exponentialfunktion*,

$$e^{x+y} = e^x e^y,$$

und danach haben Sie den Logarithmus als die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion definiert, oder aber Sie haben zuerst den Logarithmus durch

$$\ln x := \int_1^x \frac{dt}{t}$$

definiert und dessen Eigenschaften untersucht, darunter die *Funktionalgleichung des Logarithmus*

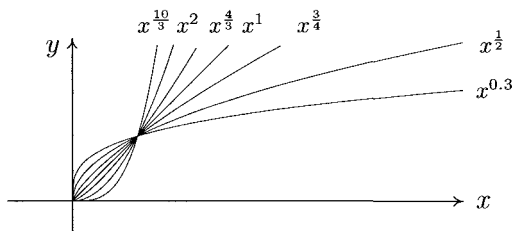
$$\ln xy = \ln x + \ln y$$

und erst dann die e -Funktion oder Exponentialfunktion als dessen Umkehrung eingeführt. In jedem Falle muss man etwas mehr verstehen als nur die vier Grundrechenarten, nämlich unendliche Reihen oder Integrale. Auch an diese Techniken werde ich Sie zu gegebener Zeit erinnern, jetzt halte ich aber an der Fiktion fest, Sie kennen $\exp$ und $\ln$ von früher her. Zwei sehr nützliche Funktionen! Dass die Exponentialfunktion Addition in Multiplikation und der Logarithmus folglich Multiplikation in Addition verwandelt, zeigt schon, dass diese Funktionen einiges “können”.

Mittels der Exponentialfunktion und des Logarithmus verallgemeinert man die Potenzfunktionen x^n von ganzzahligen zu beliebigen Exponenten. Für festes $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt die Funktion $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$, wobei

$$x^\alpha := e^{\alpha \ln x}$$

verstanden wird, die **allgemeine Potenz zum Exponenten α** .

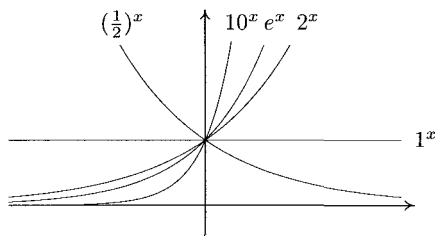


Graphen einiger allgemeiner Potenzen x^α

Diese Festsetzung ist verträglich mit der bisherigen Notation x^n , und es gilt

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}.$$

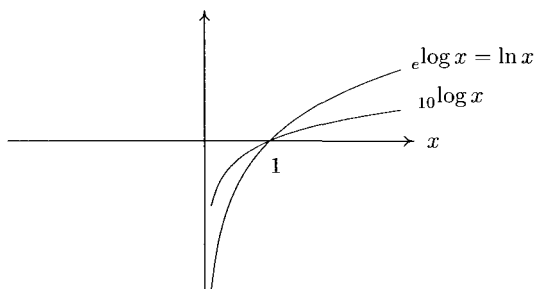
Unter der **allgemeinen Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$** versteht man die Funktion $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto a^x := e^{x \ln a}$.



Graphen einiger allgemeiner Exponentialabbildungen a^x

Schließlich der **Logarithmus zur Basis $a > 0, a \neq 1$** : das ist die Umkehrfunktion der Funktion a^x , man notiert sie als

$${}_a\log : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$$



Graphen von ${}_a\log x$ für $a = e$ und $a = 10$

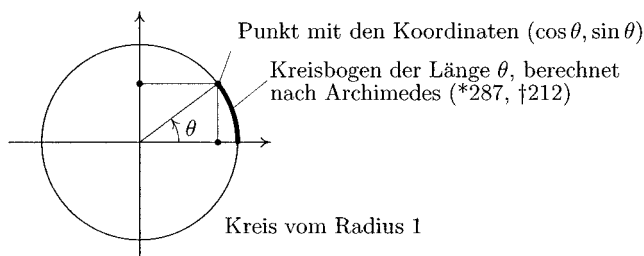
1.6 Trigonometrische Funktionen

Die Funktionen **Sinus** und **Cosinus** definiert man entweder durch ihre Reihen

$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{und}$$

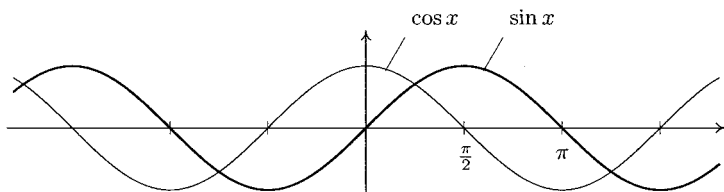
$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

oder auf geometrischem Wege mit Hilfe aus der Antike:



Geometrische Bedeutung von $\cos \theta$ und $\sin \theta$

Weil der Punkt mit den Koordinaten $x = \cos \theta$ und $y = \sin \theta$ auf der Einheitskreislinie liegt, muss $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ gelten (so schreibt man statt $(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$). Die beiden Funktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und haben die Periode 2π :



Die Graphen von Sinus und Cosinus. Beachte $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

Zu den Grundkenntnissen über die trigonometrischen Funktionen gehören auch die

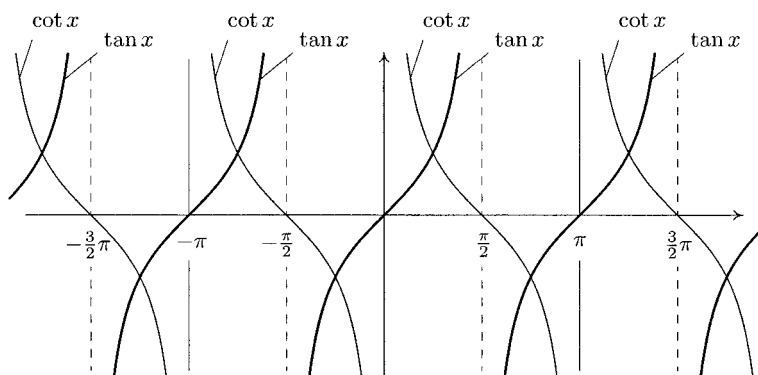
Additionstheoreme: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y\end{aligned}$$

Als die Quotienten sind **Tangens** und **Cotangens** bekannt:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{und} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

natürlich nur dort definiert, wo der Nenner nicht Null ist.

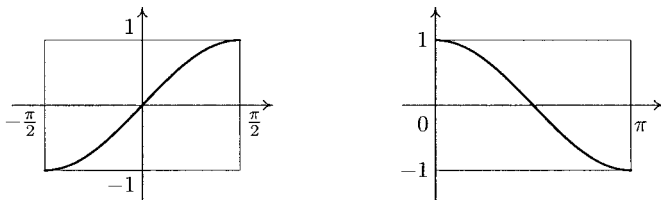


Die Graphen von Tangens und Cotangens

1.7 Die Arcusfunktionen

Schließlich erinnere ich Sie noch an die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen, die sogenannten ‘Arcusfunktionen’. Ungefähr ist der Arcussinus $\arcsin$ ‘die Umkehrung’ des Sinus. Aber wie Sie sehen ist weder der Sinus noch sind die anderen drei Funktionen Cosinus, Tangens und Cotangens injektiv! Also kann man nicht den Sinus selbst, sondern nur eine Einschränkung des Sinus

auf ein Intervall, auf dem er injektiv ist, umkehren, und solche Intervalle gibt es viele. Durch Konvention wählt man für jede der vier trigonometrischen Funktionen ein solches Injektivitätsintervall aus, und zwar $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ für den Sinus und $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ für den Tangens sowie $[0, \pi]$ für den Cosinus und $(0, \pi)$ für den Cotangens.



Graphen der injektiven Funktionen $\sin|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $\cos|[0, \pi]$

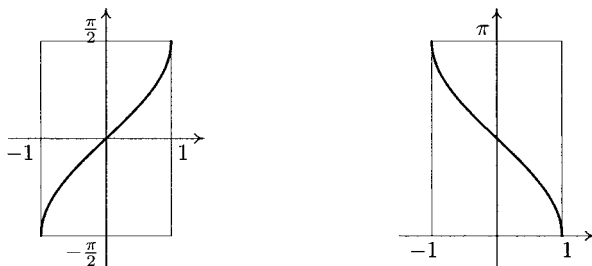
Die Umkehrfunktion

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

von $\sin|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ heißt der **Arcussinus**, die Umkehrfunktion

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

von $\cos|[0, \pi]$ analog dazu der **Arcuscosinus**.



Die Graphen von Arcussinus und Arcuscosinus

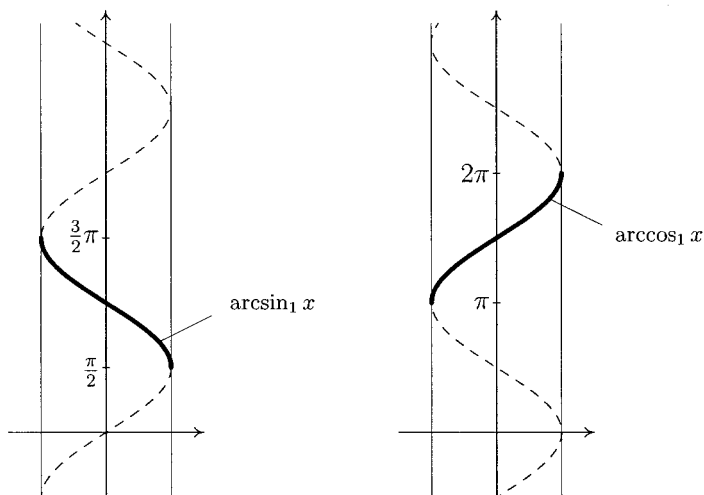
Ebensogut kann man aber auch

$$\sin \left| \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right] : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right] \rightarrow [-1, 1] \right.$$

umkehren, und dann erhält man eine ganz andere Funktion. Zur Unterscheidung könnte man diese Funktion etwa mit $\arcsin_1$ bezeichnen, allgemeiner

$$\begin{aligned} \arcsin_k &:= \left(\sin \left| \left[\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi \right] \right. \right)^{-1} \quad \text{und} \\ \arccos_k &:= \left(\cos \left| \left[k\pi, (k+1)\pi \right] \right. \right)^{-1} \end{aligned}$$

die k -ten **Nebenzweige** des Arcussinus und des Arcuscosinus, wonach dann $\arcsin = \arcsin_0$ und $\arccos = \arccos_0$ die Hauptzweige genannt werden.

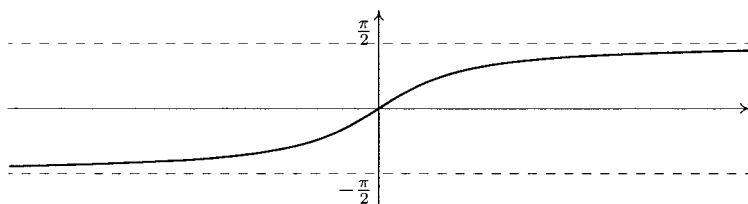


Nebenzweige von Arcussinus und Arcuscosinus

Ebenso definiert man den Hauptzweig des arctan als die Umkehrung

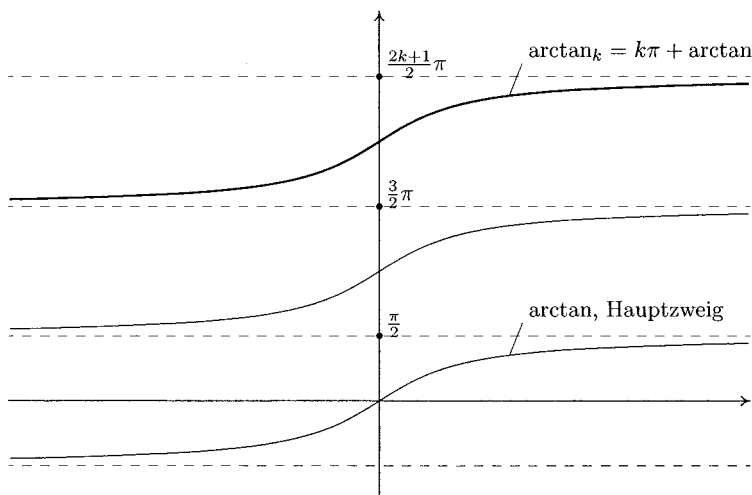
$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$$

von $\tan \left| \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right.$:



Graph des Arcustangens

und analog $\operatorname{arccot} := (\cot | (0, \pi))^{-1}$, aber es gibt natürlich noch viele Nebenzweige:



Nebenzweige des Arcustangens

Das ist ja alles ganz einfach, man muss nur im richtigen Moment daran denken.

Die Funktionen einer reellen Veränderlichen, die man aus den Konstanten, der identischen Funktion, der e -Funktion und dem Sinus

durch gegebenenfalls mehrfaches Anwenden der Operationen:

- Grundrechenarten
- Verkettung
- Umkehrung

bilden kann, nennt man die *elementaren Funktionen*. Das ist zwar ein bisschen ungenau gesagt, weil ohne nähere Angabe über die Definitionsbereiche, aber mit etwas gutem Willen kann man es als vorläufige Definition schon gelten lassen.⁵

Alle bisher aufgeführten Beispiele sind also elementare Funktionen (den Cosinus habe ich nicht vergessen: er geht ja durch Verkettung mit einer Translation aus dem Sinus hervor). Gar so *elementar* sind diese Funktionen nicht, wie Sie sehen, und man kann mit ihnen schon ziemlich viel machen.

Mit dieser großen Beispielklasse von Funktionen wollen wir es vorerst auch bewenden lassen und uns nun der Differentialrechnung zuwenden.

1.8 Übungsaufgaben

Aufgabe R1.1: Drücken Sie $\cos^2 x$ durch $\cos(2x)$ und $\tan 2x$ durch $\tan x$ aus. Verwenden Sie dazu die Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen. Beim Tangens Definitionsbereiche beachten!

Aufgabe R1.2: Eine Kurve mit Messdaten habe in doppeltlogarithmischer Auftragung (beide Achsen logarithmisch geteilt, d.h. statt x und y sind $\xi = {}_a \log x$ und $\eta = {}_a \log y$ aufgetragen, üblicherweise ist $a = 10$) die Form einer Geraden durch den Punkt $\xi_0 = 3$, $\eta_0 = 2$ mit Steigung c . Welche Funktion $y = f(x)$ stellt diese Kurve dar?

Aufgabe R1.3: In welcher (einfach) logarithmischen Auftragung wird der Graph der Funktion $f(x) = e^{-x}$ zu einer Geraden?

Aufgabe R1.4: Ein radioaktives Präparat mit N Atomen zerfalle im Laufe der Zeit t nach dem Gesetz $N(t) = N_0 e^{-\alpha t}$. Nach welcher Zeit ist die Hälfte der Atome zerfallen?

Aufgabe R1.5: Diskutieren Sie den Funktionsverlauf der Funktion $f(x) = \arcsin(\sin x)$ für den Hauptzweig von $\arcsin$.

Aufgabe T1.1: Es seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ injektive Funktionen und $f(D) = E$. Wie erhält man $(g \circ f)^{-1}$ aus g^{-1} und f^{-1} ?

Aufgabe T1.2: Gilt für $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ immer $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$ und gilt immer $(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$?

Aufgabe T1.3: Geben Sie eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ an, die injektiv, aber nicht streng monoton ist. (Hinweis: versuchen Sie nicht, eine *stetige* solche Funktion zu finden, das geht nämlich nicht.)

Aufgabe T1.4: Es seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen, es gelte $f(D) \subset E$ und $g(E) \subset D$, und es sei $g \circ f$ die identische Funktion auf D und $f \circ g$ die identische Funktion auf E . Zeigen Sie, dass daraus die Umkehrbarkeit von f und $f^{-1} = g$ folgt.

Aufgabe T1.5: Sei $\arccos_k : [-1, 1] \rightarrow [k\pi, (k+1)\pi]$ der k -te Nebenzweig des Arcuscosinus. Was ist $\sin(\arccos_k x)$?

2 Die Ableitung

2.1 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Ich erinnere Sie an zwei Ihnen bekannte Grundbegriffe:

Definition: Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion einer reellen Variablen. Die Funktion heißt an der Stelle $x \in D$ **stetig**, wenn

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x + h) = f(x)$$

gilt, und f heißt an der Stelle x **differenzierbar**, wenn sogar der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} =: f'(x),$$

die sogenannte **Ableitung** von f an der Stelle x , existiert. Ist f an *jeder* Stelle $x \in D$ stetig bzw. differenzierbar, so nennt man f eine stetige bzw. differenzierbare Funktion. □

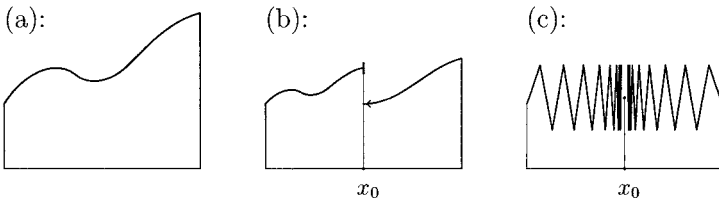
Wie Sie sehen gehe ich davon aus, dass Sie den Begriff des Limes aus der Schule kennen¹. Denken Sie gegebenenfalls auch daran, dass an Intervall-Enden nur der halbseitige Limes gemeint sein kann, dass Sie an einem rechten Intervall-Ende also nur mit $h < 0$, an einem linken nur mit $h > 0$ zu tun haben. — Das ist Hintergrundwissen, welches Sie bei Bedarf aktivieren mögen. Lesen Sie einstweilen ruhig weiter!

Jede differenzierbare Funktion ist erst recht stetig, aber die Ableitung $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$ einer differenzierbaren Funktion braucht nicht stetig zu sein, ist sie es doch, so nennt man f eine C^1 -Funktion. Ist die Ableitung sogar differenzierbar, so heißt f zweimal oder zweifach differenzierbar, ist die zweite Ableitung $f'' := (f')'$ stetig, so heißt f eine C^2 -Funktion, usw.:

Definition: Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **C^k -Funktion**, wenn sie k -mal differenzierbar und auch die k -te Ableitung $f^{(k)}$ noch stetig ist. Ist f beliebig oft differenzierbar, so spricht man von einer **C^∞ -Funktion**. $\square$

Sinngemäß ist die “nullte Ableitung” $f^{(0)}$ die Funktion selbst (noch gar nicht abgeleitet), die stetigen Funktionen sind also die C^0 -Funktionen.

Gewiss haben Sie eine anschauliche Vorstellung vom Stetigkeitsbegriff, zum Beispiel:



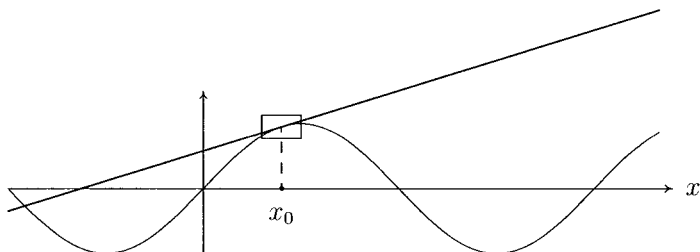
Die Funktion (a) ist stetig auf dem Intervall. Im Beispiel (b) hat sie bei x_0 eine Sprungstelle und ist deshalb dort unstetig. Auch (c) zeigt eine bei x_0 unstetige Funktion, zwar wird man x_0 nicht gerade eine ‘Sprungstelle’ nennen, doch die zu hohe Oszillation nahe x_0 verletzt die Stetigkeit. Aber aufgepasst:



Diese Funktionen auf $D := [a, b] \setminus \{x_0\}$ sind stetig!

Der Punkt, an dem die Funktion springt bzw. unstetig oszilliert, gehört in diesen beiden Fällen nicht zum Definitionsbereich. Ebenso ist zum Beispiel $\mathbb{R} \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ einwandfrei stetig, trotz des unendlich großen Sprungs beim Übergang von $x < 0$ zu $x > 0$. Stetig auf ganz $\mathbb{R}$ *ergänzbar* ist die Funktion freilich nicht, aber solange wir mit $\mathbb{R} \setminus 0$ als Definitionsbereich zufrieden sind, ist durch $f(x) := \frac{1}{x}$ eine stetige Funktion definiert.

Auch die anschauliche Bedeutung der Ableitung $f'(x_0)$ kennen Sie, es ist der Anstieg der Tangente $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ von f an der Stelle x_0 .

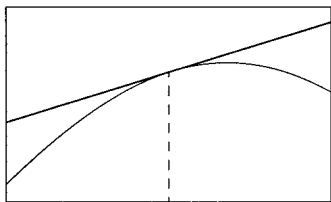


Die Tangente an den Graphen

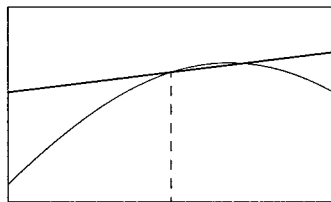
Eine lineare (eigentlich: *affine*) Funktion durch den Graphenpunkt, also eine Funktion der Form $x \mapsto f(x_0) + a \cdot (x - x_0)$, ist aber nur dann eine Tangente an f , wenn der Unterschied zu f , also

$$x \mapsto f(x) - f(x_0) - a \cdot (x - x_0)$$

für $x \rightarrow x_0$ so klein wird, dass er selbst nach Division durch $(x - x_0)$ noch gegen Null geht,



Gute Approximation



Schlechte Approximation

also wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - a \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$

gilt, also genau wenn der Anstieg $a = f'(x_0)$ ist. Gute alte Schulzeit, wo man Wochen zur Verfügung hat, um so etwas zu lernen!

2.2 Notationsfragen

Kaum will man ein Beispiel hinschreiben, schon stößt man auf die Probleme der Funktionenbezeichnung, über die wir in Abschnitt 1.3 gesprochen haben. Wenn die Funktion einen eigenen Namen f führt, ist alles ganz einfach: $f' : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist dann die Ableitung, $f'' : D \rightarrow \mathbb{R}$ die zweite Ableitung usw., in die ich nun Elemente des Definitionsbereiches einsetzen kann, z.B. ist $f'(x_0)$ die Ableitung an der Stelle $x_0 \in D$.

Wenn die Funktion aber *anonym* bleibt, nur durch einen Term angegeben ist, etwa die Funktion $x^2 + 3$, wo bringe ich dann den Ableitungsstrich an? Manche Autoren schreiben wirklich $(x^2 + 3)'$. Mir gefällt das nicht. Wie setze ich in diese Ableitung $x_0 \in D$ ein? $(x_0^2 + 3)'$? Ist das für $x_0 = 1$ dann $4'$? Auch die auf die Zeit der Erfindung der Infinitesimalrechnung Ende des siebzehnten Jahrhunderts zurückgehende Notation leidet an dieser Krankheit:

Notation: Statt $f'(x)$ darf $\frac{d}{dx}f(x)$ geschrieben werden, ist zum Beispiel $f(x) = x^2 + 3$, so kann man die Ableitung ohne Benutzung der Bezeichnung f als $\frac{d}{dx}(x^2 + 3)$ hinschreiben.

Aber die Notation hat einen großen Vorteil. Die Variable braucht ja nicht immer den Namen x zu haben, man kann einen Ausdruck der Form $x^2 + \lambda x$ zum Beispiel auch einmal für festes x als Funktion $\lambda \mapsto x^2 + \lambda x$ betrachten und diese Funktion ableiten wollen. Das würde durch

$$\frac{d}{d\lambda}(x^2 + \lambda x)$$

sofort unmissverständlich ausgedrückt, mit $\frac{d}{dx}(x^2 + \lambda x)$ wird's niemand verwechseln.

Das Einsetzen von Elementen des Definitionsbereiches bleibt aber jedenfalls umständlich zu notieren, daran führt bei fehlender Funktionenbezeichnung kein Weg vorbei, sei es dass man

$$f'(x_0) = \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x_0}$$

oder $f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x) \big|_{x=x_0}$ oder dergleichen schreibt. In dem obigen Beispiel $f(x) = x^2 + 3$ können wir dann $f'(1)$ etwa als

$$\left. \frac{d}{dx} (x^2 + 3) \right|_{x=1}$$

in der anonymen Notation niederschreiben.

2.3 Ableitungsregeln

Direkt aus der Definition bestimmen wir leicht die Ableitungen der konstanten Funktionen und der identischen Funktion:

$$\frac{d}{dx} c \equiv 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx} x \equiv 1,$$

denn ersichtlich ist $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0$ und $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + h - x}{h} = 1$. □

Und das war's dann eigentlich schon mit dem Limes, alle anderen Ableitungen lassen wir uns automatisch durch *Ableitungsregeln* ausrechnen. Ich erinnere Sie an diese wohlbekannten Regeln. Im Folgenden bezeichnen f und g immer Funktionen einer reellen Variablen.

Additionsregel: Sind $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so auch die Summe $f + g : D \rightarrow \mathbb{R}$ und es gilt

$$(f + g)' = f' + g'$$

Produktregel: Sind $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so auch das Produkt $fg : D \rightarrow \mathbb{R}$ und es gilt

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Quotientenregel: Sind $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist auch $\frac{f}{g} : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - g'f}{g^2}$$

Kettenregel: Sind $D \xrightarrow{f} \tilde{D} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ differenzierbar, so auch die Verkettung $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und es gilt

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$$

Umkehrregel: Sei D ein allgemeines Intervall(!) und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Dann ist f streng monoton, insbesondere injektiv, $B := f(D)$ ebenfalls ein allgemeines Intervall, die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \rightarrow D \subset \mathbb{R}$ wieder differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}},$$

was auch soviel wie $(f^{-1})' \circ f = \frac{1}{f'}$ oder $((f^{-1})' \circ f) \cdot f' = 1$ bedeutet. $\square$

Sollten Sie im Lesen des Verkettungssymbols $\circ$ (“nach”) noch nicht geübt sein, werden Ihnen Ketten- und Umkehrregel in dieser Gestalt etwas fremd vorkommen. Setzen wir deshalb einmal Werte auf beiden Seiten ein, zuerst in die Kettenregel. Die rechte Seite ist das Produkt aus den beiden auf D definierten Funktionen $g' \circ f$ und f' , also gilt für $x \in D$ jedenfalls

$$(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) \cdot f'(x)$$

und wenn wir nun die Verkettung im ersten Faktor ausschreiben, erhalten wir

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x),$$

und wenn wir auf der linken Seite statt des Ableitungsstriches das Operatorsymbol $\frac{d}{dx}$ verwenden, können wir auch dort die Verkettung ausschreiben und bekommen

$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x),$$

was vielleicht vertrauter aussieht.

Die Umkehrregel gibt uns eine Gleichung zwischen zwei auf B , nicht auf D , definierten Funktionen, nämlich zwischen $(f^{-1})'$ auf der linken und $1/f' \circ f^{-1}$ auf der rechten Seite. Deshalb sollten wir die Variable vielleicht nicht x , sondern $y \in B$ nennen. Dann ergibt sich

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Wäre es falsch gewesen, die Variable mit $x \in B$ zu bezeichnen? Das nicht. Wenn wir aber bei dem Namen $y \in B$ bleiben, dann haben wir den Buchstaben x für $x \in D$ noch frei und können auch speziell einmal $y = f(x)$ in die Umkehrformel einsetzen, dann ist $f^{-1}(y)$ natürlich x und deshalb

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)},$$

was auch eine sehr brauchbare Fassung der Umkehrformel ist. Man kann sich übrigens diese Fassung auch jederzeit aus der Kettenregel herausholen: $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, also $(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$ nach der Kettenregel, und da steht's.²

Ich unterstelle, dass die Beweise der Ableitungsregeln Ihnen bekannt sind, aber mehr so wie die Polizei unterstellt, dass Sie Ihren Führerschein bei sich haben, kontrollieren will ich Sie jetzt gerade nicht.

Wenn Sie Ihre Kenntnisse über den Stetigkeitsbegriff reaktivieren (mit f und g ist auch $f + g$ stetig usw.), so sehen Sie, dass im Falle von C^1 -Funktionen f und g die in den Regeln angegebenen Ableitungen alle wieder stetig sind. Sind f, g sogar C^2 , so können wir die Regeln auf die Ableitungen wieder anwenden usw., so erhalten wir eine

Wichtige Zusatzinformation zu den fünf Ableitungsregeln:

Sind die dort genannten Funktionen f, g sogar C^k -Funktionen, so sind auch $f + g, fg, f/g, g \circ f$ bzw. f^{-1} wieder C^k -Funktionen. $\square$

2.4 Erste Beispiele

Mit den Ableitungsregeln sollten wir nun, ausgehend von $\frac{d}{dx}c \equiv 0$ und $\frac{d}{dx}x \equiv 1$, die Ableitungen sehr vieler Funktionen schon berechnen können, aber wenn Sie es versuchen, so merken Sie erst einmal wieder, dass auch die Ableitungsregeln ‘Mathematik aus dem Gewächshaus’ sind. In der freien Natur haben die Funktionen oft keinen Namen, und wenn Sie etwa

$$\frac{d}{dx} \sqrt{\frac{1-x^n}{1+x^n}}$$

ausrechnen sollen, so sehen Sie kein f und kein g und wissen nicht gleich, was das überhaupt mit den Regeln zu tun hat. Wir wollen auch lieber mit einfacheren Beispielen anfangen. Wohlbekannt ist Ihnen

Beispiel 1: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

BEWEIS: 1. Schritt: Jedenfalls ist die Formel für $n = 1$ richtig, denn $\frac{d}{dx}x^1 = \frac{d}{dx}x = 1 = 1 \cdot x^0$.

Annahme: Wir nehmen nun an, n sei eine jener natürlichen Zahlen, für welche die Formel $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ gilt. — Gibt es solche

Zahlen? — Na jedenfalls ist doch 1 so eine Zahl, wie im ersten Schritt festgestellt. — Aber andere? — Das wissen wir noch nicht, darüber schon etwas bewiesen zu haben behaupte ich doch auch gar nicht. — Womöglich ist also 1 die einzige solche Zahl? — Na wenn schon. Darf ich deshalb nicht “eine jener Zahlen, für welche die Formel gilt” betrachten, es mag nun viele oder wenige solcher Zahlen geben? Ja selbst wenn wir *gar nichts* über die Existenz solcher Zahlen wüssten, wäre es uns nicht verboten, die logischen Folgerungen aus der Annahme zu untersuchen.

2. Schritt: Unter dieser Annahme gilt die Formel auch für die nächstfolgende natürliche Zahl, d.h. es gilt dann auch

$$\frac{d}{dx}x^{n+1} = (n+1)x^n,$$

denn nach der Produktregel ist

$$\frac{d}{dx}(x \cdot x^n) = \frac{d}{dx}x \cdot x^n + x \cdot \frac{d}{dx}x^n,$$

und $\frac{d}{dx}x = 1$, wie wir wissen, $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ nach der Annahme, also

$$\frac{d}{dx}x^{n+1} = x^n + x \cdot nx^{n-1} = (n+1)x^n.$$

Damit ist aber die als Beispiel 1 aufgestellte Behauptung bewiesen. Denn wenn wir uns die natürlichen Zahlen eingeteilt denken in die “guten”, für die die Formel gilt, und die “schlechten”, für die sie falsch ist, so wissen wir aus dem ersten Schritt, dass 1 eine gute Zahl ist und aus dem zweiten, dass nach jeder guten Zahl als nächste wieder eine gute folgt, also sind offenbar alle natürlichen Zahlen “gut”. $\square$

Verstehe überhaupt nicht, wie man darüber tiefsinnig werden kann, “Induktionsprinzip”, dass ich nicht lache. Das nennt man nämlich einen **Induktionsbeweis**, statt “1. Schritt” schreibt man **Induktionsbeginn**, die Annahme heißt **Induktionsannahme** und der zweite Schritt ist der Induktionsschritt oder **Induktionsschluss**.

Eine pfiffige Art, die noch unbewiesene Formel auf ganz legale Weise zu ihrem eigenen Beweis mit heranzuziehen. Oft sehr nützlich!

Manchen Anfängern stürzt bei der Induktionsannahme der mentale Computer ab, weil sie aus dem Gedanken nicht herausfinden: “wenn ich $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ als richtig annehme, was bleibt dann noch zu beweisen?” Das kommt daher, dass sie — und das haben die schwarzen Schafe unter den Mathematiklehrern auf dem Gewissen — nur auf die Formel schauen und den darum herum stehenden Text als lästig und unerheblich ignorieren. So werden sie denn gar nicht gewahr, dass zwischen “Sei n eine jener Zahlen, für die ... gilt” und “Für alle n gilt ...” ein Unterschied besteht.

Beispiel 2: Die Formel $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ gilt sogar für alle $n \in \mathbb{Z}$, also auch für negative n .

BEWEIS: Für $n = 0$ wegen $x^0 \equiv 1$ sowieso klar, sonst aus der Quotientenregel: für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\frac{d}{dx}x^{-n} = \frac{d}{dx} \frac{1}{x^n} = \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

□

Beispiel 3: Sei $n \in \mathbb{N}$. Auf die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x^n$ ist die Umkehrregel anwendbar und ergibt für die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ die Formel

$$\frac{d}{dx} \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n} \frac{\sqrt[n]{x}}{x}$$

BEWEIS: Wir kennen f' aus dem Beispiel 1 und wissen $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$, also können wir es wohl wagen in die Umkehrformel direkt einzusetzen:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}.$$

□

Um das eingangs genannte Beispiel aufzudröseln, denken wir uns

$$\sqrt{\frac{1-x^n}{1+x^n}} = g(f(x))$$

mit $f(x) = \frac{1-x^n}{1+x^n}$ für $|x| < 1$ und $g(y) = \sqrt{y}$ für $y > 0$. Natürlich wäre auch $g(x) = \sqrt{x}$ für $x > 0$ "richtig" gewesen, aber ein wenig verwirrend. Dann ist also

$$g'(y) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{y}},$$

nach der Kettenregel also

$$\frac{d}{dx} \sqrt{\frac{1-x^n}{1+x^n}} = \frac{d}{dx} g(f(x)) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+x^n}{1-x^n}} \cdot f'(x),$$

und $f'(x)$ ergibt sich aus der Quotientenregel zu

$$f'(x) = -\frac{2nx^{n-1}}{(1+x^n)^2},$$

damit wird die gesuchte Ableitung zu

$$\frac{d}{dx} \sqrt{\frac{1-x^n}{1+x^n}} = -\frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2} \sqrt{\frac{1+x^n}{1-x^n}},$$

worin die Benennungen f und g jetzt nicht mehr vorkommen, die aber zwischendurch, wenn auch vielleicht nur in Gedanken eingeführt, ganz nützlich gewesen sind.

2.5 Ableitungen elementarer Funktionen

Nur mit $\frac{d}{dx}c = 0$ und $\frac{d}{dx}x = 1$ als Startkapital ausgestattet können wir mit den bisherigen Ableitungsregeln die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen nicht erreichen, wir brauchen dazu eine Ableitungsregel für Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Ich muss deshalb unterstellen, dass Sie die Ableitungen von e^x und $\sin x$ und $\cos x$ anderswoher kennen:

Erinnerung: Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}e^x &= e^x \\ \frac{d}{dx}\sin x &= \cos x \\ \frac{d}{dx}\cos x &= -\sin x\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. □

Ich kann Ihnen ja aber ruhig sagen, wie die Ableitungsregel für Potenzreihen heißt: Ist $a_0, a_1, \dots$ eine Zahlenfolge und gilt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

für alle x eines *offenen* Intervalls $(-r, r)$, so ist dort auch

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

d.h. es wird einfach “gliedweise” differenziert. Wenden Sie diese Regel auf die Exponentialreihe $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ an, so erhalten Sie wegen

$$\frac{d}{dx} \frac{x^0}{0!} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dx} \frac{x^n}{n!} = \frac{n x^{n-1}}{n!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

wieder dieselbe Reihe als Ableitung, also $\frac{d}{dx} e^x = e^x$, und sehen Sie auch einmal hin, wie artig der Summand der Sinus-Reihe bei der Ableitung in den Summanden der Cosinus-Reihe übergeht:

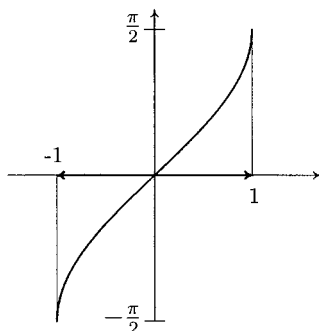
$$\frac{d}{dx} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

usw.

Nun können wir im Prinzip die anderen elementaren Funktionen aufgrund der Ableitungsregeln auch ableiten und wollen es in einer Anzahl von Beispielen auch sogleich machen. Nur wollen wir vorher die am Schluss des ersten Kapitels vorläufig formulierte Definition des Begriffes **elementare Funktion** durch eine Verabredung über die Definitionsbereiche präzisieren. Da wir im Folgenden elementare Funktionen *ableiten* wollen, sei nämlich über die Definitionsbereiche verabredet, dass bei der Konstruktion aus den Konstanten, aus x , e^x und $\sin x$ durch die Grundrechenarten, Verkettung und Umkehrung *die Umkehrung nur auf allgemeinen Intervallen geschehen darf, auf denen die Ableitung, wie in der Umkehrregel verlangt, nirgends Null wird.*

Dann sind, wie die Regeln zeigen, die Ableitungen elementarer Funktionen auch wieder elementar, insbesondere sind alle elementaren Funktionen auch C^∞ -Funktionen.

Der Vorbehalt wegen der Ableitungsnullstellen vor Umkehrung trifft übrigens insbesondere $\arcsin x$ und $\arccos x$ und ihre Nebenzweige, die wir deshalb jetzt nur auf dem *offenen* Intervall $(-1, 1)$ betrachten wollen.



Der Arcussinus ist an den Intervall-Enden nicht differenzierbar

Nun zu den Ableitungen. Machen wir mit der Umkehrung der Exponentialfunktion, also dem Logarithmus den Anfang.

Beispiel 4: Für alle $x > 0$ gilt

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

BEWEIS: Folgt aus der Umkehrregel oder aus $e^{\ln x} = x$ und der Kettenregel. $\square$

Damit können wir jetzt auch die allgemeinen Potenzen, Exponentialfunktionen und Logarithmen ableiten:

Beispiel 5: Für $a > 0$ war $a^x := e^{x \ln a}$ definiert gewesen, also

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$$

nach der Kettenregel. $\square$

Beispiel 6: Für alle $x > 0$ und festes $\alpha \in \mathbb{R}$ ist

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1},$$

denn $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, also

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha}{x} x^\alpha,$$

und das ist wirklich $\alpha x^{\alpha-1}$, denn auch für die allgemeinen Potenzen gelten die Potenzgesetze

$$x^\alpha x^\beta = e^{\alpha \ln x} e^{\beta \ln x} = e^{(\alpha+\beta) \ln x} = x^{\alpha+\beta}.$$

Hier auf $\beta = -1$ anzuwenden. $\square$

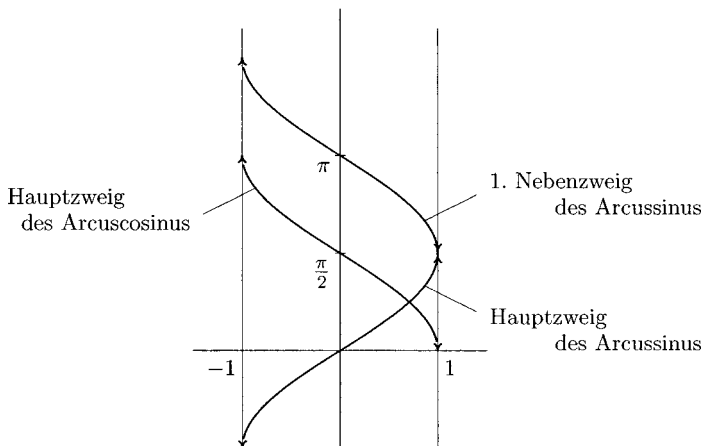
Beispiel 7: Für $a > 0$ und $a \neq 1$ war ${}_a \log x = \frac{\ln x}{\ln a}$, also

$$\frac{d}{dx} ({}_a \log x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

für alle $x > 0$. $\square$

2.6 Die Ableitungen der Arcus- und Areafunktionen

Nun wollen wir uns die Arcusfunktionen ansehen. Dabei spielt wieder eine Rolle, auf welchem *Zweig* wir uns befinden.



Vorzeichen der Ableitungen der Arcuszweige

Wir sehen schon, dass $\arcsin x$ positive Ableitung, sein erster Nebenzweig aber negative, und überhaupt sollte der erste Nebenzweig des $\arcsin$ dieselbe Ableitung wie der Hauptzweig des $\arccos$ haben. Wollen wir einmal achtgeben, wie das durch die Umkehrregel herauskommt:

Beispiel 8: Für die Hauptzweige gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{d}{dx} \arccos x &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\end{aligned}$$

für den ersten Nebenzweig des Arcussinus aber ebenfalls

$$\frac{d}{dx} \arcsin_1 x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

BEWEIS: Jedenfalls gilt $\sin(\arcsin x) = x$ und deshalb nach der Kettenregel

$$\cos(\arcsin x) \frac{d}{dx} \arcsin x = 1$$

oder (Umkehrregel):

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Das gilt genauso für jeden Nebenzweig des Arcussinus. Aber außerdem gilt überall $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$, also $\cos y = \pm \sqrt{1 - \sin^2 y}$, und das Vorzeichen vor der Wurzel ist eben das Vorzeichen des Cosinus beim Wert y . Für $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ ist aber $\cos y > 0$, deshalb ist dort $\cos y = +\sqrt{1 - \sin^2 y}$, insbesondere, weil der Hauptzweig $\arcsin x$ seine Werte zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ annimmt, ist

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2},$$

während wegen $\frac{\pi}{2} < \arcsin_1 x < \frac{3\pi}{2}$ für den Nebenzweig das andere Vorzeichen herauskommt. Analog bei $\arccos$. $\square$

Ebenso überlegt man sich die Vorzeichen der Ableitungen für alle anderen Nebenzweige der Arcusfunktionen. — Nun zu den Ableitungen von Tangens und Cotangens:

Beispiel 9: *Es gilt*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tan x &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ \frac{d}{dx} \cot x &= -\frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

BEWEIS: Quotientenregel,

$$\frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

analog für $\cot x$. $\square$

Beispiel 10: Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \arctan x &= \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x &= -\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

BEWEIS: $\tan(\arctan x) = x$, also Umkehrformel

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \cos^2(\arctan x).$$

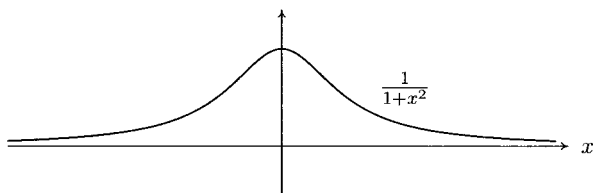
Beachte aber:

$$\tan^2 y = \frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1 - \cos^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y} - 1,$$

also

$$\cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y},$$

setze nun $y = \arctan x$. Analog für $\operatorname{arccot} x$. □



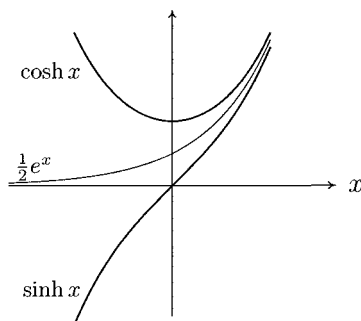
Ableitung des Arcustangens ist die Funktion $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$

Es gibt unter den unendlich vielen elementaren Funktionen noch manche, die so wichtig sind, dass sie eigene Namen führen, wie zum Beispiel die sogenannten **Hyperbelfunktionen** Cosinus hyperbolicus und Sinus hyperbolicus, die durch

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

definiert sind. Ihre Umkehrfunktion sind die sogenannten **Area-funktionen** Arcasinus hyperbolicus $\operatorname{Arsinh} := (\sinh)^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

und $\text{Arcosh} := (\cosh|_{\mathbb{R}^+})^{-1} : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$, der Areacosinus hyperbolicus.



Die Graphen der Hyperbelfunktionen

Diese Funktionen sind in eigenartiger Weise mit den trigonometrischen Funktionen und ihren Arcusfunktionen verwandt, was man aber erst durch die Funktionentheorie (Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Variablen) richtig verstehen lernt. Zum Beispiel gilt

Notiz: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und ferner

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \cosh x &= \sinh x \\ \frac{d}{dx} \sinh x &= \cosh x, \\ \frac{d}{dx} \text{Arcosh } x &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \\ \frac{d}{dx} \text{Arsinh } x &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\end{aligned}$$

Soviel über das Ableiten. Im nächsten Kapitel wollen wir uns einer anderen alten mathematischen Kulturtechnik zuwenden, nämlich der *Integration*.

2.7 Übungsaufgaben

Aufgabe R2.1: Bilden Sie die Ableitung der Funktionen

- a) $e^{-x}(\sin x - \cos x)$,
- b) $\frac{x^4}{4} \left[(\ln x)^2 - \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{8} \right]$ für $x > 0$,
- c) $\arcsin(1/x)$ für $x \neq 0$,
- d) $\frac{d}{dx} x^x$ für $x > 0$,
- e) $\frac{d}{dx} \ln |x|$ für $x \neq 0$.

Aufgabe R2.2: a) Berechnen Sie die Umkehrfunktion

$$\operatorname{Arsinh} := (\sinh)^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

indem Sie $y = \sinh(x)$ direkt nach x auflösen. b) Berechnen Sie die Ableitung von Arsinh auf zwei Weisen: 1. indem Sie die Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion und 2. indem Sie das Ergebnis von a) verwenden.

Aufgabe R2.3: In der statistischen Physik spielt die Fermi-Funktion $f(x) = 1/(e^x + 1)$ eine wichtige Rolle. Skizzieren Sie diese Funktion und ihre Ableitung im Intervall $-2 < x < +2$. Untersuchen Sie die Funktion $f(ax)$ im gleichen Intervall für Werte von $a \gg 1$.

Aufgabe R2.4: Für die Auslenkung $z(t)$ eines Federpendels als Funktion der Zeit t gelte $z(t) = a \cos \omega t$. Teilen Sie das Schwingungsintervall $[-a, a]$ in viele gleiche Teilintervalle der Länge Δz auf und berechnen Sie näherungsweise die Zeit Δt , die sich das Pendel im Schwingungsintervall $[z, z + \Delta z]$ aufhält, als Funktion von z .

Aufgabe T2.1: Es habe $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bei b ein *lokales Maximum*, d.h. es gibt ein $\delta > 0$ mit $f(b) \geq f(x)$ für alle $x \in (b - \delta, b)$. Beweisen Sie: Ist f differenzierbar bei b , so gilt $f'(b) \geq 0$.

Aufgabe T2.2: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar bei b und $f'(b) > 0$. Beweisen Sie, dass f bei b ein *isoliertes lokales Maximum* hat, d.h. dass es ein $\delta > 0$ mit $f(b) > f(x)$ für alle $x \in (b - \delta, b)$ gibt.

Aufgabe T2.3: Zwei allgemeine Intervalle D und E sollen hier einmal *äquivalent* heißen, geschrieben $D \sim E$, wenn es eine die Voraussetzungen der Umkehrregel erfüllende differenzierbare Funktion f auf D mit $f(D) = E$ gibt. Welche allgemeinen Intervalle sind äquivalent, welche nicht? Zeigen Sie $\mathbb{R}_0^+ \sim [a, b)$ und $\mathbb{R}_0^+ \not\sim [a, b]$.

3

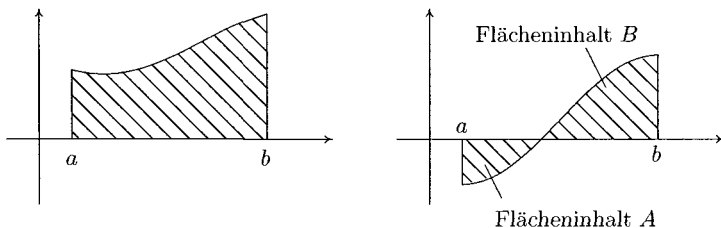
Integration

3.1 Riemann-integrierbare Funktionen

Wir betrachten eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Wie Sie wissen, ist die anschauliche Bedeutung des Integrals

$$\int_a^b f(x) dx,$$

wenn es denn existiert, der Inhalt der Fläche “unter dem Graphen”, wobei Flächenanteile unterhalb der x -Achse negativ zu verbuchen sind:

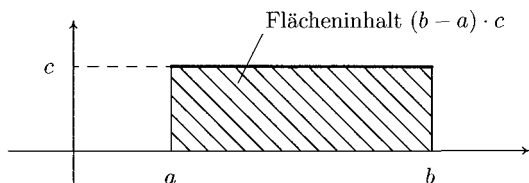


Flächeninhalt ist $\int_a^b f(x) dx$ $\int_a^b f(x) dx = B - A$ in diesem Falle

Als Definition können wir das aber nicht gelten lassen, denn der Begriff “Flächeninhalt” ist eben genauso problematisch wie der In-

tegralbegriff. Ja wenn $f = c$ konstant wäre! Dann definierten wir natürlich

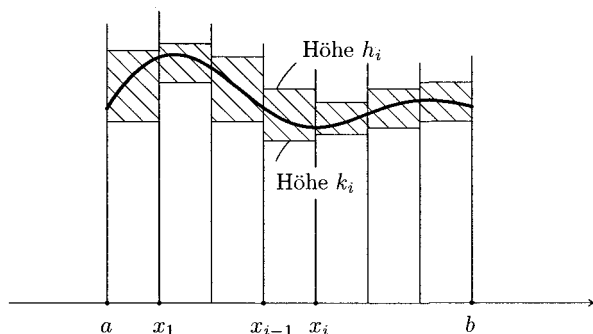
Definition: $\int_a^b c \, dx := (b - a) \cdot c.$ □



Integral über konstante Funktion: Fläche des Rechtecks

Ich kann Sie aber schnell einmal an die genaue Definition des Riemann-Integrals erinnern, wenn auch der spätere praktische Umgang mit dem Begriff nach Regeln geschieht, denen man den Bezug zu der grundlegenden Begriffsbestimmung nicht mehr so direkt ansieht. Als Hintergrundinformation!

Man nennt eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ **beschränkt**, wenn es eine Konstante C gibt, so dass $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in D$ ist. Um beschränkte Funktionen auf kompakten Intervallen, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, soll es sich handeln. Nehmen wir einmal eine solche Funktion in die Zange:



Funktion in die Zange genommen

Unter einer **Zange** wollen wir nämlich eine Unterteilung

$$a =: x_0 < x_1 < \dots < x_n := b$$

des Intervalls zusammen mit Höhenangaben $k_i \leq h_i$ für $i = 1, \dots, n$ verstehen. Wir sagen f sei **in der Zange**, wenn jeweils

$$k_i \leq f(x) \leq h_i$$

für alle x mit $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ gilt. Der Gesamtflächeninhalt der niedrigeren Säulen, also

$$\mathcal{U}(Z) := \sum_{i=1}^n k_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

soll die **Untersumme** der Zange heißen,

$$\mathcal{O}(Z) := \sum_{i=1}^n h_i \cdot (x_i - x_{i-1})$$

die **Obersumme**, und die Differenz

$$\mathcal{O}(Z) - \mathcal{U}(Z) = \sum_{i=1}^n (h_i - k_i)(x_i - x_{i-1})$$

nennen wir die **Integralestoleranz** der Zange, das ist der Flächeninhalt des in der obigen Figur schraffierten Bereichs.

Definition: Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Riemann-integrierbar**, wenn man sie mit beliebig kleiner (positiver) Toleranz in die Zange nehmen kann. $\square$

Genauer also, wenn sich zu jedem (“noch so kleinen”) $\varepsilon > 0$ eine Zange um f mit einer Integralestoleranz $\mathcal{O}(Z) - \mathcal{U}(Z) < \varepsilon$ finden läßt.

Lemma und Definition: Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so gibt es genau eine Zahl $I \in \mathbb{R}$, für die $\mathcal{U}(Z) \leq I \leq \mathcal{O}(Z)$ für alle Zangen gilt, in die man f nehmen kann, und diese Zahl heißt das **Integral** von f über $[a, b]$ und wird als

$$I =: \int_a^b f(x) dx$$

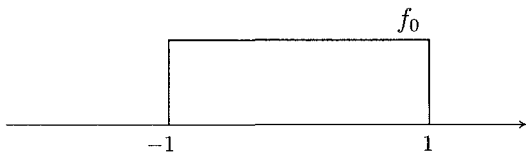
geschrieben. Diese Notation wird noch um die Festsetzungen

$$\int_b^a f(x)dx := - \int_a^b f(x)dx \quad \text{und} \quad \int_a^a f(x)dx := 0$$

ergänzt. □

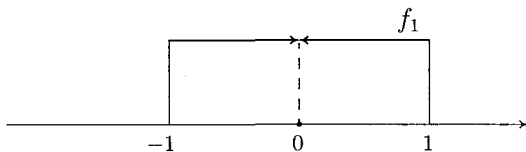
Auf den (leichten) Beweis des Lemmas will ich hier nicht eingehen, man überlegt sich zuerst, dass für alle Zangen Z, Z' um f stets $\mathcal{U}(Z) \leq \mathcal{O}(Z')$ gilt, ...¹.

Manche beschränkten Funktionen sind so sperrig, dass sie sich einfach in keine enge Zange nehmen lassen, ich zeige Ihnen ein Beispiel. Wir gehen von einer harmlosen Funktion $f_0 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, z.B. der konstanten Funktion 1 aus.



Ausgangsfunktion, konstant Eins

Diese können wir natürlich sogar mit Nulltoleranz in die Zange nehmen. Jetzt verändern wir f_0 zu f_1 , indem wir am Intervallmittelpunkt den Wert auf Null setzen:

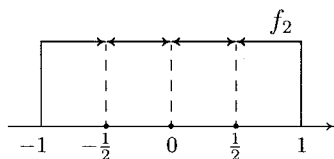


Erste Abänderung: Wert Null am Intervallmittelpunkt

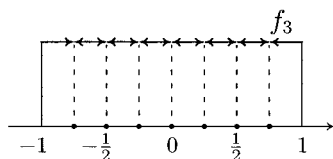
Jetzt geht es zwar nicht mehr mit Nulltoleranz, aber wir können das den Nullpunkt enthaltende Teilintervall der Zerlegung so klein machen wie wir wollen, und deshalb gelingt es leicht, eine vorgegebene positive Toleranzgrenze $\varepsilon > 0$ zu unterschreiten.

Das gilt auch, wenn wir an endlich vielen Stellen den Funktionswert auf Null setzen, und das tun wir jetzt sukzessive immer an

den Mittelpunkten der Teilintervalle, auf denen die Funktion noch konstant 1 ist:



Zweite Abänderung



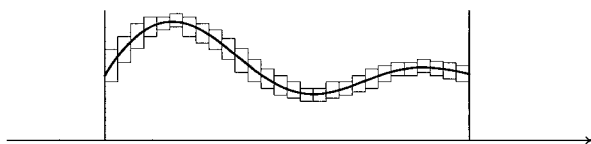
Dritte Abänderung

Die Grenzfunktion $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ ist dann auf der Menge

$$\left\{ \frac{k}{2^n} \mid k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } -2^n \leq k \leq 2^n \right\}$$

Null, sonst Eins. Die Nullstellen liegen so dicht, dass $\mathcal{U}(Z) \leq 0$ für alle Untersummen gilt, aber oben bleiben auch noch genügend viele Punkte übrig: in jedem Teilintervall von $[-1, 1]$ finden sich auch 1-Stellen von f , so dass $1 \cdot (1 - (-1)) = 2 \leq \mathcal{O}(Z)$ für alle Zangen um f gilt, die Integraltoleranz ist also mindestens 2 und f daher nicht Riemann-integrierbar. $\square$

Man glaubt aber schon anschaulich zu sehen, dass man *stetige* Funktionen in beliebig enge Zangen nehmen kann,



Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen sind Riemann-integrierbar

und die Intuition trägt hier auch nicht, in der Tat kann man beweisen²:

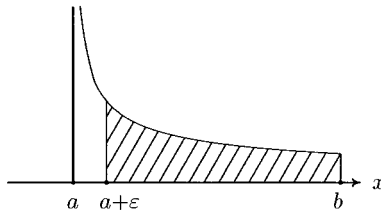
Lemma: Jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (erst recht jede differenzierbare!), ja jede beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit nur endlich vielen Unstetigkeitsstellen ist Riemann-integrierbar. $\square$

Damit haben wir sofort einen Riesenvorrat an Beispielen integrierbarer Funktionen. Ganz zufrieden kann man damit aber noch nicht sein, denn oft möchte man auch Funktionen auf anderen allgemeinen Intervallen als gerade auf den kompakten Intervallen $[a, b]$ integrieren, und oft über Integranden, die zwar stetig, aber nicht beschränkt sind. Das sind die sogenannten “uneigentlichen” Riemann-Integrale, sie werden auf die “eigentlichen” Integrale durch Limesbildung zurückgeführt, zum Beispiel:

Definition (uneigentliche Integrale): Ist $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ so beschaffen, dass $f|_{[a+\varepsilon, b]}$ für jedes $0 < \varepsilon < b - a$ integrierbar ist, so heißt der Grenzwert

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx,$$

falls er existiert, das *uneigentliche Integral von f über $(a, b]$* .

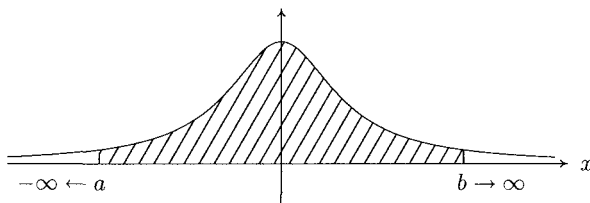


$$\text{Uneigentliches Integral } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ so beschaffen, dass für jedes $a < b$ die Einschränkung $f|_{[a, b]}$ integrierbar ist, so heißt der Grenzwert³

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

falls er existiert, das *uneigentliche Integral von f über $\mathbb{R}$* . $\square$



$$\text{Uneigentliches Integral } \lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

Ich schreibe das nicht für alle allgemeinen Intervalle einzeln auf, aber ganz analog macht man es bei den anderen, also bei $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$, $[a, b)$ und $(a, b]$.

3.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Die Integraldefinition im vorigen Abschnitt dient der Begriffsbestimmung, weniger dem direkten Rechnen. Viele Integrale lassen sich sehr elegant mit Hilfe eines Satzes bestimmen, der das Integrieren stetiger Funktionen in gewissem Sinne als das “Umkehren des Ableitens” nachweist und deshalb, obwohl er ganz einfach zu beweisen ist, seinen Ehrennamen schon verdient:

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: Ist $D \subset \mathbb{R}$ ein allgemeines Intervall, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in D$, so gilt

$$\frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f(t) dt = f(x)$$

auf ganz D . □

Eine Anmerkung zur Notation: dass in der üblichen Schreibweise $\int_a^b f(x) dx$ überhaupt die Variable der Funktion vorkommt, ist aus der Definition eigentlich nicht plausibel, man würde eher so etwas wie $\int_a^b f$ erwartet haben. In der Schreibweise $\int_a^b f(x) dx$ steckt aber

viel verborgene Weisheit. Einen Vorteil sehen Sie schon: man kann das Integral auch schreiben, wenn die Funktion keinen eigenen Namen hat, etwa $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Von der Mathematik geht aber keine Verpflichtung aus, die “Integrationsvariable” unbedingt x zu nennen, offensichtlich ist doch

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1-u^2} du = \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt \quad \text{usw.}$$

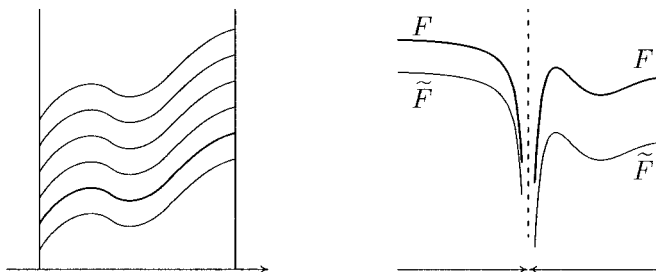
nämlich jedesmal, nebenbei gesagt, die Zahl $\frac{\pi}{4}$.

Bei der Formulierung des “HDI” mache ich von dieser Freiheit Gebrauch, um zu zeigen, auf welche Variable der Ableitungsoperator $\frac{d}{dx}$ zugreift, nämlich nur auf die obere Integralgrenze. Es wäre hier schlechter mathematischer Stil der Integrationsvariablen, bei deren Benennung man volle Freiheit hat, gerade einen Namen zu geben, den eine andere der vorkommenden Größen schon hat, wenn es auch nicht gerade ein inhaltlicher Fehler wäre.

Nun erinnere ich Sie daran, wie man den Hauptsatz zur Bestimmung von Integralen anwendet.

Definition (Stammfunktion): Unter einer **Stammfunktion** einer stetigen Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem allgemeinen Intervall D verstehen wir eine differenzierbare Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F' = f$. □

Beachte, dass dann auch $F+c : D \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante bezeichnet, eine Stammfunktion ist, und überhaupt ist dann jede Stammfunktion von f von dieser Gestalt, denn ist $\tilde{F}$ irgendeine Stammfunktion von f , so ist ja $(F - \tilde{F})' = f - f \equiv 0$, also $F - \tilde{F} = \text{const}$, d. h. $\tilde{F} = F + c$. Dabei benutzen wir wirklich, dass D ein allgemeines Intervall ist,⁴ wollten wir auch etwa im Falle $D = \mathbb{R} \setminus 0$ von Stammfunktionen sprechen, so wäre diese Behauptung nicht richtig:



Die Schar der Stammfunktionen auf einem Intervall

$F' = \tilde{F}'$ auf $\mathbb{R} \setminus 0$, obwohl $\tilde{F} - F$ dort nicht konstant ist.

Korollar aus dem Hauptsatz: Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem allgemeinen Intervall und F eine Stammfunktion von f , so gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

für alle $a, b \in D$.

BEWEIS: Nach dem Hauptsatz ist auch durch

$$\tilde{F}(x) := \int_a^x f(t) dt$$

eine Stammfunktion gegeben, also gilt $\tilde{F} = F + c$ und daher

$$\tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) = F(b) - F(a),$$

aber $\tilde{F}(a) = 0$ und $\tilde{F}(b) = \int_a^b f(x) dx$. □

Alle Integrale über den Integranden f hat man also in der Tasche, wenn man eine Stammfunktion F gefunden hat, ganz gleich welche.

Die einfachste Art eine Stammfunktion zu finden, ist natürlich, den Integranden in einer Ableitungsliste als Ableitung zu entdecken.

$F(x)$	$F'(x) = f(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\ln x$	$1/x$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\vdots$	$\vdots$

*Ableitungsliste, Definitionsbereiche bitte
in Eigenverantwortung auswählen!*

Demnach ist z.B. $\int_{\alpha}^{\beta} \cos x dx = \sin \beta - \sin \alpha$. Das erhält man ganz ohne Arbeit. Ein kleines bisschen muss man bereits bei

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sin x dx = \cos \alpha - \cos \beta$$

aufpassen, nämlich auf's Vorzeichen, weil ja eigentlich nicht $\sin x$ selbst als Ableitung in der Liste steht, sondern $-\sin x$. Und auch $\cos x + \sin x$ steht nicht darin, aber natürlich gilt

Notiz: Stets gilt $\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$ und

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

sogar für beliebige Riemann-integrierbare Funktionen, das folgt direkt aus der Definition. □

So kommt man schon etwas weiter. Noch weiter aber kommt man, wenn man die Produktregel und die Kettenregel der Ableitung mit einsetzt. Davon handeln die nächsten beiden Abschnitte. Zuvor nur noch die Erinnerung an eine praktische

Schreibweise: $F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b$, oder auch kurz $[F]_a^b$ oder noch kürzer $F(x)_a^b$ oder auch ganz ausführlich $[F(x)]_{x=a}^{x=b}$.

Auch diese Notation bleibt beim Fehlen einer Funktionsbezeichnung wirksam, z.B. $[x + \sqrt{1 - x^2}]_a^b$, und die Variablennamen schreibt man dazu, wenn sonst Verwechslungen auftreten könnten, z.B. ist $[x^2 + \lambda x]_{x=0}^{x=1} = 1 + \lambda$, aber $[x^2 + \lambda x]_{\lambda=0}^{\lambda=1} = x$.

3.3 Partielle Integration

Die Methode der sogenannten partiellen Integration geht davon aus, dass für zwei C^1 -Funktionen $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem allgemeinen Intervall die Produktregel $(uv)' = u'v + uv'$ gilt, uv also eine Stammfunktion von $u'v + uv'$ ist. Sucht man daher eine Stammfunktion von $u'v$, so genügt es eine Stammfunktion von uv' zu finden, denn wenn man diese von uv subtrahiert, so erhält man ja die gesuchte Stammfunktion von $u'v$, da

$$u'v = (uv)' - uv'$$

ist. So kann man also vor der Stammfunktionssuche den Ableitungsoperator von u auf v "überwälzen". In Integralform nach dem Hauptsatz:

Partielle Integration: Sind $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$ zwei C^1 -Funktionen auf dem allgemeinen Intervall D , so gilt

$$\int_a^b u'v \, dx = [u \cdot v]_a^b - \int_a^b u \cdot v' \, dx$$

für alle $a, b \in D$. □

Wenn Sie diese Methode zum Aufsuchen einer Stammfunktion einer stetigen Funktion $f(x)$ oder zur Bestimmung eines Integrals von $\int_a^b f(x)dx$ benutzen wollen, haben Sie also im Wesentlichen drei Arbeitsschritte auszuführen:

1. Schritt: Schreibe $f(x)$ als ein Produkt

$$f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x),$$

wobei f_1 als Kandidat für u' und f_2 als Kandidat für v gedacht ist.

2. Schritt: Suche Stammfunktion für f_1 zu finden. Gelingt das, nenne sie u und setze $v := f_2$. Andernfalls zurück zum ersten Schritt.

3. Schritt: Suche Stammfunktion von $u(x)v'(x)$. Ist eine gefunden, subtrahiere sie von uv und ernte damit eine Stammfunktion von $f(x)$. Andernfalls zurück ans Reißbrett!

Man muss also die Produktzerlegung im ersten Schritt schon vorausschauend vornehmen. Hier ist ein einfaches Beispiel. Sei

$$f(x) = x \cdot \sin x.$$

Dieser Integrand steht schon in Produktform da, x und $\sin x$ bieten sich als die Faktoren an. Welcher soll Kandidat für u' , welcher v sein?

Den zweiten Schritt könnten wir in jedem Falle ausführen: $\frac{1}{2}x^2$ ist eine Stammfunktion für x und $-\cos x$ ist eine Stammfunktion für $\sin x$. Wenn wir aber x als den Kandidaten für u' wählen, müssen wir im dritten Schritt eine Stammfunktion für $uv' = \frac{1}{2}x^2 \cos x$ suchen, da wären wir ja vom Regen in die Traufe gekommen!

Wenn aber x der Kandidat für v wird, dann wird $v' = 1$ und $uv' = -\cos x$, davon kennen wir eine Stammfunktion, nämlich $-\sin x$. Also ist $-x \cdot \cos x + \sin x$ eine Stammfunktion von $x \cdot \sin x$, also

$$\int_a^b x \sin x \, dx = \left[\sin x - x \cos x \right]_a^b.$$

Partielle Integration funktioniert nicht immer, aber öfter als man denkt. Betrachten Sie das Beispiel $f(x) = \ln x$. Scheitert hier schon der erste Schritt? Aber nein, betrachte

$$\ln x = 1 \cdot \ln x.$$

Dann können wir $u = x$ setzen, erhalten $u \cdot v' = x \cdot \frac{1}{x} = 1$ mit Stammfunktion x , folglich ist $x \ln x - x$ eine Stammfunktion von $\ln x$.

3.4 Substitution

Bei der Substitution zeigt sich die Integralnotation von ihrer besten Seite. Wir wollen ein Integral $\int_a^b f(x) dx$ ausrechnen. Die Substitutionsmethode besteht darin, dass wir einen gewissen Term oder Ausdruck in der Variablen x , zum Beispiel $u(x) := x^2$ oder $u(x) := \sin x$ oder $u(x) := \sqrt{x-3}$ durch eine neue Variable u ersetzen oder *substituieren* wollen, um das Integral über die Variable x in ein hoffentlich einfacheres Integral über die Variable u verwandeln zu können.

Dabei muss aber *alles* in der neuen Variablen ausgedrückt werden, nicht nur die Funktion $f(x)$, sondern auch die Integrationsgrenzen und das “Differential” dx , das nicht umsonst an der Integralnotation mitwirkt. Wir treffen dafür die

Substitutionsvoraussetzung: Es sei $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $u'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$, die folglich nach der Umkehrregel umkehrbar ist. $\square$

Für das praktische Ausführen so einer Substitution eignet sich die klassische Notation $u = u(x)$ für die Substitutionsfunktion und $x = x(u)$ für deren Umkehrung bestens. Beachten Sie übrigens, dass nach der Umkehrregel dann die Ableitung der Umkehrung, also $x'(u)$, gleich dem Kehrwert der Ableitung der Substitutionsfunktion selbst ist — genommen an der richtigen Stelle! Nämlich

$$x'(u) = \frac{1}{u'(x(u))}.$$

Um die Funktion $f(x)$ in der Variablen u auszudrücken brauchen wir ja nur x durch die neue Variable auszudrücken, also zu $f(x(u))$ überzugehen. Und jetzt vertrauen wir uns blindlings der Notation

$$u'(x) = \frac{du}{dx}$$

an, nehmen das Wort *Differentialquotient* für bare Münze und rechnen die *Differentiale*⁵ dx und du dementsprechend ineinander um:

$$du = u'(x)dx \quad \text{und analog} \quad dx = x'(u)du.$$

Dann übersetzt sich das Integral über die x -Variable wie von selbst in ein Integral über die u -Variable:

Substitutionsregel: Ist f stetig und erfüllt $u = u(x)$ die Substitutionsvoraussetzung, so ist

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x(u))x'(u) du.$$

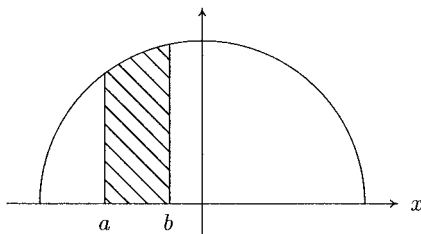
So macht man das, aber ist es auch in Ordnung? War die Herleitung mit den “Differentialen” ein Beweis? Wohl kaum. Der BEWEIS besteht einfach in der Kettenregel, denn wenn $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ bezeichnet, so ist doch

$$\frac{d}{du} F(x(u)) = F'(x(u))x'(u) = f(x(u))x'(u)$$

nach der Kettenregel und daher ist das Integral auf der rechten Seite der Substitutionsformel gleich $F(x(u(b))) - F(x(u(a)))$, also gleich $F(b) - F(a)$, wie das auf der linken Seite. $\square$

Als Beweis brauchten wir die Herleitung also nicht, aber beim Rechnen konkreter Beispiel ist es praktisch, danach vorzugehen, weil dann die Notation für uns denkt und wir uns nichts zu merken brauchen. Probieren wir das gleich einmal aus.

Was ist $\int_a^b \sqrt{1-x^2} dx$?



Um $\int_a^b \sqrt{1-x^2} dx$ zu bestimmen, substituiere $x = \sin u$

Wenn wir $x = \sin u$ substituieren könnten, würde jedenfalls die unangenehme Wurzel verschwinden, weil ja $1 - \sin^2 u = \cos^2 u$ ist. Was sonst etwa noch geschieht wird sich weisen. Wir legen uns also zu dieser Substitution zurecht:

$$\begin{aligned} u &= \arcsin x \\ x &= \sin u \\ dx &= \cos u \, du \end{aligned}$$

Die Substitutionsvoraussetzung ist für $-1 < a < b < 1$ erfüllt, die Werte des Arcussinus liegen zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$, wo der Cosinus positiv ist, also ist hier $\sqrt{1-x(u)^2}$ wirklich $\cos u$ und nicht etwa $-\cos u$, Substitution ergibt daher

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2} dx = \int_{\arcsin a}^{\arcsin b} \cos^2 u \, du.$$

Von hier aus kommen wir nun zu Fuß weiter, denn nach dem Additionstheorem für den Cosinus ist $\cos 2u = \cos^2 u - \sin^2 u = 2\cos^2 u - 1$ und daher der Integrand $\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$. Das Integral über $\cos 2u$ könnte man nochmals mit einer ganz kleinen Substitution behandeln: $2u = v$, $u = \frac{1}{2}v$, $du = \frac{1}{2}dv$, würde man nicht sowieso schon von weitem sehen, dass $\frac{1}{2} \sin 2u$ Stammfunktion von $\cos 2u$ ist. Also haben wir

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \left[u + \frac{1}{2} \sin 2u \right]_{u=\arcsin a}^{u=\arcsin b}$$

erhalten. Insbesondere ist, nach dem HDI,

$$\frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{2} \sin 2u\right)\Big|_{u=\arcsin x}$$

eine Stammfunktion von $\sqrt{1-x^2}$. Der darin vorkommende Term $\sin(2 \arcsin x)$ sollte sich etwas netter schreiben lassen, es ist

$$\sin 2u = 2 \sin u \cos u = 2 \sin u \sqrt{1 - \sin^2 u}$$

für $u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, also ist

$$F(x) := \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2})$$

eine Stammfunktion von $\sqrt{1-x^2}$.

Vom Beispiel zur allgemeinen Substitutionsregel zurückkehrend, bemerken wir, dass wir die oben gemachte *Substitutionsvoraussetzung* etwas lockern können. Wie weit? Na jedenfalls so weit, wie es ohne Beschädigung unserer Beweisargumentation geht, wir müssen nur genau hinschauen. Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem allgemeinen Intervall und bezeichnet $x = x(u)$ eine differenzierbare Funktion $[u_0, u_1] \rightarrow D$, so gilt doch ohne weitere Umkehrbarkeitsvoraussetzungen nach der Kettenregel die Substitutionsformel

$$\int_{x(u_0)}^{x(u_1)} f(x) dx = \int_{u_0}^{u_1} f(x(u))x'(u) du.$$

Der einzige Schönheitsfehler ist, dass vielleicht nicht die gewünschten Integrationsgrenzen $a, b \in D$ dabei herauskommen, darauf müssen wir im Anwendungsfalle also achten. Wähle $x = x(u)$ so, dass $x(u_0) = a$ und $x(u_1) = b$ (oder umgekehrt) gilt. Dann kann man auch mit $x = x(u)$ alleine substituieren, eine Umkehrung $u = u(x)$ braucht gar nicht vorhanden zu sein.

Auch mit einer auf $[a, b]$ definierten differenzierbaren Funktion $u = u(x)$ allein lässt sich unter Umständen substituieren, auch wenn

sie nicht umkehrbar ist und $x = x(u)$ deshalb nicht zur Verfügung steht. Wenn es uns nämlich gelingt, sagen wir einfach: durch Probieren, eine stetige Funktion $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem allgemeinen Intervall so zu finden, dass $u(x) \in E$ und

$$f(x) = \varphi(u(x))u'(x)$$

gilt, denn dann gilt nach der Kettenregel die Substitutionsformel

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} \varphi(u) du.$$

Im umkehrbaren Fall ist der u -Integrand der Substitutionsformel so ein φ , also $\varphi(u) = f(x(u))x'(u)$. Sagen Sie nicht, man werde ohne Hilfe der Umkehrung $x = x(u)$ das φ kaum erraten können: manchmal steht $f(x)$ schon so da, dass Ihnen $u = u(x)$ und $\varphi(u)$ geradezu entgegen springen, etwa $f(x) = e^{\sin x} \cos x$, ein anderes Mal brauchen Sie nur einen kleinen Handgriff zu tun, um f in diese Gestalt zu bringen. Also auch die Substitution mit $u = u(x)$ allein hat Chancen.

Ich weiß wohl, dass es Stammfunktionen suchende Software gibt und Studenten sie mit Vergnügen bei Integrationsaufgaben anwenden, die eigens gestellt wurden, um das Integrieren *per Hand* zu üben. Haben die klassischen Integrationstechniken wie partielle Integration und Substitution im Computer-Zeitalter an Bedeutung verloren?

Na vielleicht, ein bisschen. Gar so große Virtuosität im Integrieren *per Hand* wird Ihnen ja auch nicht abverlangt. Aber die Ansicht, man brauche die Substitution nicht handhaben zu können, weil es ja dafür Software gibt, wäre etwa so zutreffend wie die Meinung, man brauche nicht laufen zu lernen, da es ja Autos gibt. Das ist einfach eine Frage der unmittelbaren Beweglichkeit! Sie wissen, zum Beispiel aus einer Formelsammlung, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

gilt, finden sich aber plötzlich beim Lesen, Diskutieren, Arbeiten mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx$$

konfrontiert. Ist das nun $\lambda\sqrt{\pi}$ oder $\sqrt{\pi}/\lambda$ oder $\sqrt{\lambda\pi}$ oder $\sqrt{\pi/\lambda}$? Peinlich.

Ein Notationsthema soll noch zur Sprache kommen. Wollen wir uns einer Notation für die Stammfunktionen als “unbestimmte Integrale” anschließen? Manche Autoren schreiben

$$F(x) = \int f(x) dx$$

(ohne Integrationsgrenzen), um auszudrücken, dass F eine Stammfunktion von f sei und sprechen von dem Symbol $\int f(x) dx$ als von einem unbestimmten Integral. Obwohl ich die Bequemlichkeit einer Schreibweise wie

$$\int u'v dx = uv - \int uv' dx$$

für die partielle Integration einsehe, kann ich mich doch nicht dafür erwärmen, weil die Schreibweise den Sinn des Gleichheitszeichens manipuliert. Wenn

$$1 + \sin x = \int \cos x dx = \sin x$$

gelten soll, dann verweigere ich die Gefolgschaft.

Eine weniger radikale Version der Schreibweise will das **unbestimmte Integral** $\int f(x) dx$ als die Gesamtheit aller Stammfunktionen gelesen wissen und schreibt

$$\int f(x) dx = F(x) + c,$$

wobei also c den Scharparameter der Stammfunktionenfamilie bezeichnen soll.

Schon besser! Birgt aber die Gefahr, dass Sie das unbestimmte Integral $\int f(x) dx$ dann *doch* alle Augenblicke wieder wie eine Einzelfunktion behandeln und ein bisschen ins Schwimmen kommen. Am liebsten wäre mir, Sie würden die Notation gar nicht in der Öffentlichkeit verwenden. Geht aber nicht an, denn das unbestimmte Integral ist nun einmal im Gebrauch, und Sie müssen auch damit zurecht kommen.

3.5 Übungsaufgaben

Aufgabe R3.1: Finden Sie durch partielle Integration Stammfunktionen für $x^2 \ln x$ und xe^x und eine ‘Rekursionsformel’ für das Integral

$$I_n = \int_a^b x^n e^x dx,$$

indem Sie I_n auf I_{n-1} zurückführen.

Aufgabe R3.2: Berechnen Sie mit Hilfe der Partialbruch-Zerlegung

$$f(x) := \frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} \right)$$

die Familie der Stammfunktionen von $f(x)$ für alle drei Intervalle $x < a$, $a < x < b$, $b < x$.

Aufgabe R3.3: Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx$$

mit Hilfe der Substitution $u = e^x$.

Aufgabe R3.4: Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int x \sin(3x^2 - 5) dx.$$

Aufgabe R3.5: Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_{-a}^a \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

mit Hilfe der Substitution $x = a \sin z$.

Aufgabe T3.1: Beweisen Sie, daß mit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auch die Funktion $|f|$ Riemann-integrierbar ist und daß

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

gilt.

Aufgabe T3.2: Zeigen Sie, daß es zu jedem $c \in \mathbb{R}$ möglich ist, stetige Funktionen $a, b : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $a(0) = b(0) = 0$ und

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{-a(\varepsilon)} \frac{dx}{x} + \int_{b(\varepsilon)}^1 \frac{dx}{x} \right) = c$$

zu finden.

Aufgabe T3.3: Zu einer Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wird

$$f_+ : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

durch $f_+(x) = f(x)$ falls $f(x) \geq 0$ und $f_+(x) = 0$ sonst festgelegt, analog übrigens $f_- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Beweisen Sie direkt aus der Definition der Riemann-Integrierbarkeit: Mit f ist auch f_+ Riemann-integrierbar.

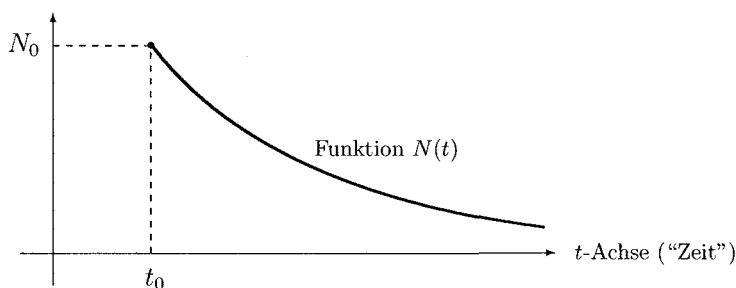
Aufgabe T3.4: Existieren $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \sin x dx$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx$?

4

Differentialgleichungen erster Ordnung

4.1 Der Begriff der Differentialgleichung erster Ordnung

Die Lösung eines physikalischen Problems kann, mathematisch gesehen, in der Bestimmung einer Zahl bestehen. Oft aber bezieht sich das physikalische Interesse nicht auf eine einzelne Zahl, sondern auf eine *Funktion*, z.B. eine Funktion $N : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ welche beschreibt, wieviele Atome eines zum Zeitpunkt t_0 aus N_0 Atomen bestehenden radioaktiven Präparats zum Zeitpunkt $t \geq t_0$ jeweils noch da sind.



Radioaktiver Zerfall

Zur Berechnung einer physikalisch interessanten Funktion braucht man gewöhnlich zweierlei mathematische Information, nämlich zum

einen ein *allgemeines Gesetz*, zum anderen Kenntnis besonderer *Bedingungen des individuellen Falles*. Um etwa aus dem Newtonschen Bewegungsgesetz die Flugbahn einer Raumsonde vorherberechnen zu können, braucht man auch die individuellen Startinformationen: wann, wo und mit welcher Anfangsgeschwindigkeit geht die Reise los?

Die physikalische Herleitung des allgemeinen Gesetzes führt nun oft auf eine Gleichung, im Beispiel des radioaktiven Zerfalls ist es die Gleichung

$$N'(t) = -\alpha N(t),$$

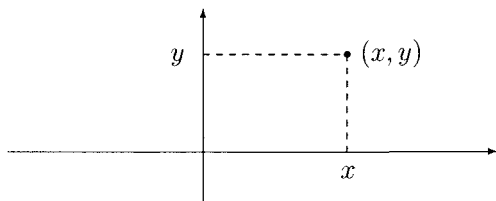
in der außer der Funktion auch noch deren Ableitung, häufig auch noch die zweite und manchmal sogar die dritte oder, selten, noch höhere Ableitungen vorkommen. Solche Gleichungen nennt man *Differentialgleichungen* erster oder zweiter oder sogar dritter und noch höherer *Ordnung*.

Die besonderen Bedingungen, mit denen im konkreten Anwendungsfall die gesuchte Funktion aus dem allgemeinen Gesetz bestimmt werden soll, sind meist sogenannte *Anfangsbedingungen*, in unserem Beispiel etwa $N(t_0) = N_0$, oder *Randbedingungen* über das Verhalten der Funktion an den Intervall-Enden, oder Bedingungen über das Verhalten für $t \rightarrow \pm\infty$ und dergleichen.

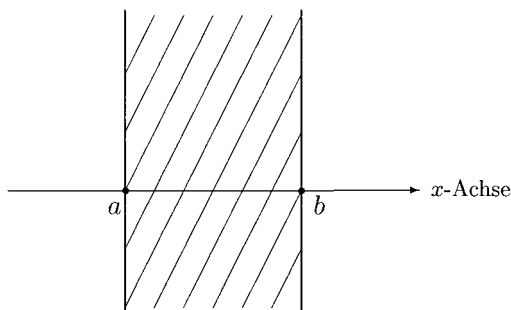
Dass man mit der Technik des Differenzierens solche Gesetze überhaupt aufstellen und mit der Technik des Integrierens die gesuchten Funktionen auch finden, die Differentialgleichungen also *lösen* konnte, *das* war historisch die eigentliche Sensation der Infinitesimalrechnung, nicht die (auch ganz netten) Kurvendiskussionen zu Optimierungszwecken. In die Lösung von Differentialgleichungen bekommen Sie in diesem Kapitel einen ersten Einblick.

In der Physik sind es oft Funktionen der Zeit t , um die es bei den Differentialgleichungen geht, und auch in der mathematischen Theorie der Differentialgleichungen benutzt man gern die Notation t für die unabhängige Variable. Jetzt will ich aber zur guten alten (x, y) -Ebene zurückkehren und für die gesuchte Funktion die klassisch-anonyme Notation $y = y(x)$ verwenden. Wir legen uns zuerst etwas Handwerkszeug zurecht:

Schreib- und Sprechweisen: Die Menge der Zahlenpaare wird mit $\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ bezeichnet, veranschaulicht als Ebene mit Koordinatenachsen.

Die Koordinatenebene $\mathbb{R}^2$

Unter einem **allgemeinen Rechteck** $M \subset \mathbb{R}^2$ wollen wir eine Menge der Form $M = D_1 \times D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_1, y \in D_2\}$ verstehen, wobei D_1 und D_2 allgemeine Intervalle sind. Ist z.B. $D_1 = [a, b]$ und $D_2 = \mathbb{R}$, so ist $D_1 \times D_2$ ein vertikaler Streifen in der (x, y) -Ebene, ein häufig betrachteter Fall. $\square$



Streifen

Definition (Differentialgleichung 1. Ordnung): Es sei $M \subset \mathbb{R}^2$ ein allgemeines Rechteck und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt die Gleichung

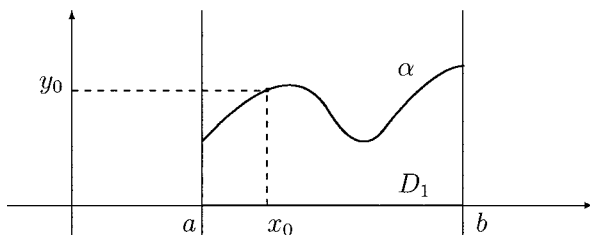
$$y' = f(x, y)$$

eine **gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung** auf M für eine¹ **gesuchte Funktion** $y = y(x)$. Eine differenzierbare

Funktion $\alpha : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem allgemeinen Intervall $D \subset \mathbb{R}$ heißt **eine Lösung von $y' = f(x, y)$** , wenn ihr Graph ganz in M liegt und überall die Bedingung

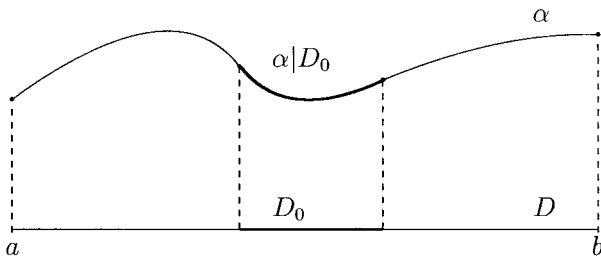
$$\alpha'(x) = f(x, \alpha(x))$$

erfüllt. Ist ferner (x_0, y_0) ein Zahlenpaar in M , und gilt $\alpha(x_0) = y_0$, so sagt man, α erfülle die durch $(x_0, y_0) \in M$ gegebene **Anfangsbedingung**. $\square$



Man sagt 'Anfangsbedingung', auch wenn x_0 mitten drin in D_1 oder dem eventuell kleineren Definitionsbereich D der Lösung ist.

Hinweis: Es wird oft von **maximalen** Lösungen die Rede sein. Damit ist Folgendes gemeint: Ist $\alpha : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung und $D_0 \subsetneq D$ ein kleineres Intervall, so ist natürlich auch $\alpha|_{D_0}$ eine Lösung,

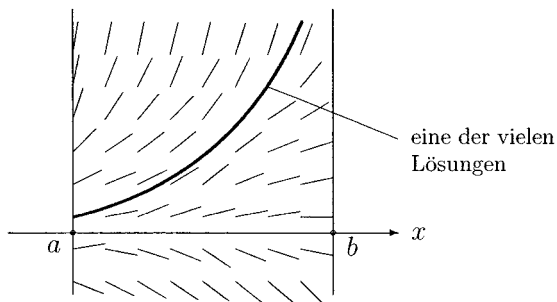


Eingeschränkte Lösung $\alpha|_{D_0}$

die aber zu einer Lösung auf einem größeren Definitionsbereich fortgesetzt werden kann. Interessiert wird man natürlich vor allem an den Lösungen sein, die einen möglichst großen Definitionsbereich

haben, wer wird denn von seinen Lösungen etwas abschneiden und wegwerfen wollen! “Zu kleinen” Lösungen aber ganz und gar die Lösungseigenschaft absprechen zu wollen, würde andererseits oft zu Unbequemlichkeiten der Formulierung führen, daher diese Unterscheidung: Lösungen, am liebsten aber *maximale* Lösungen.

Was bedeutet nun die Bedingung $y' = f(x, y)$ anschaulich? Denken Sie sich an jedem Punkt $(x, y) \in M$ ein kleines Strichlein mit dem Anstieg $f(x, y)$ gezeichnet:



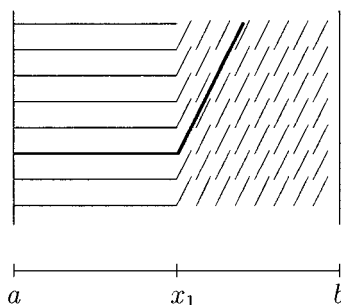
Lösungen sind tangential zum Richtungsfeld

Damit eine Funktion $y = y(x)$ eine Lösung sei, muß ihr Graph diesen Richtungen folgen, denn tatsächlich soll ja y bei x den Anstieg $f(x, y(x))$ haben!

Welche Erwartungen über die Lösbarkeit einer Differentialgleichung und das Verhalten der Lösungen erweckt uns diese anschauliche Vorstellung?

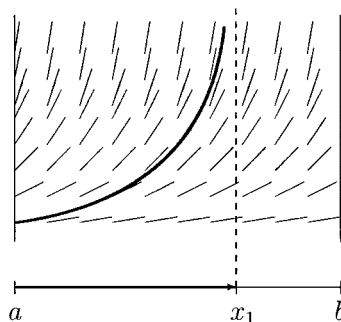
- Erwartung zur Eindeutigkeit: Das Richtungsfeld führt den Graphen so eng, dass er, von einem Anfangspunkt (x_0, y_0) ausgehend, gar keinen Spielraum mehr hat: die Anfangsbedingung sollte eine maximale Lösung eindeutig festlegen (im Wesentlichen richtig).
- Erwartung zur Existenz: Durch jedes $(x_0, y_0) \in M$ sollte es eine maximale Lösung auch geben — man denke an ein Fahrzeug auf M , dessen Lenkung elektronisch immer in der vorgeschriebenen Richtung eingestellt ist — vorausgesetzt, das Richtungsfeld f verlangt keine Absurditäten vom Graphen,

z.B. dass er abrupte Richtungswechsel ausführen und doch differenzierbar bleiben soll (im Wesentlichen richtig).



Man kann keine differenzierbare Lösung erwarten, wenn das Richtungsfeld abrupten Kurswechsel verlangt.

- Erwartung zur Lebensdauer: Auch *maximale* Lösungen werden im Allgemeinen nicht auf ganz D_1 definiert sein, selbst wenn $D_2 = \mathbb{R}$ ist (vertikaler Streifen), weil das Richtungsfeld den Graphen nach ∞ abdrängen könnte, z.B. für $D_1 = [a, b]$:



Flucht der Lösung nach ∞ kann vorkommen

(Ganz richtig!)

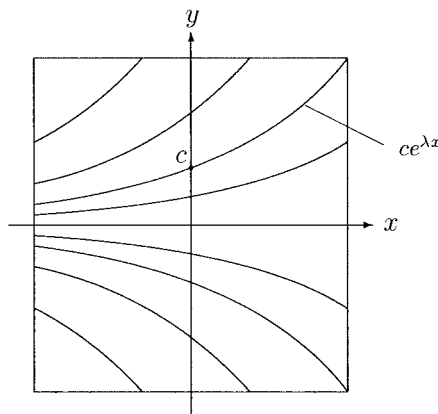
Nach dieser Stärkung unserer Anschauungskraft wollen wir nun einige instruktive Beispiele betrachten.

4.2 Drei Musterbeispiele

Im ersten Beispiel geht alles glatt. Die Differentialgleichung ist auf der ganzen (x, y) -Ebene gegeben und lautet

$$y' = \lambda y,$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine feste Zahl ist. Lösungen zu finden ist hier ja ganz leicht, weil offenbar $y = e^{\lambda x}$ eine Lösung ist (denn $y' = e^{\lambda x} \cdot \lambda = \lambda y$ nach der Kettenregel), und für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ ist auch $y = ce^{\lambda x}$ eine Lösung.



Lösungen von $y' = \lambda y$ für positives λ

Jede dieser Lösungen ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, ein Problem wegen der Lebensdauer haben wir also nicht, und auch die Anfangsbedingungen können wir bedienen:

Beachte: Eine Lösung der Form $y = c \cdot e^{\lambda x}$ erfüllt die Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ offenbar genau dann, wenn $y_0 = c \cdot e^{\lambda x_0}$, also $c = y_0 e^{-\lambda x_0}$ gewählt wird. Insbesondere ist $y = y_0 e^{\lambda(x-x_0)}$ eine Lösung, welche $y(x_0) = y_0$ erfüllt.

Das ist ja alles sehr zufriedenstellend, aber eine wichtige Frage ist doch noch offen geblieben:

Frage: Gibt uns die Funktionenfamilie

$$y = ce^{\lambda x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

wirklich *alle* (maximalen) Lösungen, ist sie die sogenannte “allgemeine Lösung”?

Antwort: Ja, denn wäre $y = y(x)$ eine weitere Lösung, so wäre (kleiner Trick:)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} y(x) e^{-\lambda x} &= y'(x) e^{-\lambda x} - \lambda y(x) e^{-\lambda x} \\ &= (y'(x) - \lambda y(x)) e^{-\lambda x} = 0 \end{aligned}$$

weil der Faktor $(y'(x) - \lambda y(x))$ verschwindet, wie die Differentialgleichung $y' = \lambda y$ sagt. Also ist $y(x) e^{-\lambda x}$ auf dem Definitionsintervall von $y(x)$ eine konstante Funktion c , d.h. $y(x) e^{-\lambda x} = c$ oder $y(x) = ce^{\lambda x}$, also nichts Neues. $\square$

Damit ist für diese Differentialgleichung natürlich auch das Eindeutigkeitsproblem gelöst.

2. Beispiel: Dieses Beispiel zeige ich Ihnen, damit Sie sehen, dass maximale Lösungen nicht auf dem ganzen x -Intervall der Differentialgleichung definiert zu sein brauchen. Wieder ist die Differentialgleichung auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gegeben:

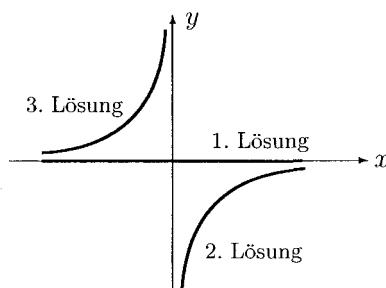
$$y' = y^2.$$

Können wir einige Lösungen erraten? Jedenfalls ist $y \equiv 0$ eine Lösung. Kennen wir sonst eine Funktion, deren Ableitung ihr Quadrat ist? Wie steht es mit $y = \frac{1}{x}$? Nein, $y' = -\frac{1}{x^2} = -y^2$. Beinahe getroffen! Aber $y = -\frac{1}{x}$ tut uns den Gefallen: $y' = \frac{1}{x^2} = \left(-\frac{1}{x}\right)^2 = y^2$. Also drei maximale Lösungen haben wir schon

1) die Nulllösung

2) $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{1}{x}$

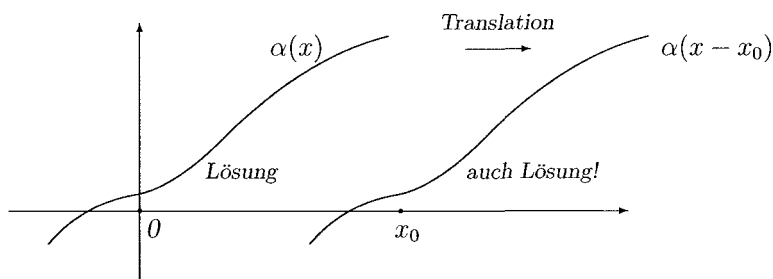
3) $\mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -\frac{1}{x},$

Drei Lösungen von $y' = y^2$

und das Phänomen, das ich Ihnen zeigen wollte, ist daran schon zu sehen: Sie können $x \mapsto -\frac{1}{x}$ weder von $\mathbb{R}^+$ noch von $\mathbb{R}^-$ auf ein größeres Intervall fortsetzen ($\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R} \setminus 0$ ist kein Intervall), die Lösung wird vom Richtungsfeld nach $+\infty$ bzw. $-\infty$ abgedrängt.

Wie finden wir aber weitere und möglichst *alle* Lösungen? Nicht durch Multiplikation mit c , aber

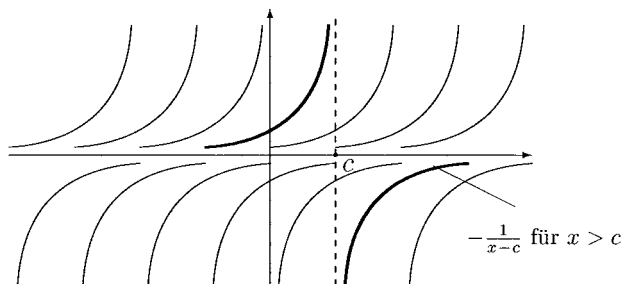
Beachte: Ist $y(x)$ eine Lösung einer Differentialgleichung der Form $y' = f(y)$ (einer sogenannten **autonomen** Differentialgleichung, weil f nur von der y -Variablen abhängt²), so ist für jedes feste $x_0 \in \mathbb{R}$ auch $y(x - x_0)$ eine Lösung,



Bei autonomen Gleichungen erhält man aus einer Lösung durch Translation weitere Lösungen

da ja offenbar $y'(x - x_0) = f(y(x - x_0))$ gilt. □

Deshalb erhalten wir sofort auch die Lösungen $x \mapsto \frac{1}{x-c}$ auf $(-\infty, c)$ und auf (c, ∞) für alle $c \in \mathbb{R}$:

Lösungen von $y' = y^2$

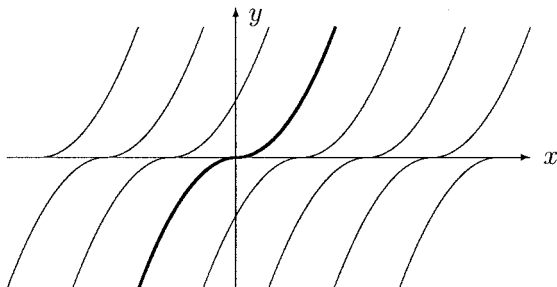
Durch jedes $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ geht so eine Lösung, also können wir damit alle Anfangsbedingungen erfüllen und finden zu jeder Anfangsbedingung *genau* eine solche maximale Lösung.

In der Tat haben wir keine Lösung vergessen, die Familie *ist* die allgemeine Lösung von $y' = y^2$, und wir könnten das auch beweisen, wollen es aber jetzt nicht tun, sondern gleich zum dritten Beispiel gehen, welches unserer Intuition über die Eindeutigkeit der Lösungen einen Stoß versetzt:

3. Beispiel: Betrachte auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$y' = 2\sqrt{|y|}.$$

Wieder erraten wir die Nulllösung, aber wegen $\frac{d}{dx}x^2 = 2x$ sind auch $y = x^2$ auf $[0, \infty)$ und $y = -x^2$ auf $(-\infty, 0]$ Lösungen:

Gewisse Lösungen von $y' = \sqrt{|y|}$

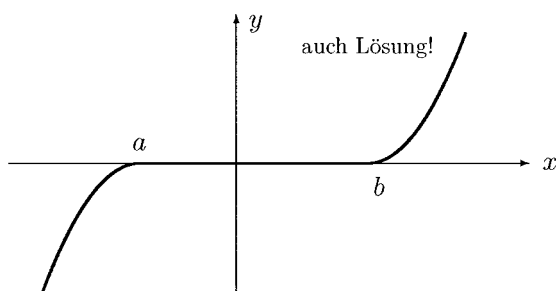
woraus wir weitere Lösungen durch Translation erhalten. Genug, um alle Anfangswerte zu bedienen! Aber jetzt ist $x \mapsto x^2$ auf $\mathbb{R}^+$ keine *maximale* Lösung, man kann sie z.B. durch

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

zu einer Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ ergänzen, aber auch

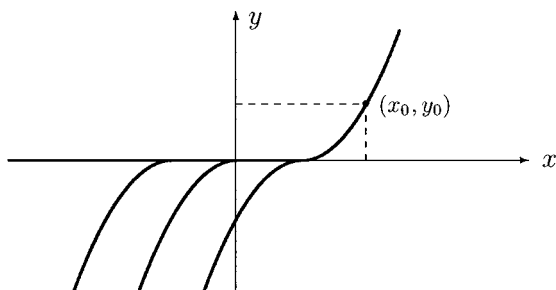
$$x \mapsto \begin{cases} -(x-a)^2 & \text{für } x \leq a \\ 0 & \text{für } a \leq x \leq b \\ (x-b)^2 & \text{für } b \leq x \end{cases}$$

ist eine Lösung!



Ein anderer Lösungstyp von $y' = \sqrt{|y|}$

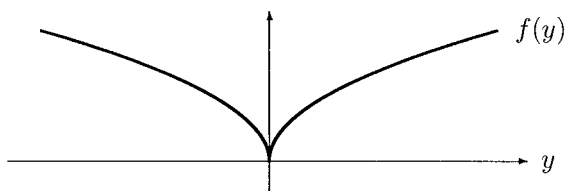
Also obwohl $y' = 2\sqrt{|y|}$ eine Differentialgleichung *erster* Ordnung ist, gibt es zu fester Anfangsbedingung $y_0 = y(x_0)$ (unendlich) viele verschiedene Lösungen:



Viele Lösungen durch (x_0, y_0)

Ein Fall, den wir bei unserer Anschauung des Richtungsfeldes einer Differentialgleichung erster Ordnung nicht vorausgesehen hatten!

Müssen wir deshalb unsere Anschauung grundlegend revidieren? Nein. Diese Differentialgleichung ist untypisch, ihre rechte Seite $2\sqrt{|y|}$ weist nämlich bei $y = 0$ eine “senkrechte Tangente” auf, die letztlich der Grund für die Mehrdeutigkeit ist.



Die vertikale Tangente bei 0 ist an allem Schuld

So boshaft sind die rechten Seiten der Differentialgleichungen erster Ordnung im Allgemeinen aber nicht, und um unser Vertrauen in die Anschauung des Richtungsfeldes wieder herzustellen, teile ich Ihnen einen moralisch aufbauenden Eindeutigkeitssatz mit.

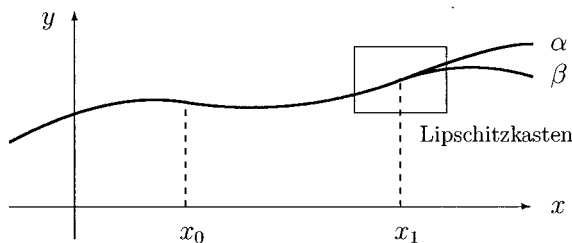
4.3 Ein Eindeutigkeitssatz für Differentialgleichungen erster Ordnung

Dieser Satz hört sich vielleicht etwas theoretisch an, er ist aber auch von praktischer Bedeutung, weil er uns beim Lösen von Differentialgleichungen die Sorge abnimmt, ob wir auch wirklich *alle* Lösungen gefunden haben.

Eindeutigkeitssatz: Auf einem allgemeinen Rechteck $D_1 \times D_2$ sei eine Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ gegeben, deren rechte Seite die sogenannte *lokale Lipschitz-Eigenschaft* hat, d.h. dass f stetig ist und man um jeden Punkt von $D_1 \times D_2$ ein kleines offenes Rechteck R und eine Konstante $L > 0$ finden kann, so dass

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}|$$

gilt, wenn nur (x, y) und $(x, \tilde{y})$ beide in dem kleinen offenen Rechteck sind. Dann gilt: Sind $\alpha, \beta : D \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Lösungen, welche für ein $x_0 \in D$ denselben Wert haben, also $\alpha(x_0) = \beta(x_0) =: y_0$, dann gilt schon $\alpha \equiv \beta$, d.h. die Lösungen sind durch eine Anfangsbedingung eindeutig festgelegt. $\square$



Angenommen, Lösungen könnten sich ‘verzweigen’ wie bei $y' = \sqrt{|y|}$. Dann betrachtet man den Punkt, an dem die Verzweigung anfängt und einen Lipschitzkasten R darum. Dann ... (so etwa beginnt der Beweis).³

Fürchten Sie nicht, dass im Anwendungsfalle Arbeit mit der Nachprüfung der Stetigkeit und der Lipschitzbedingung verbunden sei.

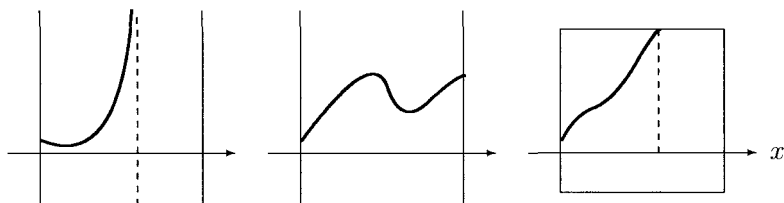
Beruhigender Hinweis: Jede C^1 -Funktion f auf einem allgemeinen Rechteck hat ganz automatisch auch die lokale Lipschitzeigenschaft.

Zwar wissen Sie bisher nur, was C^1 -Funktionen in *einer* reellen Variablen sind, aber bald werden Sie es auch für mehrere Variablen wissen und dabei sehen, dass man für die meisten Funktionen einfach *weiß*, dass sie C^1 oder sogar C^∞ sind, weil sie ganz regelgerecht aus gewissen einfachen Grundbeispielen entstanden sind, wie im Falle einer Variablen. Also keine Angst vor Lipschitz!

Was nützt so ein theoretischer Satz beim Lösen konkreter Differentialgleichungen $y' = f(x, y)$? Viel. Zum Auffinden der *allgemeinen Lösung*, also der Familie aller maximalen Lösungen, die es überhaupt gibt, hat man nun folgende Strategie:

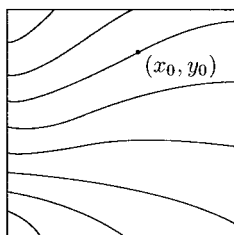
Strategie zur Lösung von $y' = f(x, y)$:

- 1. Schritt:** Konstatieren, dass f eine stetige Funktion mit der lokalen Lipschitz-Eigenschaft ist. (“Klar”, “sogar C^1 ” oder ähnliches, hoffentlich!)
- 2. Schritt:** Maximale Lösungen beschaffen durch Erraten, Probieren, Tricks und Ansätze, oder einfach durch Mitteilung in der Physikvorlesung, wie auch immer.
- 3. Schritt:** Wenn noch notwendig: durch direkte Inspektion nachprüfen, dass es wirklich Lösungen sind (gegebenenfalls einsetzen) und zwar *maximale*, was gewöhnlich daran zu sehen ist, dass das Rechteck gar nicht gestattete, die Lösungen überhaupt als differenzierbare Funktionen fortzusetzen, geschweige als Lösungen:



Leicht als maximal erkennbare Lösungen

- 4. und letzter Schritt:** Nachprüfen, dass man alle Anfangsbedingungen (x_0, y_0) im Rechteck durch maximale Lösungen bedienen kann, dass “durch jeden Punkt eine maximale Lösung geht”.



Maximale Lösung durch jeden Punkt

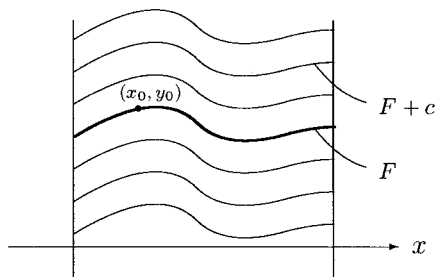
Dann folgt also aus dem Eindeutigkeitssatz, dass wir tatsächlich die allgemeine Lösung gefunden haben.

4.4 Getrennte Variable

Der einfachste Typ, der aber doch auch noch einmal erwähnt werden soll, ist $y' = f(x)$, wobei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf einem allgemeinen Intervall gegebene stetige Funktion ist. Hier geht es also einfach um die Stammfunktionen von f . Ist $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion, so ist natürlich durch $F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung gegeben, oder nach dem Hauptsatz: Die maximale Lösung zur Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ ist durch

$$y(x) = x_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt$$

definiert.



Allgemeine Lösung von $y' = f(x)$

Definition: Es seien $f : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen auf allgemeinen Intervallen. Dann heißt die Differentialgleichung

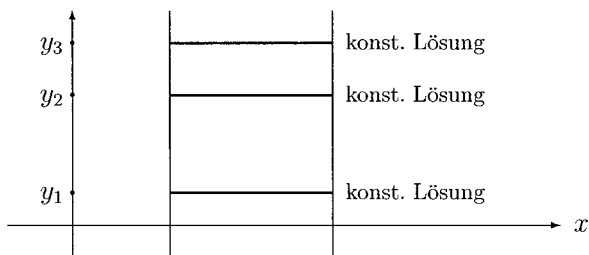
$$y' = f(x)g(y)$$

auf $D_1 \times D_2$ eine **Differentialgleichung mit getrennten Variablen**. □

Beachte: Ist f stetig und g eine C^1 -Funktion, so greift der Eindeutigkeitssatz und wir können leicht kontrollieren, ob wir alle Lösungen gefunden haben.

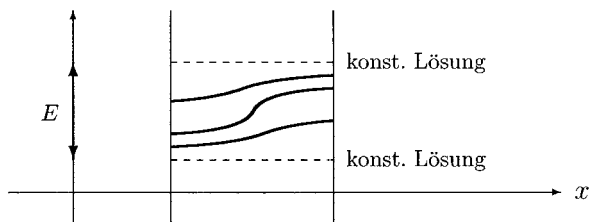
Wie aber finden wir die Lösungen?

1. Schritt: Suche die Nullstellen von g auf. Sind $y_1, y_2, \dots \in D_2$ solche Nullstellen, so sind die konstanten Funktionen $y \equiv y_1, y \equiv y_2$ usw. offenbar Lösungen.



Die konstanten Lösungen von $y' = f(x)g(y)$

Und damit ist der ersten Schritt schon abgeschlossen. Zur Vorbereitung des zweiten Schrittes betrachten wir nun die maximalen nullstellenfreien Teilintervalle des Definitionsbereiches D_2 von g einzeln. In obiger Figur sind das die Intervalle $(-\infty, y_1)$, (y_1, y_2) , (y_2, y_3) , $(y_3, +\infty)$. Sei $E \subset D_2$ eines dieser Intervalle:



Lösungen im Bereich zwischen zwei konstanten Lösungen

Dann ist g dort nullstellenfrei, und die Differentialgleichung ist auf $D_1 \times E$ gleichbedeutend mit

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x)$$

Hier sehen Sie die Variablen nun wirklich *getrennt* vor sich, daher der Name des Differentialgleichungs-Typs. Die linke Seite erinnert mit dem ‘nachdifferenzierten’ y an die Kettenregel, und indem wir dieser Assoziation nachgehen, finden wir:

Lemma: Ist $\Phi(y)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{g(y)}$ auf E und $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ auf D_1 , so ist jede Funktion $y = y(x)$, deren Definitionsbereich D in D_1 und deren Bild in E liegt und die

$$\Phi(y(x)) = F(x) + c$$

für irgendein $c \in \mathbb{R}$ erfüllt, eine Lösung unserer Differentialgleichung $y' = f(x)g(y)$. $\square$

Um aber solche Lösungen zu finden, kommt uns ein glücklicher Umstand zu Hilfe: Wegen $\Phi'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$ für alle $y \in E$ ist Φ tatsächlich umkehrbar nach der Umkehrregel, und daraus folgt als die eigentliche Handlungsanweisung:

2. Schritt: Suche eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ und auf jedem maximalen nullstellenfreien Teilintervall E im Definitionsbereich von g eine Stammfunktion $\Phi(y)$ von $\frac{1}{g(y)}$ und bestimme alle Funktionen der Form

$$y(x) = \Phi^{-1}(F(x) + c), \quad c \in \mathbb{R},$$

auf maximalen allgemeinen Teilintervallen von D_1 .

Beachte nämlich, dass Φ^{-1} ja nur auf $\Phi(E)$ definiert ist und dass deshalb $\Phi^{-1}(F(x) + c)$ nur gebildet werden kann, wenn $F(x) + c \in \Phi(E)$ ist.

In der Tat bekommen Sie, wenn Sie alle hier genannten Möglichkeiten wirklich ausschöpfen, die allgemeine Lösung von $y' = f(x)g(y)$. Darüber ob Sie alle Möglichkeiten auch ausgeschöpft haben, brauchen Sie sich aber keine Sorgen zu machen, wenn Sie die Probe als 3. Schritt ausführen:

3. Schritt: Überprüfe, ob man mit der gefundenen Familie maximaler Lösungen jede Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ in $D_1 \times D_2$ bedienen kann. Wenn ja, so ist nach dem Eindeutigkeitssatz die allgemeine Lösung gefunden.

Wenn Sie das alles verstanden haben, dann dürfen Sie sich im Besitz eines Insider-Ausweises in der Größe einer Scheckkarte denken, die Sie zur Anwendung folgenden Kurzrezepts berechtigt:

Kurzrezept für Insider: $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$, also $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$, oder

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx + c$$

Auflösen nach y , fertig. □

Wenn Unbefugte das so machen, übersehen sie die Hälfte der Lösungen usw., das kann man sich ja denken. Verantwortung für das Kurzrezept übernimmt der Anwender, berufen Sie sich nicht auf mich! Ich habe Ihnen weiter oben ganz genau gesagt, was Sache ist und wasche meine Hände in Unschuld.

4.5 Homogene und inhomogene lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Die lineare homogene Gleichung mit konstanten Koeffizienten kennen wir schon, es ist nämlich die Gleichung $y' = \lambda y$. Jetzt betrachten wir allgemeiner:

Definition: Es seien $a, b : D \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen auf einem allgemeinen Intervall. Dann heißt die Differentialgleichung

$$y' = a(x)y + b(x)$$

auf $D \times \mathbb{R}$ eine **inhomogene lineare** Differentialgleichung erster Ordnung, $b(x)$ heißt die **Inhomogenität** der Gleichung, und

$$y' = a(x)y$$

heißt die **zugehörige homogene lineare** Gleichung. $\square$

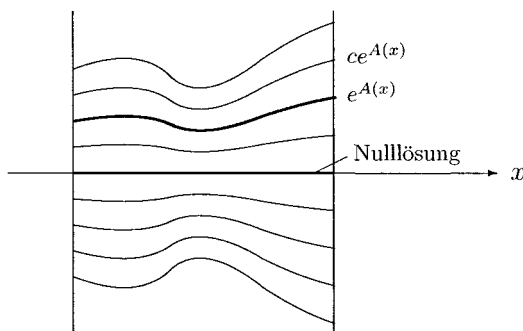
Die homogene Gleichung ist eine mit getrennten Variablen. Die Funktion $g(y) = y$ ist hier besonders einfach: nur eine Nullstelle, nämlich bei 0, also haben wir die Gleichung nur noch auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ und $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$ zu betrachten, Stammfunktion von $\frac{1}{y}$ kennen wir, sie ist auch umkehrbar, alles geht glatt! Ich fasse das Ergebnis gleich zusammen:

Lemma: Ist $A(x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$, so ist durch

$$y(x) = c \cdot e^{A(x)}, \quad c \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung von $y' = a(x)y$ gegeben.

Dazu ist die Methode der getrennten Variablen nicht einmal notwendig, man sieht ja, dass das Lösungen sind, mit denen man jede Anfangsbedingung bedienen kann,



Allgemeine Lösung einer homogenen linearen Gleichung

nach dem Eindeigkeitsatz also alle die es gibt, und man kann die Lösung zu (x_0, y_0) auch explizit hinschreiben:

$$y(x) := y_0 e^{\int_{x_0}^x a(t) dt}$$

ist die Lösung der homogenen Gleichung $y' = a(x)y$ zur Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$.

Die inhomogene Gleichung ist aber *keine* mit getrennten Variablen. Hat man jedoch die homogene Gleichung schon gelöst, so braucht man nur eine *einzige* Lösung der inhomogenen zu finden, um sie alle zu haben:

Vorbemerkung über die Lösung der inhomogenen Gleichung: *Stellt die Familie*

$$y = c\varphi(x), \quad c \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y' = a(x)y$ dar und ist $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine einzige Lösung der inhomogenen Gleichung $y' = a(x)y + b(x)$, so ist durch

$$y = \psi(x) + c\varphi(x), \quad c \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung gegeben.

BEWEIS: Jedenfalls sind das Lösungen: nach Voraussetzung ist

$$\begin{aligned} \psi' &= a(x)\psi + b(x) \quad \text{und} \\ c\varphi' &= a(x)c\varphi, \end{aligned}$$

durch Addition folgt daraus also

$$(\psi + c\varphi)' = a(x)(\psi + c\varphi) + b(x).$$

Ist nun umgekehrt $\tilde{\psi}$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung, so löst $\tilde{\psi} - \psi$ die homogene (subtrahiere die Gleichungen), ist also von der Form $c\varphi$, also ist $\tilde{\psi}$ schon von der Form $\psi + c\varphi$ für ein $c \in \mathbb{R}$. □

Zur Bestimmung einer solchen Einzellösung der inhomogenen Gleichung gibt es einen Trick mit einem paradox klingenden Namen:

“Variation der Konstanten” (Ansatz zur Lösung der inhomogenen Gleichung). Sei wieder $A(x)$ Stammfunktion von $a(x)$. Um eine Lösung $\psi(x)$ der inhomogenen Gleichung zu finden, mache man den *Ansatz*

$$\psi(x) = u(x)e^{A(x)}$$

mit noch unbekannter Funktion $u(x)$ anstelle der Konstanten c , die in der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung auftritt, daher der Name. Man gehe mit diesem Ansatz in die inhomogene Gleichung hinein, klappt garantiert. $\square$

So sollen Sie sich das merken. Ich kann es Ihnen natürlich auch vormachen und die Formel für $u(x)$ ausrechnen, die merkt man sich aber nicht so leicht wie das Rezept mit seinem suggestiven Namen. “Variation der Konstanten”, wer kann das vergessen?

Die Auffinden von $u(x)$ geht dann ganz schnell. Was müssen Sie tun? Eine Funktion $\psi = ue^A$ ist offenbar genau dann Lösung der inhomogenen Gleichung, wenn $u(x)$ differenzierbar ist und eben

$$\frac{d}{dx}(ue^A) = aue^A + b$$

erfüllt, das heißt nach der Produktregel wenn

$$u' \cdot e^A + u \cdot ae^A = a \cdot ue^A + b$$

gilt, das ist aber gleichbedeutend mit

$$u'(x) = e^{-A(x)}b(x),$$

d.h. damit, dass $u(x)$ eine Stammfunktion von $e^{-A(x)}b(x)$ ist!

Ergebnis:

$$\psi(x) = \int_{x_0}^x e^{-A(t)}b(t) dt \cdot e^{A(x)},$$

wobei $A(x) := \int_{x_0}^x a(t)dt$, ist eine Lösung der inhomogenen Gleichung. $\square$

Ich kann mir das nicht merken, aber ich leite es mir jederzeit schnell aus dem Ansatz der “Variation der Konstanten” her.

4.6 Gekoppelte Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung

Denken Sie sich, dass nicht *eine*, sondern zwei Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ auf dem allgemeinen Intervall D_0 gesucht werden, von denen jede eine Differentialgleichung erster Ordnung erfüllt:

$$\begin{aligned}y_1' &= f_1(x, y_1) \\ y_2' &= f_2(x, y_2).\end{aligned}$$

Dann könnte man das zwar ein *System* von zwei Differentialgleichungen für zwei gesuchte Funktionen nennen, aber es wäre nichts Neues: wir würden einfach zuerst die eine und dann die andere Gleichung lösen.

Interessant wird es aber, wenn y_2 auch in die erste und y_1 auch in die zweite Gleichung eingeht, die beiden Gleichungen also *gekoppelt* sind. Genauer:

Definition: Es seien D_0 , D_1 und D_2 drei allgemeine Intervalle und f_1 und f_2 zwei Funktionen auf $D_0 \times D_1 \times D_2$. Dann heißt

$$\begin{aligned}y_1' &= f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2)\end{aligned}$$

ein **System** von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung auf $D_0 \times D_1 \times D_2$ für zwei gesuchte Funktionen $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$.

Schreibweise: Schreibt man Zahlenpaare und Funktionenpaare in "Vektorschreibweise", und dementsprechend

$$\begin{aligned}(y_1, y_2) &=: \vec{y} \\ (f_1, f_2) &=: \vec{f},\end{aligned}$$

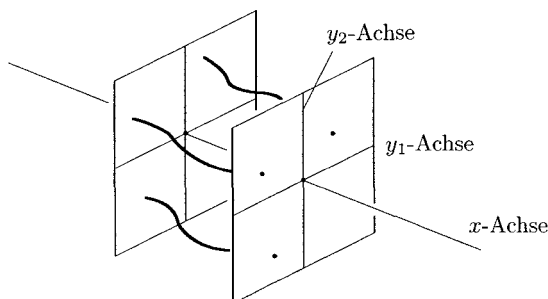
so gewinnt man für das System die Vektorschreibweise:

$$\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y}),$$

die man sich bei Bedarf ja jederzeit wieder in die Systemschreibweise auflösen kann. Analog für n gesuchte Funktionen, dann wäre

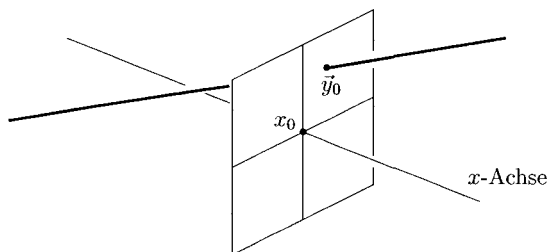
$$\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \text{ und} \\ \vec{f} = (f_1, \dots, f_n)$$

zu lesen, aber bleiben wir ruhig bei $n = 2$. Wir haben es also jetzt nicht mehr mit einer y -Achse, sondern mit einer $\vec{y}$ -Ebene zu tun, gesucht sind *vektorierte* Funktionen $x \mapsto \vec{y}(x)$, deren Graphen wir in $D_0 \times D_1 \times D_2$ finden:



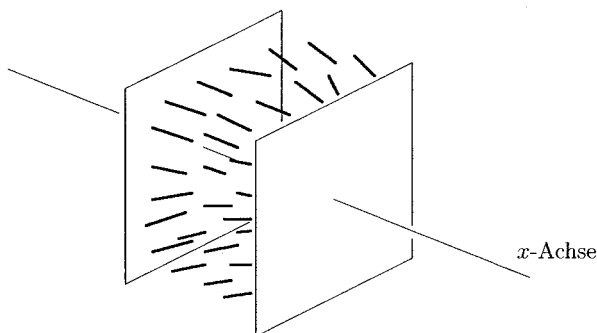
Graphen der Lösungen eines gekoppelten Systems

Die Intuition vom Richtungsfeld ist ganz analog wie im "eindimensionalen Fall", wie man sagt. Der Graph einer Lösung muss, wenn er durch den Punkt $(x, \vec{y}) \in D_0 \times (D_1 \times D_2)$ hindurchgehen will, den 'vektoriellen Anstieg' $\vec{f}(x, \vec{y})$ haben. Wenn Sie sich unter einem vektoriellen Anstieg $\vec{a} = (a_1, a_2)$ in einem festen Punkte $(x_0, \vec{y}_0)$ etwas vorstellen wollen, denken Sie an die durch $\vec{y} = \vec{y}_0 + \vec{a} \cdot (x - x_0)$ beschriebene Gerade durch diesen Punkt, die hat diesen Anstieg:



Vektorieller Anstieg

Wenn Sie dann an jedem Punkte $(x, \vec{y}) \in D_0 \times (D_1 \times D_2)$ von der Geraden mit dem Anstieg $\vec{f}(x, \vec{y})$ nur ein kleines Strichlein behalten, dann haben Sie die anschauliche Vorstellung vom Richtungsfeld des gekoppelten Systems.



Richtungsfeld eines gekoppelten Systems

Wir erwarten deshalb wieder, dass eine maximale Lösung durch eine Anfangsbedingung

$$\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$$

oder ausgeschrieben:

$$y_1(x_0) = y_{01}$$

$$y_2(x_0) = y_{02}$$

bereits eindeutig festgelegt ist, und das stimmt auch, wenn $\vec{f}$ stetig ist und die lokale Lipschitzbedingung erfüllt.⁴ Insbesondere:

Hinweis: Ist $\vec{f}$ eine vektorwertige C^1 -Funktion

$$\vec{f}: D_0 \times D_1 \times D_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

so sind die maximalen Lösungen des Systems $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$ durch eine Anfangsbedingung der Form

$$\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$$

bereits eindeutig festgelegt.

□

Die *Existenz* der Lösungen behandelt der Satz von Picard und Lindelöf. Im obigen Falle würde man dafür D_1 und D_2 als *offene Intervalle* voraussetzen, um gewissen Schwierigkeiten am Rande aus dem Wege zu gehen,⁵ dann aber gibt es zu jedem $(x_0, \vec{y}_0)$ auch eine maximale Lösung mit diesem Anfangspunkt, sogar wenn $\vec{f}$ nur stetig und Lipschitz ist, erst recht wenn $\vec{f}$ sogar C^1 ist. Auf den Existenzsatz von Picard-Lindelöf wollen wir im Kapitel 14 ganz ausführlich eingehen, für Ihre derzeitigen praktischen Zwecke brauchen Sie ihn nicht.

Der Eindeigkeitsatz hat aber denselben großen praktischen Nutzen wie bei den Gleichungen erster Ordnung für *eine* gesuchte Funktion: wenn Sie so viele maximale Lösungen ‘erraten’ haben, dass Sie alle Anfangsbedingungen $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$ bedienen können, dann wissen Sie, dass Sie *alle* Lösungen gefunden haben.

4.7 Übungsaufgaben

Aufgabe R4.1: Für die Füllhöhe $y(t)$ eines mit Wasser gefüllten zylinderförmigen Gefäßes, das sich über ein Loch im waagrechten Boden entleert, gilt näherungsweise

$$\frac{d}{dt}y(t) = -\alpha\sqrt{y(t)},$$

$\alpha > 0$. Lösen Sie diese Differentialgleichung für $y \geq 0$, $t \geq 0$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = y_0$. Nach welcher Zeit ist das Gefäß leer?

Aufgabe R4.2: Für die Geschwindigkeit $v(t)$ der vertikalen Bewegung im Schwerfeld g mit linearer Reibung gilt die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}v(t) = g - \gamma v(t),$$

mit $\gamma > 0$. Lösen Sie diese Bewegungsgleichungen für beliebige Anfangswerte $v(0) = v_0$.

Aufgabe R4.3: Ein erster Stoff der Menge $N_1 \geq 0$ zerfalle nach

$$\frac{d}{dt}N_1(t) = -\lambda_1 N_1(t)$$

mit der Zerfallsrate $\lambda_1 > 0$ in einen zweiten Stoff der Menge $N_2(t) \geq 0$, der nach der Gleichung

$$\frac{d}{dt}N_2(t) = -\lambda_2 N_2(t) + \lambda_1 N_1(t)$$

mit $\lambda_2 > 0, \lambda_2 \neq \lambda_1$ weiter zerfällt.

Lösen Sie dieses System von Zerfallsgleichungen für $t \geq 0$ mit der Anfangsbedingung $N_1(0) = N > 0, N_2(0) = 0$. Skizzieren und diskutieren Sie den Funktionsverlauf von $N_2(t)$.

Aufgabe R4.4: Nach der Newtonschen Gravitationstheorie folgt für das Gleichgewicht aus Druckänderung und Gravitationskraft im Innern eines Sternes

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{\rho(r)m(r)}{r^2}$$

Dabei ist $p(r)$ der Druck im Abstand r vom Mittelpunkt, G die Gravitationskonstante und $m(r)$ die in einer Kugel vom Radius r enthaltene Masse. Berechnen Sie die Druckverteilung $p(r)$ unter der Annahme, dass die Massendichte ρ im Innern des Sternes konstant ist und der Druck an der Oberfläche bei $r = R$ verschwindet. Fortsetzung für relativistische Sterne in der folgenden Aufgabe.

Aufgabe R4.5: Nach der *Einsteinschen* Gravitationstheorie gilt für das Gleichgewicht aus Druckkraft und Gravitationskraft

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{(\rho + p/c^2)(m + 4\pi r^3 p/c^2)}{r(r - 2Gm/c^2)},$$

Dabei ist G die Gravitationskonstante, c die Lichtgeschwindigkeit. Es bezeichnet r den Abstand vom Mittelpunkt und $m(r)$ die in einer Kugel vom Radius r enthaltene Masse. Berechnen Sie die Druckverteilung $p(r)$ im Innern des Sternes mit der Randbedingung $p(R) = 0$ an der Oberfläche des Sternes und unter der vereinfachenden Annahme, dass die Massendichte ρ im Innern konstant ist. Für die Gesamtmasse $M = 4\pi\rho R^3/3$ gelte $2MG/c^2 < R$ (sonst wäre der Stern ein Schwarzes Loch). Berechnen Sie den Druck im Zentrum. Für welchen Radius divergiert der Druck im Zentrum? (Setzen Sie für die Rechnung $G = 1, c = 1$)

Aufgabe T4.1: Hat die Funktion $f(x, y) = \sqrt{|y|}$ die lokale Lipschitz-Eigenschaft?

Aufgabe T4.2: Für die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ auf einem allgemeinen Rechteck gelte der Eindeutigkeitsatz, und es sei $\alpha : D_0 \rightarrow \mathbb{R}$ eine einzelne, vielleicht nicht maximale Lösung. Beweisen Sie, dass sich α auf genau eine Weise zu einer maximalen Lösung fortsetzen läßt.

Aufgabe T4.3: Für $y' = f(x, y)$ gelte der Eindeutigkeitsatz, es seien $\eta : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $\zeta : E \rightarrow \mathbb{R}$ maximale Lösungen, und es gebe ein $x_0 \in D \cap E$ mit $\eta(x_0) = \zeta(x_0)$. Zeigen Sie, daß dann $E = D$ (und somit nach dem Eindeutigkeitsatz auch $\eta = \zeta$) gilt.

Aufgabe T4.4: Es seien $a, b : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem allgemeinen Intervall D_1 und $y = y(x)$ eine maximale Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichung $y' = a(x)y + b(x)$ auf $D_1 \times \mathbb{R}$. Kann es sein, daß der Definitionsbereich $D \subset D_1$ dieser Lösung echt kleiner als D_1 ('Flucht der Lösung nach ∞ ') ist?

Aufgabe T4.5: Sei $g : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine Lipschitzfunktion auf einem allgemeinen Intervall E , d.h. zu jedem $y_0 \in E$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein L mit $|g(y) - g(\tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}|$ für alle $y, \tilde{y} \in E$, welche $|y - y_0| < \varepsilon$ und $|\tilde{y} - y_0| < \varepsilon$ erfüllen. Es sei nun $\alpha : D \rightarrow E$ eine Lösung der autonomen Differentialgleichung $y' = g(y)$ mit der Eigenschaft $\alpha(D) = E$. Zeigen Sie, dass $\alpha(x - x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung darstellt.

5

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

5.1 Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Dass man darunter Gleichungen der Form

$$y'' = f(x, y, y')$$

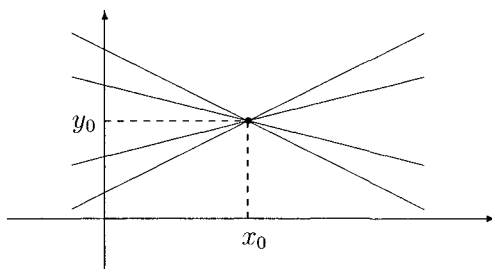
verstanden werden Sie erwartet haben. Die Funktion f sei der Einfachheit halber auf einem allgemeinen Quader definiert:

$$f : D_0 \times D_1 \times D_2 \rightarrow \mathbb{R},$$

und eine Funktion $y = y(x)$ ist natürlich genau dann eine Lösung, wenn sie

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$$

erfüllt. Was wäre für so eine Gleichung eine angemessene Anfangsbedingung? Genügt wieder $y(x_0) = y_0$, um eine maximale Lösung eindeutig festzulegen? Dazu ein kleiner Test. Betrachte die triviale Differentialgleichung $y'' \equiv 0$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Die maximalen Lösungen sind offenbar die Funktionen, deren Graph eine Gerade ist: die Familie $y(x) = c_1x + c_2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ von Funktionen ist die allgemeine Lösung, d.h. die Gesamtheit aller maximalen Lösungen. Jede Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ wird aber jetzt von unendlich vielen Lösungen erfüllt!



Lösungen von $y'' = 0$ durch (x_0, y_0)

Ja, wenn wir auch noch die *Ableitung* $y'(x_0)$ vorschreiben, also den Anstieg der Geraden, dann ist die Lösung eindeutig festgelegt, die Bedingungen $y(x_0) = y_0$ und $y'(x_0) = w_0$ kann nur *eine* Gerade erfüllen, nämlich $y(x) = y_0 + w_0 \cdot (x - x_0)$.

Was hilft uns dieses Beispiel aber weiter? Wie ist es bei beliebigen Differentialgleichungen $y'' = f(x, y, y')$? Bei den Gleichungen und Systemen *erster* Ordnung hatte uns das *Richtungsfeld* das anschauliche Verständnis für das Lösungsverhalten erschlossen. Gibt es so etwas Ähnliches auch für Differentialgleichung zweiter Ordnung?

Ja, durch einen zwar einfachen, aber genialen Trick werden die Gleichungen zweiter Ordnung auf Systeme erster Ordnung zurückgeführt. Betrachte nämlich $y'' = f(x, y, y')$ als ein System *erster* Ordnung für die beiden Funktionen y und y' !

Sprechweise und Lemma: Ist $y'' = f(x, y, y')$ eine Differentialgleichung zweiter Ordnung auf $D_0 \times D_1 \times D_2$, so nennt man das System

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2 \\ y'_2 &= f(x, y_1, y_2) \end{aligned}$$

von Differentialgleichungen erster Ordnung auf $D_0 \times D_1 \times D_2$ für zwei gesuchte Funktionen $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$ das **zugehörige System erster Ordnung**. Es gilt offenbar:

1. Ist $y = y(x)$ eine Lösung von $y'' = f(x, y, y')$, so ist durch

$$y_1(x) := y(x) \text{ und}$$

$$y_2(x) := y'(x)$$

eine Lösung $\vec{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))$ des zugehörigen Systems erster Ordnung gegeben, und umgekehrt:

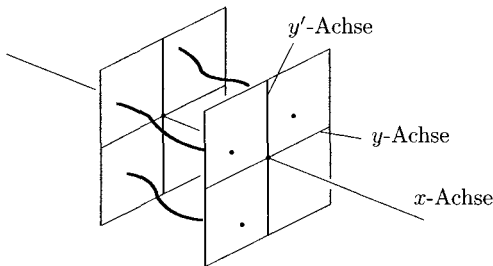
2. Ist $\vec{y} = \vec{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))$ eine Lösung des zugehörigen Systems erster Ordnung, so ist durch $y(x) := y_1(x)$ eine Lösung von $y'' = f(x, y, y')$ gegeben. $\square$

Sie sehen also, dass das zugehörige System erster Ordnung eigentlich nur eine Umformulierung der Gleichung $y'' = f(x, y, y')$ ist. Systeme erster Ordnung kennen wir aus dem vorigen Kapitel schon, und aus dem Eindeutigkeitssatz für Systeme erster Ordnung erhalten wir das

Korollar: Ist f stetig und lokal Lipschitz, z.B. eine C^1 -Funktion, so stimmen Lösungen von $y'' = f(x, y, y')$, welche dieselbe Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{und} \quad y'(x_0) = w_0$$

erfüllen, auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsbereiche überein, insbesondere gibt es zu jedem $(x_0, y_0, w_0) \in D_0 \times D_1 \times D_2$ höchstens eine maximale Lösung $y = y(x)$ von $y'' = f(x, y, y')$, welche die Anfangsbedingung erfüllt. $\square$



$$\text{Lösungsgraphen } x \mapsto (x, y(x), y'(x))$$

Über die Existenz spricht der Existenzsatz, den wir aber, wie schon gesagt, noch nicht so dringend brauchen, weil wir in den Anwendungen die Lösungen *finden* werden, und damit sind sie ja eh' da. Der *Eindeutigkeitssatz* aber ermöglicht wieder einen einfachen Nachweis, dass wir *alle* Lösungen gefunden haben.

5.2 Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Sind $a_1, a_0, b : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem allgemeinen Intervall, so nennt man

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

eine **inhomogene lineare** Differentialgleichung zweiter Ordnung über D , wieder heißt $b(x)$ die **Inhomogenität** und

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

die **zugehörige homogene Gleichung**. In diesem kurzen Abschnitt erfahren Sie alles, was Sie sogleich über den allgemeinen Fall *variabler* Koeffizienten $a_1(x)$ und $a_0(x)$ wissen sollten, einige wenige prägnante Fakten. Im nächsten Abschnitt wollen wir dann um so ausführlicher über die homogenen Gleichungen mit *konstanten* Koeffizienten sprechen, die zu einem sehr frühen Zeitpunkt in den Physikvorlesungen wichtig werden.

Definition: Zwei Lösungen $\varphi_1, \varphi_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ der homogenen Gleichung bilden ein sogenanntes **Fundamentalsystem**, wenn die Familie

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung darstellt. □

Ein solches Fundamentalsystem *gibt* es immer.¹ So einfach zu finden wie die Lösungen der linearen Differentialgleichungen *erster* Ordnung ist ein Fundamentalsystem im Allgemeinen freilich nicht. *Hat* man aber ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung, so

braucht man wie bei den Gleichungen erster Ordnung nur eine einzige Lösung der inhomogenen Gleichung zu kennen, um alle Lösungen der inhomogenen Gleichung zu haben:

Bemerkung 1: Ist $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung $y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$ und φ_1, φ_2 ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung, so ist

$$y(x) = \psi(x) + c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung. $\square$

Das beweist man wie bei den Gleichungen erster Ordnung. Auch die *Beschaffung* einer Einzellösung der inhomogenen Gleichung mittels Variation der Konstanten ist möglich, man geht dazu vorher zum zugehörigen System erster Ordnung über, wie in Abschnitt 5.1 beschrieben.²

Bemerkung 2: Haben wir es mit Inhomogenitäten $b_1, b_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ zur selben homogenen Gleichung zu tun und sind $\psi_1, \psi_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$ Lösungen dieser inhomogenen Gleichungen, also

$$\begin{aligned} \psi_1''(x) + a_1(x)\psi_1'(x) + a_0(x)\psi_1(x) &= b_1(x) \\ \text{und } \psi_2''(x) + a_1(x)\psi_2'(x) + a_0(x)\psi_2(x) &= b_2(x), \end{aligned}$$

so ist $\psi_1 + \psi_2$ offenbar eine Lösung von

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b_1(x) + b_2(x),$$

man braucht ja nur die beiden Gleichungen zu addieren, um das zu erkennen, analog für mehrere Summanden $\psi_1 + \dots + \psi_N$. $\square$

Bemerkung 3: Ist $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ und $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante, so ist $c\psi$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = cb(x),$$

wie man sofort sieht. $\square$

5.3 Konstante Koeffizienten

Ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung mit konstanten Koeffizienten zu finden wird der Inhalt dieses Abschnitts sein.

Da die Variable in den physikalischen Beispielen von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten meistens die Zeit t ist, wollen wir jetzt zu dieser Notation übergehen. Zu gegebenen Konstanten $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ suchen wir also Funktionen $x = x(t)$, welche die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$$

erfüllen. Der Punkt in $\dot{x} := \frac{d}{dt}x$ usw. ist die übliche Notation für die Ableitung *nach der Zeit-Variablen*.

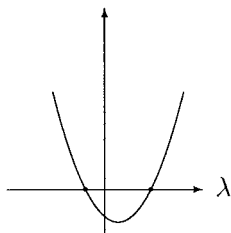
Ausgangspunkt der Suche nach den Lösungen ist der sogenannte **e-Ansatz** $x(t) := e^{\lambda t}$, das heißt man prüft erst einmal durch Einsetzen, für welche Zahlen λ die Funktion $e^{\lambda t}$ eine Lösung ist, insbesondere ob es überhaupt solche Zahlen gibt.

Bemerkung: Offenbar ist $e^{\lambda t}$ Lösung von $\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$ genau dann, wenn $\lambda^2 e^{\lambda t} + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} = 0$, also wenn die sogenannte **charakteristische Gleichung**

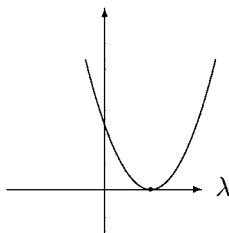
$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

erfüllt ist. □

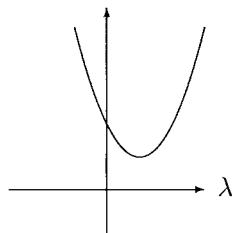
Solche quadratischen Gleichungen zu lösen, durch quadratische Ergänzung, haben Sie in der Schule gelernt, Sie wissen, dass so eine Gleichung zwei, eine oder gar keine Lösung haben kann:



1. Fall



2. Fall



3. Fall

In welchem Falle man ist, sieht man aus der Lösungsformel

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}$$

1. Fall: $a_1^2/4 - a_0 > 0$.

2. Fall: $a_1^2/4 - a_0 = 0$ ("Grenzfall").

3. Fall: $a_1^2/4 - a_0 < 0$.

Ein Fundamentalsystem für $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0$ findet man am leichtesten im ersten Fall:

Lemma 1: Sind $\lambda_1 \neq \lambda_2$ zwei Nullstellen von $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$, so ist durch $\varphi_1(t) := e^{\lambda_1 t}$ und $\varphi_2(t) := e^{\lambda_2 t}$ ein Fundamentalsystem von $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0$ gegeben.

BEWEIS: Jedenfalls sind's Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$, und wegen der "Linearität" der Differentialgleichung sind auch alle Funktionen

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Lösungen. Nach dem Eindeutigkeitsatz brauchen wir nur zu prüfen, ob wir alle Anfangsbedingungen $x(t_0) = x_0$ und $\dot{x}(t_0) = y_0$ bedienen können. Sei also $(t_0, x_0, y_0) \in \mathbb{R}^3$ beliebig vorgegeben.

NOCH ZU ZEIGEN: Wir können $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ so wählen, dass die Lösung $x(t) := c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$ die Bedingungen $x(t_0) = x_0$ und $\dot{x}(t_0) = y_0$ erfüllt.

DAZU: Die Bedingungen sind gleichbedeutend mit

$$(*) \quad \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t_0} + c_2 e^{\lambda_2 t_0} = x_0 \\ \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t_0} + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t_0} = y_0. \end{cases}$$

Das ist ein "lineares Gleichungssystem" für die Unbekannten c_1 und c_2 , und wenn wir zeigen können, dass es lösbar ist, dann sind wir fertig.

Ich gehe davon aus, dass Sie wissen, wie man die Lösungen linearer Gleichungssysteme der Form

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

findet. Ob Sie aber auch, beim Bearbeiten einer Übungsaufgabe, einen Text dazu schreiben könnten, der den logischen Zusammenhang Ihrer Rechnung erkennen läßt? Zum Beispiel so:

Multiplikation der ersten Gleichung mit λ_1 bzw. λ_2 und anschließende Subtraktion der zweiten zeigt: wenn es überhaupt solche c_1 , c_2 gibt, dann müssen diese auch die Gleichungen

$$\begin{aligned}(\lambda_1 - \lambda_2)e^{\lambda_2 t_0} c_2 &= \lambda_1 x_0 - y_0 \\ (\lambda_2 - \lambda_1)e^{\lambda_1 t_0} c_1 &= \lambda_2 x_0 - y_0\end{aligned}$$

erfüllen, es können also nur die Zahlen

$$c_1 := \frac{\lambda_2 x_0 - y_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t_0}$$

und

$$c_2 := \frac{\lambda_1 x_0 - y_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t_0}$$

sein. Umgekehrt zeigt Einsetzen dieser beiden Zahlen in das ursprüngliche Gleichungssystem, dass Sie es wirklich erfüllen, also ist das angegebene Zahlenpaar (c_1, c_2) eine (und sogar die einzige) Lösung von (*). $\square$

— Was will der Mann von uns? Sollen wir zu jeder kleinen Rechnung einen Roman danebenscriben, damit der “logische Zusammenhang” gewahrt bleibt?

— Keinen Roman, mit einigen logischen Zeichen wie “ $\Rightarrow$ ” und “ $\Leftrightarrow$ ” etc. und ganz wenig wohlplazierten Worten wie “wenn ..., dann ...”, “daher” “sei also”, usw. kommen Sie aus, da Sie ja beim Aufgabenrechnen nicht auch noch didaktische Ziele verfolgen, wie ich es hier im Lehrbuch tun muss. Auch ganz knappe Formulierungen sind akzeptabel, wenn sie nur richtig sind, z.B: “Da (*) offenbar lösbar ist, bilden φ_1, φ_2 ein Fundamentalsystem”. Aber das aus der Schule gewohnte stumme Aneinanderreihen von Formeln, womöglich noch am Schluss beglaubigt durch “ $0 = 0$, qed”, dem Siegel des mathematischen Dilettantismus — na.

Wenden wir uns dem zweiten, dem ‘Grenzfall’ zu. Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ von $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0$ hat jetzt nur *eine* Nullstelle

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{0}$$

also erhält man aus dem e -Ansatz auch nur eine Lösung $e^{\lambda_1 t}$. Wie man sie zu einem Fundamentalsystem ergänzen kann ist nicht so leicht zu erraten, aber wenn man es gesagt bekommt, und ich sage es Ihnen jetzt, ganz leicht zu verifizieren.

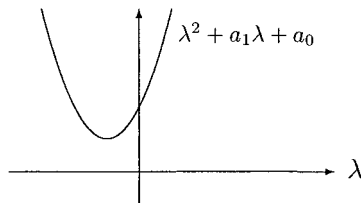
Lemma 2: Ist λ_1 die einzige Nullstelle von $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$, dann ist durch $\varphi_1(t) := e^{\lambda_1 t}$ und $\varphi_2(t) := te^{\lambda_1 t}$ ein Fundamentalsystem von $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 = 0$ gegeben.

BEWEIS: Einsetzen zeigt, dass auch φ_2 Lösung ist, und man rechnet leicht nach (wie oben), dass die Familie der $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ jede Anfangsbedingung bedienen kann. $\square$

Nun zum dritten und schwierigsten Fall! Jetzt liefert die Lösungsformel

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}$$

gar nichts mehr, weil $\frac{a_1^2}{4} - a_0$ negativ ist, und wirklich *hat* das charakteristische Polynom jetzt auch keine Nullstelle.



*Charakteristisches Polynom ohne Nullstelle:
e-Ansatz bringt keine Lösung. Oder doch?*

Aber! Und dieses ‘Aber’ ist ein Erfolgsrezept, das die Physiker im Umgang mit Mathematik alle Tage anwenden: auf Ihrem Konzeptblatt, zu Hause, kann Ihnen niemand verbieten so zu TUN, ALS OB

man auch aus negativen Zahlen die Wurzel ziehen könnte. Die Zahl -1 hat keine Wurzel? Na sowas. Ich ziehe sie trotzdem: $\sqrt{-1} =: i$ (“imaginäre Zahl”) und rechne damit als wär’s eine Zahl. — Aber was *ist* denn dieses i ? — Keine Ahnung, das kümmert mich jetzt auch gar nicht, eben eine *Größe* (wunderbares Wort), deren Quadrat -1 ist.

Dann hat $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ plötzlich doch zwei Lösungen, nämlich

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= -a_1/2 \pm \sqrt{a_1^2/4 - a_0} \\ &= -a_1/2 \pm i\sqrt{a_0 - a_1^2/4} =: \gamma \pm i\omega\end{aligned}$$

wobei also $\gamma = -a_1/2$ und $\omega = \sqrt{a_0 - a_1^2/4}$, und in unserer ALS-OB-Mathematik sind jetzt $e^{\lambda_1 t}$ und $e^{\lambda_2 t}$ auch Lösungen. Nach den ALS-OB-Eigenschaften der e -Funktion ist

$$e^{\lambda_1 t} = e^{\gamma t + i\omega t} = e^{\gamma t} \cdot e^{i\omega t},$$

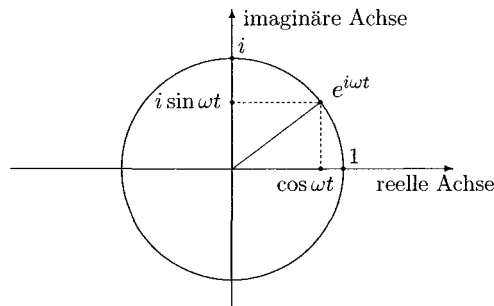
und weil $i^2 = -1$ ist, gilt $i^{2k} = (-1)^k$ und $i^{2k+1} = i \cdot i^{2k} = i(-1)^k$, und daher

$$\begin{aligned}e^{i\omega t} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega t)^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos \omega t + i \sin \omega t,\end{aligned}$$

eine Formel, die schon Euler (1707-1783) kannte:

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t.$$

Damit sehen wir übrigens auch, wie wir uns $e^{i\omega t}$ veranschaulichen können, wenn wir unsere ALS-OB-Zahlen mit einer reellen und einer imaginären Achse in der Ebene $\mathbb{R}^2$ aufzeichnen, nämlich auf der Kreislinie vom Radius 1 um 0:



Also jedenfalls wäre dann $e^{\lambda_1 t} = e^{\gamma t} \cos \omega t + i e^{\gamma t} \sin \omega t$ eine Lösung, und das bedeutet, dass sowohl der reelle Anteil $\varphi_1(t) := e^{\gamma t} \cos \omega t$ als auch der imaginäre Anteil $\varphi_2(t) := e^{\gamma t} \sin \omega t$ Lösungen sein müssten!

Weshalb? Schreiben wir zur Abkürzung $\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x =: L[x]$, so hätten wir wegen $L[e^{\lambda_1 t}] = 0$ ja auch

$$L[e^{\gamma t} \cos \omega t] + i L[e^{\gamma t} \sin \omega t] = 0.$$

Aus $a + ib = 0$ folgt aber $ib = -a$ und durch Quadrieren $-b^2 = a^2$, bei reellen a, b kann das aber nur für $a = b = 0$ eintreten. Deshalb also.

Somit haben wir durch das ALS-OB-Rechnen Kandidaten $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ für ein Fundamentalsystem gefunden. Aber ist das noch Mathematik? Na, in dieser Form eher mathematisches *brain storming* oder *Heuristik*, wie man nach dem griechischen Wort *heuristo* (ich finde, *heureka* ich habe gefunden) auch sagt.

Das schadet aber gar nichts, denn wir benutzen die heuristische Methode hier nur, um das Lemma *aufzustellen*.

Lemma 3: Gilt $a_1^2/4 - a_0 < 0$, so ist für

$$\gamma := -a_1/2 \quad \text{und} \quad \omega := \sqrt{a_0 - a_1^2/4}$$

durch $\varphi_1(t) := e^{\gamma t} \cos \omega t$ und $\varphi_2(t) := e^{\gamma t} \sin \omega t$ ein Fundamentalsystem von $\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$ gegeben.

Der *Beweis* dieses durch ALS-OB-Rechnung suggerierten Resultats erfolgt fern von den imaginären Zahlen ganz gewöhnlich durch Einsetzen und Anfangswerte bedienen, wie bei den ersten beiden Lemmas auch. $\square$

Mit diesem Fundamentalsystem kann die allgemeine Lösung von $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0$ als

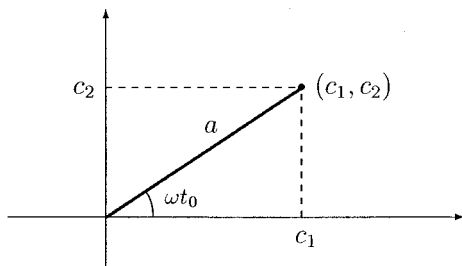
$$x(t) = e^{\gamma t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

geschrieben werden. Aus den bekannten Eigenschaften von Sinus und Cosinus ergibt sich aber auch, dass man jedes Zahlenpaar $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ in der Gestalt

$$c_1 = a \cos \omega t_0$$

$$c_2 = a \sin \omega t_0$$

mit einem $a \geq 0$ darstellen kann ("Polarkoordinaten"):



(c_1, c_2) durch a und ωt_0 beschrieben

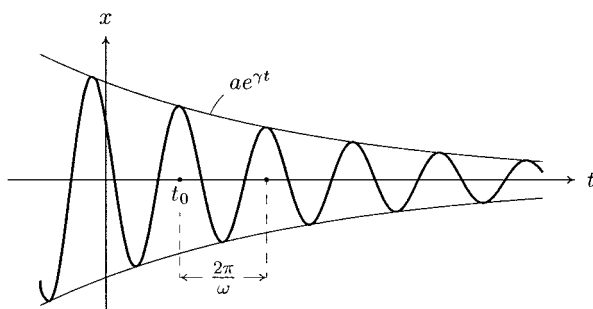
Dann wird nach dem Additionstheorem für den Cosinus

$$e^{\gamma t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) = ae^{\gamma t} \cos \omega(t - t_0),$$

und deshalb kann man die allgemeine Lösung von $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0$ auch in der Form

$$x(t) = ae^{\gamma t} \cos \omega(t - t_0), \quad a \geq 0, t_0 \in [0, 2\pi/\omega)$$

angeben.



Gedämpfte Schwingung $ae^{\gamma t} \cos \omega(t - t_0)$ mit
Amplitude a und Phasenverschiebung t_0

Das Fundamentalsystem $(e^{\gamma t} \cos \omega t, e^{\gamma t} \sin \omega t)$ ist für theoretische Betrachtungen bequemer, die Lösungsangabe als $ae^{\gamma t} \cos \omega(t - t_0)$ ist näher an der physikalischen Bedeutung.

Die “komplexen Zahlen” $x + iy \in \mathbb{C}$, die im 16. Jahrhundert beim ALS-OB-Rechnen entdeckt wurden, sind längst aus dem heuristischen Bereich in die fundierte Mathematik herüber geholt worden und spielen in Mathematik und Physik eine wichtige Rolle. Die Quantentheorie ist ohne die komplexen Zahlen undenkbar, und wie Sie eben erlebt haben, sind die komplexen Zahlen schon bei den einfachsten Schwingungsgleichungen sehr hilfreich. Wir wollen uns deshalb bald³ mit der wissenschaftlichen und nicht nur heuristischen Definition der komplexen Zahlen bekannt machen.

Heuristische Überlegungen sind auch in der Mathematik oft hilfreich, und wenn die dabei gefundenen Resultate oder besser *Vermutungen* wie in unserem Falle nachträglich bewiesen werden können, dann ist es ja sowieso gut.

Sie werden aber in der Physik oft mathematische Heuristik antreffen, die durch *physikalische* Plausibilität so stark gestützt ist, dass eine nachträgliche mathematische Präzisierung und Rechtfertigung nicht mehr notwendig erscheint, oder sogar, vom Standpunkt des Physikers, auf Abwege führen würde. Dabei keine Fehler zu machen, verlangt Fingerspitzengefühl und physikalische Intuition. Sie

müssen das auch lernen, schauen Sie es Ihren Physikprofessoren ab, es hat gar keinen Zweck sich dagegen sträuben zu wollen. Wenn Ihnen ohne die volle mathematische Sicherheit unwohl ist, dann wechseln Sie nur gleich das Fach und studieren lieber Mathematik, denn diese Sicherheit können wir bieten.

In der Quantenfeldtheorie zum Beispiel bewegt sich die Heuristik auf mathematisch so schwierigem Gelände, dass es bisher niemandem auf der Welt gelungen ist, alle Ergebnisse nachträglich mathematisch exakt zu rechtfertigen. Das ganze Gebiet würde nicht existieren, wenn die Physiker nicht gewagt hätten, ohne das Halteseil der absoluten mathematischen Gewissheit weiter zu steigen. So ist das, es mag Sie nun erschrecken oder faszinieren.

5.4 Übungsaufgaben

Aufgabe R5.1: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ mit $\gamma > 0, \omega_0 > 0$ für alle drei Fälle $\gamma < \omega_0$, $\gamma > \omega_0$ und $\gamma = \omega_0$. Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit der Anfangsbedingung $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0$.

Aufgabe R5.2: Ein Supraleiter habe Oberflächen parallel zur (y, z) -Koordinatenebene bei $x = -a$ und $x = +a$. Für das Eindringen eines parallel zur Oberfläche angelegten Magnetfeldes in den Supraleiter gilt

$$\frac{d^2}{dx^2} B(x) = \gamma^2 B(x).$$

Berechnen Sie die Feldverteilungen im Innern ($-a < x < a$), wenn die Feldstärke bei $x = a$ den Wert B_0 und bei $x = -a$ den Wert $-B_0$ bzw. ebenfalls B_0 hat.

Aufgabe R5.3: Für die Bewegung eines Teilchens mit der Ladung $q \neq 0$ und der Masse $m > 0$ in einem gekreuzten elektrischen Feld (in x -Richtung) und magnetischen Feld (in z -Richtung) gilt die dreidimensionale Bewegungsgleichung $m\ddot{\mathbf{x}} = q\mathbf{E} + q\dot{\mathbf{y}}B$, $m\ddot{y} = -q\dot{x}B$, $\ddot{z} = 0$. Finden Sie die allgemeine Lösung und die spezielle Lösung mit der Anfangsbedingung: $x(0) = y(0) = z(0) = 0, \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$.

Aufgabe R5.4: Drücken Sie $\sin^3 x$ durch $\sin nx$ mit Hilfe der Eulerformel aus.

Aufgabe T5.1: Zeigen Sie, daß die Lösungen der linearen Differentialgleichung $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0$ mit konstanten Koeffizienten genau dann alle beschränkt sind, wenn $a_1 = 0$ und $a_0 > 0$ gilt.

Aufgabe T5.2: Zeigen Sie, dass eine nicht identisch verschwindende Lösung $x = x(t)$ einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten nicht in beide Richtungen $t \rightarrow \pm\infty$ gegen Null gehen kann.

Aufgabe T5.3: Es seien $a_1, a_0 : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann sind die maximalen Lösungen von $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ immer auf ganz $[x_0, x_1]$ definiert (aber das zu zeigen ist nicht Gegenstand der Aufgabe). Es bezeichne $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Abbildung, welche dem Anfangswertepaar $(\varphi(x_0), \varphi'(x_0))$ einer Lösung $\varphi : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ von $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ immer das Endwertepaar $(\varphi(x_1), \varphi'(x_1))$ zuordnet. Beweisen Sie, daß dann $T(\vec{y} + \vec{z}) = T(\vec{y}) + T(\vec{z})$ für alle $\vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Aufgabe T5.4: Sei $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ eine über $[x_1, x_2]$ gegebene lineare (möglicherweise inhomogene) Differentialgleichung. Beweisen Sie: a) Sind $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ zwei feste Zahlen und gibt es mehr als eine Lösung der Differentialgleichung, welche die Randbedingungen $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$ erfüllen, so gibt es unendlich viele. b) Zeigen Sie durch konkrete Beispiele, dass die Anzahl solcher Lösungen Null, Eins oder unendlich sein kann.

6

Bereiche und Abbildungen in mehreren Variablen

6.1 Beispiele von Bereichen im $\mathbb{R}^n$

Wie wir gesehen haben, fordert uns schon das Studium der Differentialgleichungen für ganz gewöhnliche Funktionen $y = y(x)$ einer reellen Variablen auf, auch Funktionen f von mehreren Variablen zu betrachten, weil wir sonst $y' = f(x, y)$ oder $y'' = f(x, y, y')$ gar nicht hinschreiben können. Jetzt wollen wir die mehrdimensionale Analysis systematisch kennenlernen.

Als Verallgemeinerung der Namen *Paar* für (x_1, x_2) , *Tripel* für (x_1, x_2, x_3) , *Quadrupel* für (x_1, x_2, x_3, x_4) hat man das nicht sonderlich schöne aber praktische Wort ***n-tupel*** für $(x_1, \dots, x_n)$ erfunden.

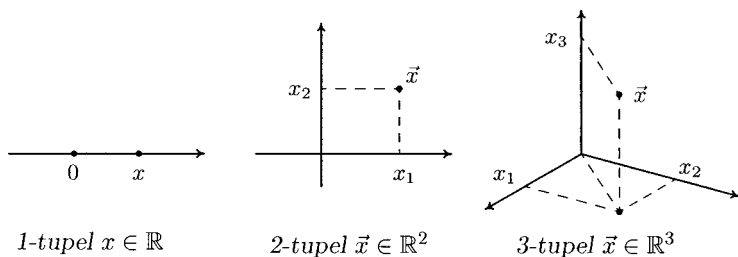
Definition: Mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnet man die Menge der n -tupel reeller Zahlen, also

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$$

für $n \in \mathbb{N}$. □

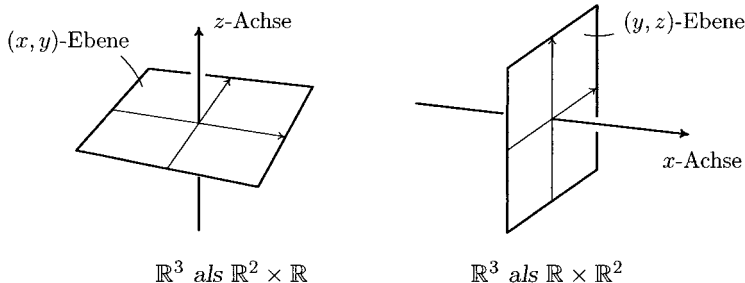
Auch einen $\mathbb{R}^1$ gibt es also, aber das ist eigentlich $\mathbb{R}$ selbst, ein 1-tupel ist eben einfach durch eine Zahl gegeben, wir schreiben $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$. Über $\mathbb{R}^0$ möchte ich jetzt noch nicht reden¹.

Um uns diese Zahlengebilde $\mathbb{R}^n$ zu veranschaulichen, verwenden wir für $n = 1$ eine Gerade (‘‘Zahlengerade’’), für $n = 2$ eine Ebene und für $n = 3$ den Raum, jeweils mit Koordinatenachsen versehen:



Das soll Sie natürlich nicht auf den Gedanken bringen, der $\mathbb{R}^3$ sei der Raum. Was immer *der Raum* als physikalische Gegebenheit oder einfach als Gegenstand unseres Anschauungsvermögens letztendlich sei, aus Zahlentripeln besteht er sicher nicht.

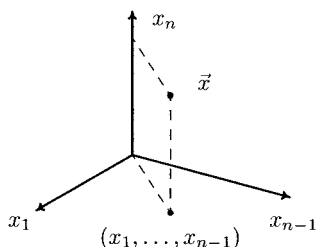
Bei Bedarf wollen wir statt dreier Achsen auch eine Achse und eine Koordinatenebene zeichnen



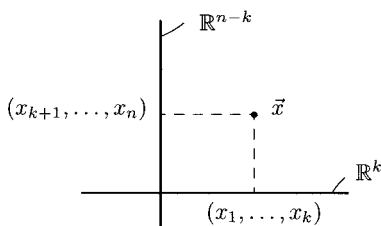
wie es gerade am besten passt. Und damit, denken Sie vielleicht, sind wir am Ende der Anschauungsmöglichkeiten angelangt, vier- und höherdimensionale $\mathbb{R}^n$ kann man sich eben nicht vorstellen.

Das machen wir aber so einfach wie angeblich Kolumbus mit dem auf die Spitze gestellten Ei. Hier sind zwei Möglichkeiten, den

$\mathbb{R}^n$ zu ‘veranschaulichen’:



Ignoriere entweder, dass wir nur drei Achsen sehen, tue so, als ob es n wären, oder ...



... sei z.B. mit der Veranschaulichung von $\mathbb{R}^k$ und $\mathbb{R}^{n-k}$ durch je eine Achse zufrieden

Das wird Ihnen sehr windig vorkommen, beinahe ein Schwindel. Natürlich kann eine so grob vereinfachte Darstellung nicht alle Vorkommnisse im $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$ usw. adäquat wiedergeben. Aber die Anschauung kann und soll das logische Schließen sowieso nicht *ersetzen*, sondern es nur mit Ideen oder heuristisch *unterstützen*, und Sie werden noch merken, wieviel diese primitive Art, $\mathbb{R}^n$ durch $\mathbb{R}^3$ oder $\mathbb{R}^2$ zu visualisieren dabei leisten kann.

Ich gebrauche das Wort *Analysis* hier immer so, wie es in den entsprechenden Vorlesungstiteln des Grundstudiums gemeint ist: als Kurzbezeichnung der Differential- und Integralrechnung. Gegenstand der Analysis sind die **vektorwertigen Funktionen** oder **Abbildungen**

$$\vec{f}: B \longrightarrow \mathbb{R}^m,$$

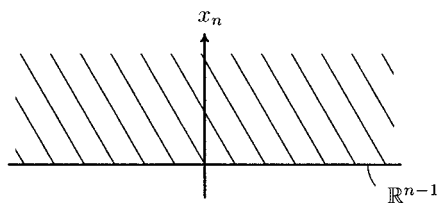
mit Definitionsbereichen $B \subset \mathbb{R}^n$, jedem n -tupel $(x_1, \dots, x_n) \in B$ wird also ein m -tupel

$$(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^m$$

zugeordnet, oder in der Vektorschreibweise: $\vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{x})$. Unser erstes Gesprächsthema bilden deshalb die Definitionsbereiche $B \subset \mathbb{R}^n$, die wir dabei zulassen wollen. **Allgemeine n -dimensionale Quader**

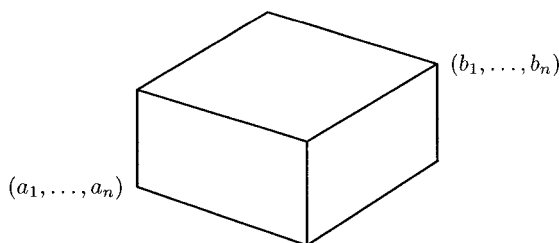
$$D_1 \times \dots \times D_n \subset \mathbb{R}^n,$$

wobei also die D_i allgemeine Intervalle seien, sind jedenfalls nach wie vor beliebige Definitionsbereiche. Dazu gehört $\mathbb{R}^n$ selbst, auch **Halbräume** wie z.B. $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_0^+$,



Oberer Halbraum

auch die **kompakten Quader**



$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$$

die dem Namen im umgangssprachlichen Sinne am besten gerecht werden, usw.

Aber damit ist auf die Dauer kein Auslangen. Müssen wir nicht z.B. auch einmal eine Funktion oder Abbildung auf einer Kreisscheibe im $\mathbb{R}^2$ studieren?



Kreisscheibe. Ohne Rand offen, mit Rand abgeschlossen

Das ist die Menge der Punkte in der Ebene, die von einem festen Punkt $\vec{x}_0$ einen *Abstand* $\leq r$ bzw. $< r$ haben, analog für Kugeln im $\mathbb{R}^3$ oder allgemeiner im $\mathbb{R}^n$. Wie ist der Abstand definiert?

Definition: Für $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ heißt

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

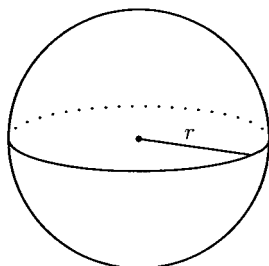
die **Norm** von $\vec{x}$. Unter dem **Abstand** oder der Distanz $d(\vec{x}, \vec{y})$ zweier Elemente $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ versteht man die Zahl $\|\vec{y} - \vec{x}\|$. $\square$

Motiviert ist diese Definition natürlich durch die elementargeometrische Streckenlänge und den Satz von Pythagoras.

Notation: Mit $K_r(\vec{x}_0) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq r\}$ bezeichnen wir die sogenannte **abgeschlossene**, mit

$$\overset{\circ}{K}_r(\vec{x}_0) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r\}$$

die **offene** n -dimensionale Kugel mit Mittelpunkt $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ und Radius $r > 0$.



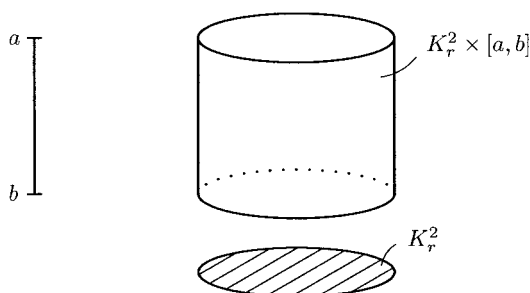
Kugel

Ist $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ der Mittelpunkt, so schreiben wir auch einfach K_r bzw. $\overset{\circ}{K}_r$. Bei Bedarf notieren wir die Dimension als oberen Index, also dann $K_r^n(\vec{x}_0)$ oder $\overset{\circ}{K}_r^n(\vec{x}_0)$. Die **Kugeloberfläche** oder **Sphäre** wollen wir als

$$S_r^{n-1}(\vec{x}_0) := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \| \vec{x} - \vec{x}_0 \| = r \}$$

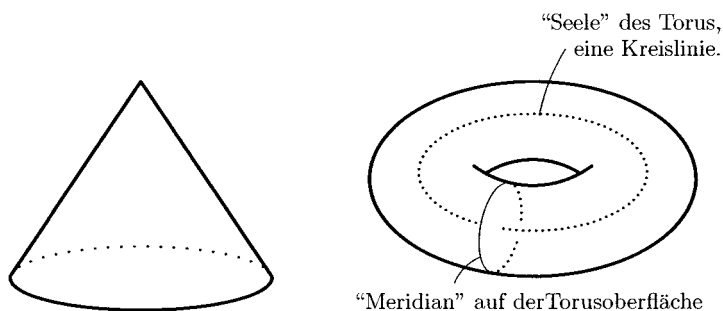
schreiben. Für $r = 1$ und $\vec{x}_0 = 0$ ist das die sogenannte Einheits-sphäre oder, wenn die Dimension auch genannt werden soll, die **$(n-1)$ -Sphäre** $S^{n-1} := S_1^{n-1}(0)$.

Häufig kommen auch **Zylinder** vor,



Vollzylinder $K_r^2 \times [a, b]$

und es gibt noch andere Bereiche, die geometrische Bezeichnungen führen:



z.B. Kegel

z.B. Volltorus

und dann erst all die namenlosen ‘beliebig geformten’ Gebiete, es wäre ja hoffnungslos, alle interessanten Bereiche in $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ oder allgemeiner $\mathbb{R}^n$ *aufzählen* zu wollen, so wie ich die allgemeinen Intervalle in $\mathbb{R}^1$ einfach aufzählen konnte.

Man muss deshalb die mathematischen *Eigenschaften* zu beschreiben versuchen, die man von den Definitionsbereichen $B \subset \mathbb{R}^n$ haben will. Die wichtigsten Eigenschaften lernen wir im nächsten Abschnitt kennen.

6.2 Offene, abgeschlossene und kompakte Bereiche

Einerseits sollen viele Definitionsbereiche zugelassen werden, damit man den Anforderungen der Anwendungen gewachsen ist, andererseits dürfen sie nicht zu bizarr sein, damit die mathematischen Methoden der Analysis ausführbar bleiben — oft wünscht man deshalb, dass die Bereiche einen glatten Rand haben, keine Löcher oder Fehlstellen im Inneren und dergleichen. Manche dieser Eigenschaften sind nicht so ganz einfach mathematisch zu erfassen (z.B. ‘glatter Rand’: versuchen Sie es einmal!).

Für den Anfang genügen uns jetzt die einfachsten und wichtigsten Begriffe dieser Art. Am allereinfachsten ist die Beschränktheit:

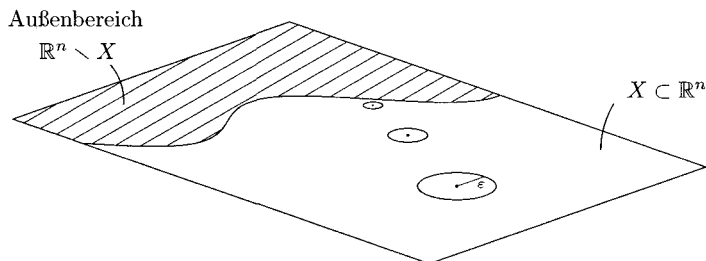
Definition: Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt **beschränkt**, wenn es ein $C > 0$ mit $\|\vec{x}\| \leq C$ für alle $\vec{x} \in X$ gibt. $\square$

“Wenn X in eine große Kugel passt”, na klar. — Ein Begriff von fundamentaler Bedeutung für die ganze Analysis ist der der *Offenheit* einer Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$.

Die Pinguine in der Antarktis stehen dicht zusammengedrängt in den eisigen Winterstürmen und warten auf den Frühling. Diejenigen Pinguine, die ganz von anderen Pinguinen umgeben sind haben es gut, aber die am Rande sind der bitteren Kälte ausgesetzt und müssen von Zeit zu Zeit abgelöst werden, damit sie nicht erfrieren. Die offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind jene, in denen es alle Punkte gut haben:

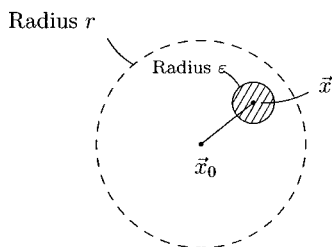
Definition: Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt **offen**, wenn sich zu jedem $\vec{x} \in X$ ein $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon^n(\vec{x}) \subset X$ finden lässt. $\square$

Eine Schutzkugel um $\vec{x}$, sozusagen! Natürlich haben es nicht alle Punkte in einer offenen Menge *gleich gut*.



Zur Offenheitsbedingung

Gegen den Rand hin werden die Schutzkugeln arg klein, in der Antarktis würden sie nicht mehr viel schützen, aber bei unserem mathematischen Begriff geht es nicht um die Größe der Schutzkugel, sondern nur darum, dass jeder Punkt in X eine hat, groß oder klein. Zum Beispiel ist die von uns oben schon "offene Kugel" genannte Menge $\overset{\circ}{K}_r(\vec{x}_0)$ wirklich offen und der Name besteht zu Recht:



$X = \overset{\circ}{K}_r(\vec{x}_0)$ ist offen, für $\vec{x} \in X$ setze z.B. $\varepsilon = \frac{1}{2}(r - \|\vec{x} - \vec{x}_0\|)$

Beim Beweis dieser Tatsache benutzt man die unter dem Namen **Dreiecksungleichung** bekannte Eigenschaft

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

der Norm. Angewandt auf $\vec{z} - \vec{x}$ und $\vec{y} - \vec{z}$ statt auf $\vec{x}$ und $\vec{y}$ besagt das

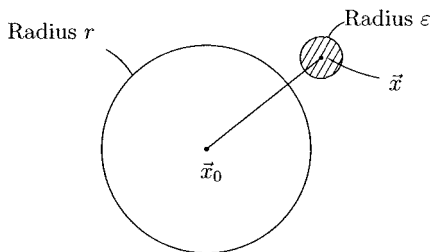
$$\|\vec{y} - \vec{x}\| \leq \|\vec{z} - \vec{x}\| + \|\vec{y} - \vec{z}\|,$$

mit der anschaulichen Bedeutung, dass im $\mathbb{R}^n$ jeweils zwei Seiten eines Dreiecks $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ zusammen mindestens so lang wie die dritte sind, der Umweg über $\vec{z}$ also keine Abkürzung auf dem Wege von $\vec{x}$ nach $\vec{y}$ sein kann, daher der Name *Dreiecksungleichung*. Schreiben Sie bei Bedarf in den Übungen einfach “nach der Dreiecksungleichung gilt ...”, den Beweis tragen wir nach, wenn wir über Skalarprodukte sprechen werden.²

Von der Offenheit leiten sich verwandte Begriffe her, z.B. nennt man eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ *abgeschlossen*, wenn — sie nicht offen ist? Nein:

Definition: $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt **abgeschlossen**, wenn $\mathbb{R}^n \setminus X$ offen ist. $\square$

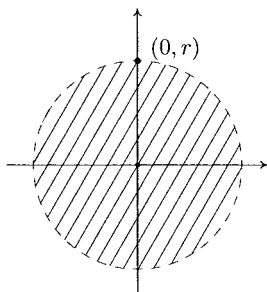
Wenn also jeder Punkt, der *draußen* ist, eine Kugel um sich hat, die auch noch draußen ist!



Die “abgeschlossene Kugel” ist wirklich abgeschlossen

Anschaulich bedeutet die Abgeschlossenheit, dass die Randpunkte alle zur Menge gehören, denn wäre ein Randpunkt im *Komplement*, wie man sagt, so hätte er ja auch eine Kugel um sich, die im Komplement liegt, und er wäre daher gar kein Randpunkt. Nehmen Sie

zum Beispiel zu einer offenen Kreisscheibe einen einzelnen Randpunkt dazu,



$$X := \overset{\circ}{K}_r^2 \cup \{(0, r)\} \text{ in } \mathbb{R}^2$$

dann ist die Offenheit schon zerstört, aber die Abgeschlossenheit noch nicht hergestellt. Die Menge X ist, wie die meisten, *weder* offen *noch* abgeschlossen.

Definition: Die abgeschlossenen beschränkten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ heißen die **kompakten** Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. $\square$

Welche Rolle die Begriffe “offen”, “abgeschlossen” und “kompakt” spielen, wird Ihnen erst nach und nach klar werden. Einige Bemerkungen zur Offenheit will ich aber schon vorab machen: Wir werden jetzt häufig Abbildungen und Funktionen mit *offenen* Definitionsbereichen betrachten. Der Grund ist einfach der, dass ich dann beim Arbeiten in der Nähe eines Punktes $\vec{x}_0 \in B$, z.B. beim Bilden von Ableitungen, Grenzwerten usw. nicht am Rande des “Abgrunds der Nichtdefiniertheit” stehen kann, da mir die Schutzkugel $\overset{\circ}{K}_\epsilon(\vec{x}_0) \subset B$ einen Bereich rund um $\vec{x}_0$ garantiert, in dem ich ungestört alles das tun kann, wozu ich f definiert brauche. Dass die Schutzkugel vielleicht sehr klein ist, macht für Limesbetrachtungen und dergleichen gar nichts aus.

Sie werden das bald im Einzelnen sehen, aber dass die Offenheit des Definitionsbereiches für alle lokalen Betrachtungen eine mathematische Bequemlichkeit darstellt, wird Ihnen von vornherein plausibel erscheinen und vielleicht Ihren Argwohn wecken: Aha! Das macht der zu seiner *Bequemlichkeit*! Und wenn wir dann in den Anwendungen mit einer abgeschlossenen Kugel, einem Zylinder

der, einer Fläche und dergleichen zu tun haben, die ja keine offenen Mengen sind, dann dürfen wir selber sehen, wo wir bleiben!?

Dieser Argwohn ist an und für sich nicht ganz unbegründet. Ich kann aber einiges zu Ihrer Beruhigung vorbringen. Erstens sind die *natürlichen* Definitionsbereiche der Funktionen und Abbildungen, nämlich die jeweils größten Bereiche, auf denen sich die Formeln gutwillig noch lesen lassen, meistens von selbst offen, was nicht nur eine Erfahrungstatsache ist, sondern auch einen tieferen mathematischen Grund hat.³ Wenn Sie aber Anlass haben, eine Funktion eben auf einer abgeschlossenen Kugel zu betrachten, so ist diese Kugel gewöhnlich *enthalten* in so einem offenen natürlichen Definitionsbereich, in dem wir unsere Ableitungen und dergleichen ohne Schwierigkeiten bilden und danach wieder auf die Kugel einschränken, d.h. nur dort betrachten können. Lassen Sie das ruhig an sich herankommen.

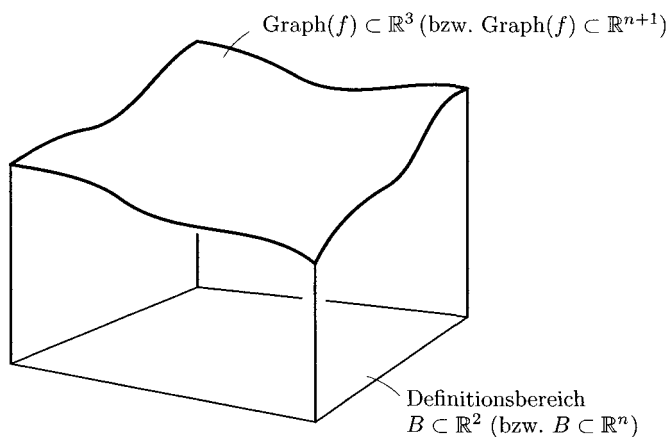
6.3 Abbildungen in mehreren Variablen und ihre Veranschaulichung

Wir betrachten ab jetzt also Abbildungen $\tilde{f}: B \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $B \subset \mathbb{R}^n$, d.h. Zuordnungen, die jedem Element $\tilde{x} \in B$ ein Element $\tilde{f}(\tilde{x}) \in \mathbb{R}^m$ zuordnen. Über den Definitionsbereich B will ich vorläufig noch keine genaueren Vorschriften erlassen, denken Sie z.B. an eine beliebige offene Menge oder aber einen der konkreten (nicht notwendig offenen) Bereiche, wie allgemeiner Quader, Kugel, Zylinder und dergleichen. Dieser Abschnitt soll Ihre Anschauung stärken.

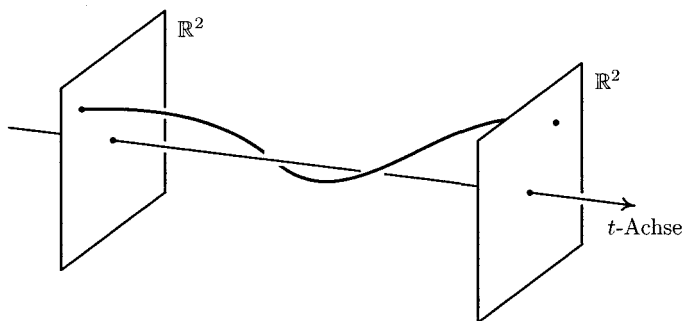
Betrachten wir zuerst die reellwertigen *Funktionen*, also den Fall $m = 1$. Für $n = 2$ können wir den Graphen

$$\text{Graph}(f) := \{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2) \in B\}$$

von $f: B \rightarrow \mathbb{R}$, das *Funktionsgebirge*, noch im Raume unterbringen und die Funktion dadurch veranschaulichen. Für $n \geq 3$ müssen wir eben so tun als ob, wir zeichnen dasselbe Bild, aber beschriften es anders, indem wir uns auf die Anschauung des $\mathbb{R}^{n+1}$ als $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ berufen:

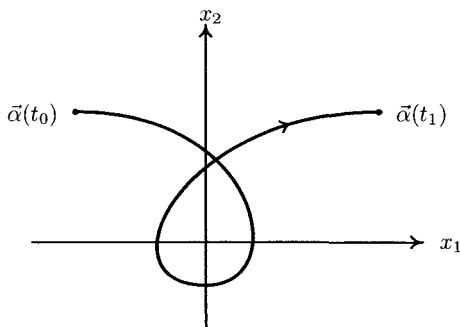
Graph einer Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$

Jetzt sei $n = 1$, aber $m \geq 2$. Definitionsbereich sei z.B. ein allgemeines Intervall D , zur Notation der Variablen verwenden wir jetzt $t, \vec{x}$ statt $x, \vec{y}$. So eine Abbildung heißt auch eine *Kurve* $\vec{\alpha} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$. Für $m = 2$ ist es möglich den Graphen in $\mathbb{R}^3$ zu zeichnen.



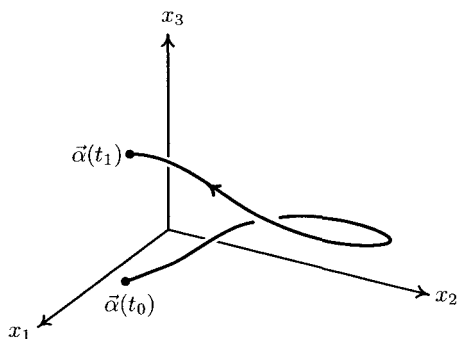
Graph einer ebenen Kurve

Meist begnügt man sich aber damit das Bild $\vec{\alpha}(D) \subset \mathbb{R}^2$, die sogenannte *Bahn* von $\vec{\alpha}$ zu skizzieren:



Bahn der ebenen Kurve

Der Graph enthält allerdings mehr Information, zu jedem $t \in D$ lesen wir an ihm ab, wo $\vec{\alpha}(t)$ gerade ist. Bei Betrachtung der Bahn sehen wir nur, wo das Fahrzeug entlang gefahren ist, aber wo genau es zur Zeit t war, geht daraus nicht hervor. Deuten wir wenn möglich wenigstens die Fahrtrichtung durch einen Pfeil an! Ein großer Vorteil der Bahn ist aber, dass wir sie auch im Falle $m = 3$, also von Kurven im Raum noch skizzieren können, den Graphen dagegen nicht mehr.



Bahn einer Raumkurve

Auch im Falle $n = 2$ und $m = 2$ lässt sich der Graph nicht wirklich zeichnen, weil er im $\mathbb{R}^4$ liegt. Wir können aber das Bild $\vec{f}(B) \subset \mathbb{R}^2$ darstellen,

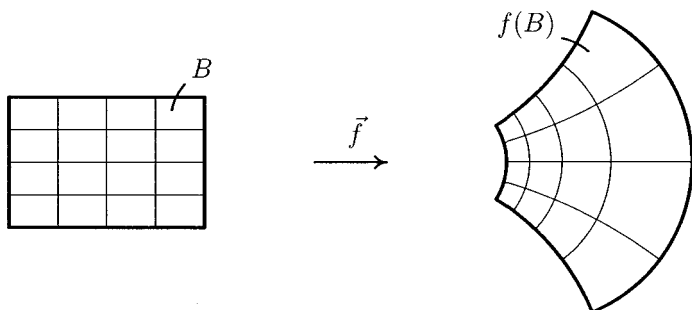


Abbildung von $B \subset \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$

und um den Mechanismus von $\vec{f}$ deutlicher zu machen, kann man z.B. B durch ein Netz unterteilen und dessen Bild auch zeigen, und genau so können wir es im Falle $n = 2$, $m = 3$ machen.

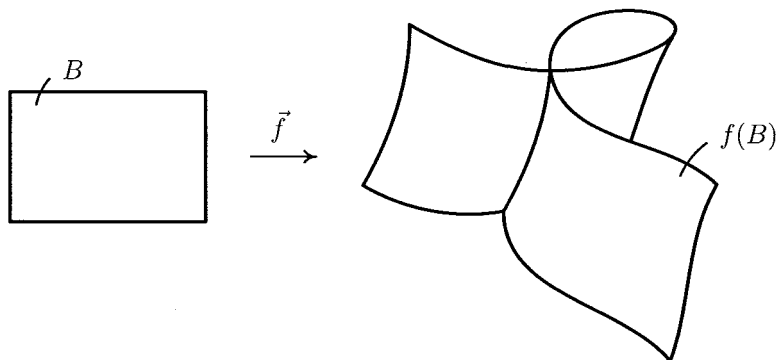
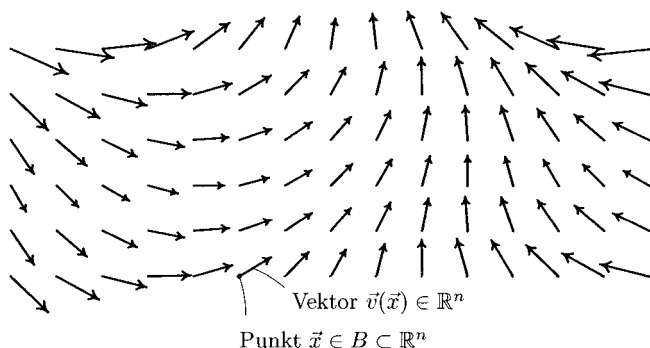


Abbildung von $B \subset \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^3$

Nun wenden wir uns dem wichtigen Falle $m = n$ zu. Welche Veranschaulichung man für eine Abbildung am besten wählt, hat auch

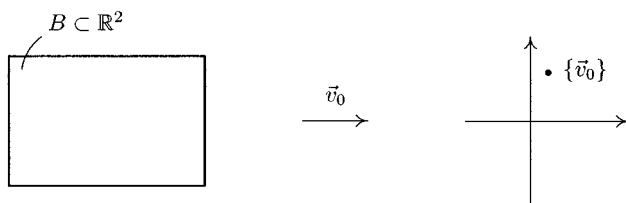
damit zu tun, was die Abbildung für einen *Sinn*, etwa was für eine physikalische Bedeutung sie haben soll. Abbildungen mit $m = n$ haben in der Physik oft die Aufgabe, *Vektorfelder* zu beschreiben, d.h. an jeder Stelle $\vec{x} \in B$ eines Definitionsbereiches in $\mathbb{R}^n$ ist ein Vektor $\vec{v}(\vec{x})$ gegeben, z.B. in einem elektrischen Feld der Vektor $\vec{E}$ der elektrischen Feldstärke,



und weil der Feldvektor $\vec{v}(\vec{x})$ seinerseits auch wieder durch n Komponenten $v_1(\vec{x}), \dots, v_n(\vec{x})$ beschrieben wird, ist $\vec{v}$ mathematisch gesehen gar nichts anderes als eine Abbildung

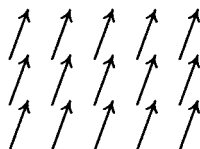
$$\vec{v} : B \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Das ist nun wieder eine ganz andere Art der Veranschaulichung, als die oben für $n = m = 2$ betrachtete. Nehmen Sie z.B. die konstante Abbildung $B \rightarrow \{\vec{v}_0\}$. Vorhin hätten wir sie durch ihr Bild veranschaulicht, und dieses besteht nur aus einem Element



Konstante Abbildung

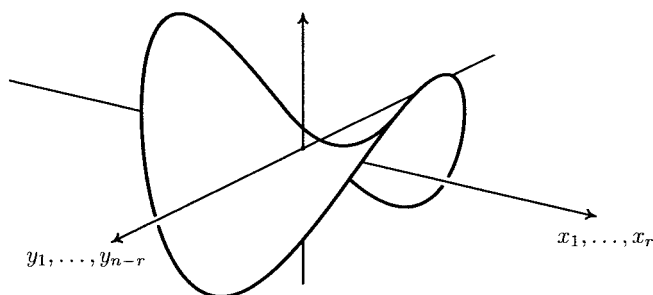
Als Vektorfeld sieht die konstante Abbildung dagegen so aus:



Konstantes Vektorfeld

Es handelt sich aber um dasselbe mathematische Objekt.

Schließlich sei erwähnt, dass man für allgemeine n und m natürlich wieder — und mit Erfolg — denselben Schwindel, wie schon bei den Räumen $\mathbb{R}^n$ selbst anwendet: *niedrigdimensionale Skizzen mit hochdimensionalen Beschriftungen!* Nehmen Sie den Graphen der Funktion $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r} \rightarrow \mathbb{R}$, $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto x_1^2 + \dots + x_r^2 - y_1^2 - \dots - y_{n-r}^2$. Was man wirklich hineinzeichnet ist der Fall $n = 2$, $r = 1$:



Graph von $x^2 - y^2$ oder von $\|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2$

meint aber mit der x -Achse eigentlich den $x_1, \dots, x_r$ -Raum, und mit der y -Achse den $y_1, \dots, y_{n-r}$ -Raum, mit der (x, y) -Ebene also den ganzen $\mathbb{R}^n$. Die Skizze ist für viele Zwecke immer noch brauchbar, z.B. um zu verstehen, weshalb f bei 0 weder ein Maximum noch ein Minimum hat usw.

Es gibt noch andere Möglichkeiten, die Funktionen und Abbildungen der mehrdimensionalen Analysis zur Anschauung zu bringen, z.B. eine Funktion $n = 2$, $m = 1$ durch beschriftete Niveaulinien (wie die Höhenlinien einer Landkarte) darzustellen, analog dazu eine Funktion von *drei* Variablen, deren Graphen wir also nicht mehr im $\mathbb{R}^3$ unterbringen, durch ihre *Niveauflächen*, die sehr wohl im $\mathbb{R}^3$ liegen. Auch diese Vorstellung unterstützt das Verständnis analoger Verhältnisse in höheren Dimensionen n und m , und wir werden bei Bedarf davon Gebrauch machen.

6.4 Stetigkeit

Ein kurzer Abschnitt sei der *Stetigkeit* gewidmet, einer grundlegenden Eigenschaft, die wir von unseren Abbildungen fast immer verlangen wollen. Ihre Definition stellt keine Ansprüche an den Definitionsbereich:

Definition: Eine Abbildung $\vec{f} : B \rightarrow \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^n$, heißt **stetig am Punkte** $\vec{x} \in B$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ möglich ist ein $\delta > 0$ zu finden, so dass

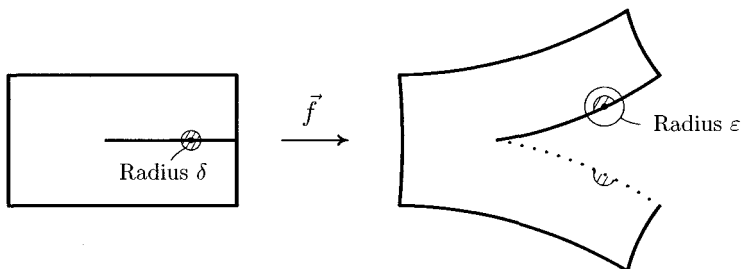
$$\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)\| < \varepsilon$$

für alle $\vec{x} \in B$, welche $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$ erfüllen. Die Abbildung heißt **stetig**, wenn sie an *allen* Punkten ihres Definitionsbereiches stetig ist. $\square$

Ungefähr heißt es also: wenn $\vec{x}$ nur nahe genug bei $\vec{x}_0$ ist, dann ist auch $\vec{f}(\vec{x})$ nahe bei $\vec{f}(\vec{x}_0)$. Das hört sich im ersten Moment vielleicht verständlicher an als die Definition selbst, sobald Sie aber irgend eine wissenschaftlich haltbare Aussage über eine Stetigkeitsfrage machen sollen, merken Sie, dass man mit “nahe bei” gar nichts anfangen kann und sind dann dankbar für die glasklare Sprache der formalen Definition.

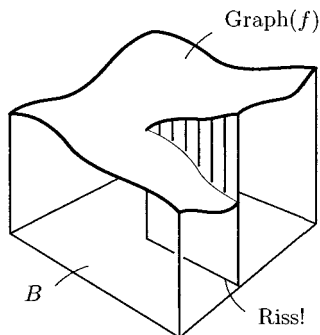
Beachten Sie insbesondere wieder, dass sich an Punkten, die nicht zum Definitionsbereich gehören, die Frage der Stetigkeit gar nicht stellt: wo die Funktion nicht definiert ist, dort ist sie weder stetig noch unstetig, sondern — na ja, eben nicht erklärt.

Es hilft dem intuitiven Verständnis des Stetigkeitsbegriffs, wenn man sich einige typische *Unstetigkeiten* anschaulich vergegenwärtigt.



Unstetige Abbildung, $n = m = 2$

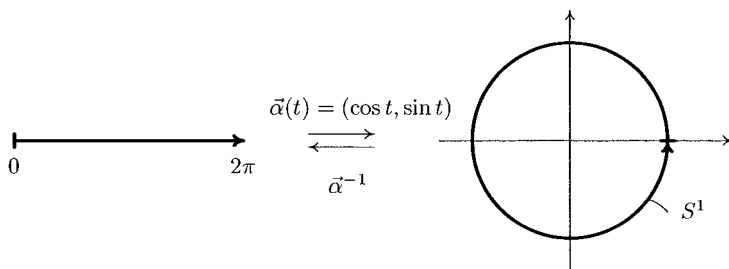
Für die in der Skizze gewählte ε -Kugel sehen Sie: *ist die δ -Kugel auch noch so klein, ihr Bild kann nicht in der ε -Kugel sein.* Dass $\vec{f}(K_\delta(\vec{x}_0))$ wohl in eine *größere* Kugel um $\vec{f}(\vec{x}_0)$ passen würde, hilft dann gar nichts mehr, die Abbildung ist unstetig. — Im Fall $n = 2$, $m = 1$ können wir das Funktionsgebirge betrachten, ein Felssturz zeigt dann jedenfalls eine Unstetigkeit an:



Klippen im Funktionsgebirge einer unstetigen Funktion

Diese Figuren sollen Ihr Verständnis des Stetigkeitsbegriffes *unterstützen*, aber nicht *ersetzen*. — Wie weist man die Stetigkeit in der Praxis technisch korrekt nach? Damit ist fast nie Arbeit verbunden, denn beim Herstellen neuer Abbildungen aus alten werden aus

stetigen Abbildungen meist wieder stetige, für Einschränkung und Verkettungen ist das klar, bei Rechenoperationen auch, wenn keine Nennernullstellen vorliegen. Vorsicht jedoch bei Umkehrungen! Warnendes Beispiel



Unstetige Umkehrabbildung

Die Existenz und Eigenschaften von Umkehrabbildungen vorauszusagen ist ein interessantes Problem, vor dem wir auch keineswegs kapitulieren⁴, nur für den Moment legen wir es noch beiseite, weil noch so viele wichtige einfachere Dinge zu besprechen sind.

6.5 Übungsaufgaben

Aufgabe T6.1: Welche allgemeinen Quader im $\mathbb{R}^n$ sind kompakt? Ist die Sphäre S^{n-1} kompakt? Beweisen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe T6.2: Sei $n \in \mathbb{N}$ und X_λ , $\lambda \in \Lambda$ eine Familie von Teilmengen $X_\lambda \subset \mathbb{R}^n$. Übertragen sich die Eigenschaften *offen*, *abgeschlossen*, *kompakt* von den X_λ auf die Vereinigung $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ und den Durchschnitt $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$? Beantworten Sie jede dieser sechs Fragen durch Beweis oder Gegenbeispiel.

Aufgabe T6.3: Sei $\vec{x}_0 \in B \subset \mathbb{R}^n$ und $\vec{f} : B \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Beweisen Sie, dass die Abbildung $\vec{f}$ genau dann bei $\vec{x}_0$ stetig ist, wenn ihre m Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m : B \rightarrow \mathbb{R}$ dort stetig sind.

Aufgabe T6.4: Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Beweisen Sie: f ist genau dann an jedem Punkt von D stetig, wenn

es für jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^m$ eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ mit $f^{-1}(U) = V \cap D$ gibt. *Zur Erinnerung:* Mit $f^{-1}(U)$ bezeichnet man die Menge $\{\vec{x} \in D \mid f(\vec{x}) \in U\}$, das **Urbild** von U unter f . Diese Notation bedeutet nicht, dass f invertierbar sein müsste.

Aufgabe T6.5: Beweisen Sie, dass der Wert einer stetigen Abbildung beim Herumwandern im Definitionsbereich “nicht plötzlich Null werden kann”, genauer: Ist $B \subset \mathbb{R}^n$ und $\vec{f}: B \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig bei $\vec{x}_0 \in B$ und $\vec{f}(\vec{x}_0) \neq 0$, so gibt es eine ganze Kugel um $\vec{x}_0$, die keine Nullstelle von $\vec{f}$ enthält.

7

Partielle Ableitungen und Mehrfachintegrale

7.1 Partielle Ableitungen

In diesem Abschnitt sei der Definitionsbereich $B \subset \mathbb{R}^n$ immer ein allgemeiner Quader oder eine offene Teilmenge. Ist $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so ist die Notation

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_n)$$

für die Ableitung *nach der Variablen* x_i wohl nicht misszuverstehen, probieren wir sie gleich an ein paar Beispielen aus:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1^2 + 2x_1x_2^3 + 5) &= 2x_1 + 2x_2^3 \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1^2 + 2x_1x_2^3 + 5) &= 6x_1x_2^2 \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\sin(x_1x_2) &= x_1\cos(x_1x_2),\end{aligned}$$

und die Variablen brauchen natürlich nicht unbedingt $x_1, \dots, x_n$ zu heißen, Sie werden auch

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \arctan \frac{x}{y} &= \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} \arctan \frac{x}{y} &= \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

richtig berechnen: man denkt sich einfach für den Vorgang des Ableitens nur die Variable variabel, nach der man ableiten soll, die anderen werden vorübergehend als Konstante angesehen, und wenn man mit dem Ableiten fertig ist, dann hat man eine neue Funktion, die *partielle Ableitung*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : B \rightarrow \mathbb{R}$$

vor sich. Als ordentliche Leute halten wir die nun schon verstandene Definition auch noch fest:

Definition: Ist $f(x_1, \dots, x_n)$ eine Funktion auf einem allgemeinen Quader oder eine offene Menge $B \subset \mathbb{R}^n$, so heißt der Grenzwert

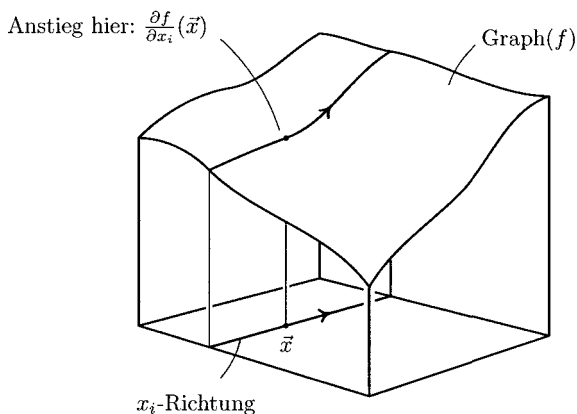
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h} =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n),$$

falls er existiert, die ***partielle Ableitung*** von f nach der Variablen x_i an der Stelle $(x_1, \dots, x_n)$. □

Gutwillig zu lesen! Sie sehen, wie ich hier in $\frac{\partial}{\partial x_i}$ die Bezeichnung x_i des Variablen-Namen benutze, an den anderen Stellen der Formel aber auch feste Werte $x_1, \dots, x_n$ zulassen kann.

Definition: Existiert der Grenzwert $\partial f / \partial x_i$ an *jeder* Stelle in B , so heißt f ***partiell nach x_i differenzierbar***.

Na klar. — Da beim partiellen Differenzieren die anderen Variablen festgehalten werden, ist die anschauliche Bedeutung der partiellen Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ natürlich die des Funktionsanstieges beim Fortschreiten auf der x_i -Koordinatenlinie:



$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ist der Anstieg des Graphen in die x_i -Richtung

Ist die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ wiederum partiell nach x_j differenzierbar, so notiert man

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

wofür man im Falle $i = j$ auch

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

schreibt. Das sind die partiellen Ableitungen **zweiter Ordnung**, und analog die partiellen Ableitungen **höherer Ordnung**:

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left(\cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_r}} f \right) \right) =: \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_r}}$$

Die Ableitungsregeln für Funktionen einer Variablen gelten auch für $\frac{\partial}{\partial x_i}$, z.B.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (fg) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i},$$

das ist nicht beweisbedürftig, denn $\frac{\partial}{\partial x_i}$ bezeichnet ja das gewöhnliche Ableiten nach *einer* Variablen bei festgehaltenen anderen. Die

partielle Differenzierbarkeit nach z.B. der Variablen x_1 impliziert aus demselben Grund auch die Stetigkeit der Funktion einer Variablen

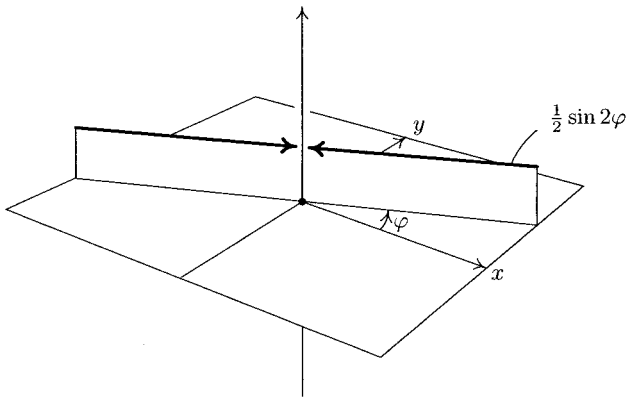
$$x_1 \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$$

bei festgehaltenen $x_2, \dots, x_n$, aber erstaunlicherweise genügt selbst die partielle Differenzierbarkeit nach allen Variablen nicht, die Stetigkeit von ganz f zu sichern:

Warnendes Beispiel: Die durch

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist überall partiell nach x und nach y differenzierbar, aber am Nullpunkt nicht stetig.



In Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist die Funktion durch $\frac{1}{2} \sin 2\varphi$ beschrieben. Die Skizze zeigt den Graphen über einer Geraden durch den Nullpunkt. Dreht man diese Gerade und beobachtet dabei das Auf und Ab des Wertes $\frac{1}{2} \sin 2\varphi$, dann durchschaut man die Funktion.

Die bloße partielle Differenzierbarkeit ist eben auch noch kein besonders interessanter Begriff. Drehen Sie z.B. die Funktion ein wenig, indem Sie von $\frac{1}{2} \sin 2\varphi$ zu $\frac{1}{2} \sin 2(\varphi - \varphi_0)$ übergehen: schon ist sie nicht mehr partiell differenzierbar. Zufälligkeiten der Koordinatenwahl! Richtig sinnvoll wird der Begriff aber in Verbindung mit Stetigkeitsforderungen.

Definition: Eine stetige Funktion, deren partielle Ableitungen bis zur r -ten Ordnung einschließlich alle existieren *und stetig sind* heißt eine ***C^r-Funktion***. $\square$

Dass dies ein interessanter Begriff ist, müssen Sie mir einstweilen glauben, die Bedeutung entfaltet sich so nach und nach in der Analysis. Eine Kostprobe gebe ich Ihnen aber gleich.

Satz: Ist f eine C^2 -Funktion, so sind die partiellen Ableitungen vertauschbar, d.h. es gilt stets

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

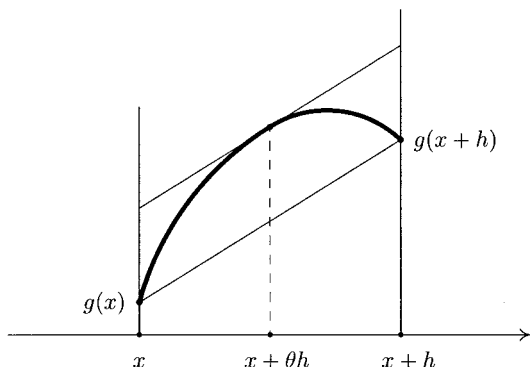
BEWEIS: ‘OBdA’, das heißt ohne Beschränkung der Allgemeinheit,¹ dürfen wir $n = 2$ annehmen und brauchen die Behauptung nur an der Stelle $(0, 0)$ nachzuweisen, weil wir ja die $n - 2$ unbeteiligten Variablen festhalten dürfen und eine Translation die Behauptung bei $(x_0, y_0) \in B \subset \mathbb{R}^2$ auf den Fall $(x_0, y_0) = (0, 0)$ zurückführt. Nach Definition ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(h, k) - f(h, 0)}{k} - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{f(h, k) - f(h, 0)}{k} - \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k}}{h}. \end{aligned}$$

Nun gilt ja bekanntlich für jede differenzierbare Funktion $g(x)$ von einer Variablen der

Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Ist $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einem allgemeinen Intervall D , und sind $x, x+h$ beide in D , so gibt es eine Zahl $0 < \theta < 1$ mit

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x + \theta h)$$



An irgend einer Zwischenstelle muss der Graph denselben Anstieg wie die Sehne haben, sagt der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Einstweilen nehme ich Zuflucht zu meiner üblichen Fiktion, Sie kennen den Beweis des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung aus der Schule, was ja wirklich auch sein könnte.² $\square$

Den Mittelwertsatz wenden wir jetzt zuerst für festes $k \neq 0$ auf $g(x) := \frac{f(x,k) - f(x,0)}{k}$ an und erhalten also

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(\theta h, k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\theta h, 0)}{k},$$

worauf aber auch wieder der Mittelwertsatz, diesmal für festes h anwendbar ist:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\theta h, \sigma k),$$

wobei θ und σ zwar in komplizierter Weise von (h, k) abhängen mögen, aber jedenfalls zwischen 0 und 1 liegen müssen.

Jetzt erst kommt die Stetigkeit von $\partial^2 f / \partial y \partial x$ zum Zuge, wonach der doppelte Limes, wie man sofort sieht, $\partial^2 f / \partial y \partial x(0, 0)$ ist, und der Satz von der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen bei C^2 -Funktionen ist bewiesen. $\square$

Das war nun alles für reellwertige *Funktionen* gesagt, aber damit hat man analog sofort auch alles für vektorwertige Funktionen, denn man definiert einfach:

Definition: Ist $\vec{f} : B \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf einem allgemeinen Quader oder einer offenen Menge im $\mathbb{R}^n$ definiert, so setzt man

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i} := \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f_h}{\partial x_i} \right) : B \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

falls vorhanden — partielle Ableitungen vektorwertiger Funktionen werden *komponentenweise* gebildet.

Wenn alle Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_m$ C^r -Funktionen sind, was auch dasselbe bedeutet wie die Existenz und Stetigkeit aller partieller Ableitungen von $\vec{f}$ bis zur r -ten Ordnung einschließlich, dann heißt $\vec{f}$ eine C^r -Abbildung.

Dass die physikalisch interessanten Funktionen oft von mehreren Variablen abhängen ist ja klar, z.B. von der Zeit und mehreren Ortsvariablen, und auch dass sie vektorwertig, also Abbildungen in einen $\mathbb{R}^m$ sein können, etwa elektrische und magnetische Felder. Die allgemeinen physikalischen Gesetze, denen diese mehrvariablen Funktionen und Abbildungen gehorchen müssen, sind wiederum oft *Differentialgleichungen* oder gekoppelte *Systeme* von Differentialgleichungen, aber jetzt sind es natürlich die *partiellen* Ableitungen der gesuchten Funktionen, die in diesen Gleichungen vorkommen, welche denn sonst. Man spricht deshalb von *partiellen Differentialgleichungen* im Unterschied zu den *gewöhnlichen Differentialgleichungen*, die wir in den Kapiteln 4 und 5 besprochen haben.

Zum Beispiel lautet die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

für die gesuchte Funktion $T = T(t, x, y, z)$, wobei κ eine Konstante, die *Temperaturleitzahl* ist.

Wie bei den gewöhnlichen Differentialgleichung müssen zum allgemeinen Gesetz noch besondere Bedingungen hinzukommen, die den Anfangsbedingungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen ähnlich, aber jetzt natürlich komplizierter sind.

Sie werden in der Physik vielen partiellen Differentialgleichungen begegnen, z.B. in der Elektrodynamik den Maxwell'schen Gleichungen, einem gekoppelten System erster Ordnung für elektrische und magnetische Felder und ihre Beziehungen zu Ladungen und Strömen, oder in der Quantenmechanik der Schrödingergleichung usw. Es wäre jetzt zu früh, über Lösungsmethoden zu sprechen. Eine Bemerkung möchte ich Ihnen aber noch mitgeben. Beim Lösen von partiellen Differentialgleichungen spielt die Theorie der *gewöhnlichen* Differentialgleichungen mehrfach die Rolle eines mathematischen Werkzeugs, eines Hilfsmittels. Es gibt *gewöhnliche* Differentialgleichungen, z.B. die Besselsche Differentialgleichung, die keine *direkte* physikalische Bedeutung haben, aber physikalisch wichtig sind, weil sie den Schlüssel zur Lösung einer direkt-physikalischen *partiellen* Differentialgleichung darstellen.

Das lässt sich natürlich nicht am "Tag der offenen Tür" einem unterhaltungsbedürftigen Laienpublikum mitteilen. Wenn es um wissenschaftliche Fragen, etwa um die Rolle der Mathematik in der Physik geht, so rate ich Ihnen: misstrauen Sie den Erklärungen, die so einfach sind, dass sie sich sogar über's Fernsehen transportieren lassen. Die Wirklichkeit der Wissenschaft ist immer viel tiefer und interessanter.

7.2 Mehrfachintegrale

Wie früher die beschränkten Funktionen auf einem kompakten Intervall nehmen wir jetzt die beschränkten Funktionen auf einem kompakten Quader in die Zange, um ihre Eignung zur Integration zu testen.

Definition: Sei $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader. Unter dem n -dimensionalen Volumen von Q verstehen wir

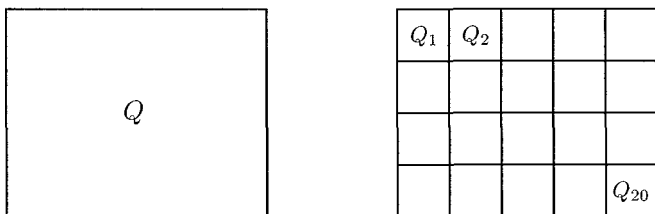
die Zahl

$$\text{Vol}(Q) = \text{Vol}^n(Q) := \prod_{\nu=1}^n (b_{\nu} - a_{\nu}).$$

Unter einer n -dimensionalen **Zange** über Q verstehen wir eine durch Unterteilungen

$$a_{\nu} = x_{\nu 0} < \dots < x_{\nu N_{\nu}} = b_{\nu}$$

der Intervalle gegebene Unterteilung von Q in $N_1 \cdot \dots \cdot N_n =: N$ Quader $Q_1, \dots, Q_N$,



Unterteilung eines Quaders

zusammen mit Höhenangaben $k_i \leq h_i$ für $i = 1, \dots, N$. Dann heißen

$$\mathcal{O}(Z) := \sum_{i=1}^N h_i \cdot \text{Vol}(Q_i)$$

$$\mathcal{U}(Z) := \sum_{i=1}^N k_i \cdot \text{Vol}(Q_i)$$

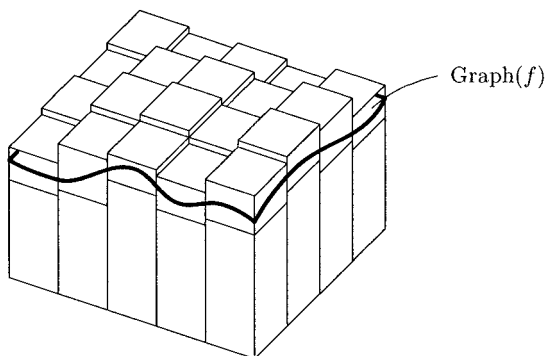
die **Ober-** bzw. **Untersumme** und

$$\mathcal{O}(Z) - \mathcal{U}(Z)$$

die **Integritoleranz** der Zange. Eine beschränkte Funktion $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ ist **in der Zange** Z , wenn

$$k_i \leq f(\vec{x}) \leq h_i \text{ für alle } \vec{x} \in Q_i$$

für alle $i = 1, \dots, N$ gilt.



Funktion von zwei Variablen in der Zange

Definition: Eine Funktion $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Riemann-integrierbar, wenn sie mit beliebig kleiner positiver Toleranz in die Zange genommen werden kann. Die einzige Zahl zwischen allen Ober- und Untersummen dieser Zangen heißt das **Integral**

$$\int_Q f(\vec{x}) d^n x$$

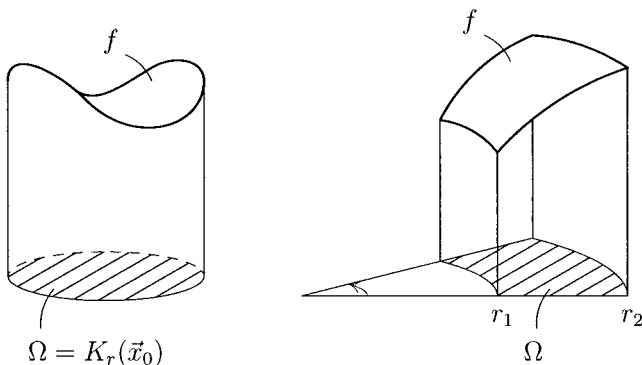
von f über Q . □

Wie bei den Funktionen einer Variablen können wir durch “Herabregnen” vieler Punkte sperrige Funktionen konstruieren, die sich in keine Zangen mit kleiner Toleranz nehmen lassen, und wie dort gilt auch im allgemeinen Fall:

Lemma: Jede stetige Funktion f auf einem kompakten Quader ist Riemann-integrierbar. □

Soweit geht alles genau so wie im eindimensionalen Fall. Jetzt fangen die Probleme an. Im Falle $n = 1$ konnten wir Integrale durch Stammfunktionen berechnen (Hauptsatz). Wie rechnen wir jetzt? Etwa mit Ober- und Untersummen? Ferner: im Falle $n = 1$ konnten wir mit den kompakten Intervallen $[a, b]$ als Integrationsbereichen

ganz zufrieden sein, $\int_a^b f(x)dx$ ist ja das typische Ziel der Integration, uneigentliche Integrale daraus durch Grenzübergänge. Jetzt aber wollen wir auch über andere Integrationsbereiche integrieren, z.B. über n -dimensionale Kugeln und dergleichen.



Wie berechnet, ja wie definiert man überhaupt $\int_{\Omega} f(\vec{x}) d^n x$ für solche Integrationsbereiche Ω ?

Eine Antwort auf die erste Frage gibt der Satz von Fubini:

Satz (Fubini für Quader): Ist f stetig auf dem kompakten Quader $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$, so gilt

$$\int_Q f(\vec{x}) d^n x = \int_{a_n}^{b_n} \left[\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left[\dots \left[\int_{a_1}^{b_1} f(\vec{x}) dx_1 \right] dx_2 \right] \dots \right] dx_n$$

oder kurz

$$\int_Q f(\vec{x}) d^n x = \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

(“Mehrfachintegral”). Auf die Reihenfolge der einzelnen Integrationen kommt es dabei nicht an: ist $\tau : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ eine

Permutation,³ so gilt auch

$$\int_Q f(\vec{x}) d^n x = \int_{a_{\tau_n}}^{b_{\tau_n}} \dots \int_{a_{\tau_1}}^{b_{\tau_1}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{\tau_1} \dots dx_{\tau_n}.$$

□

Rasch ein kleines Beispiel: sei $Q = [0, 1] \times [1, 2] \subset \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 y$. Dann haben wir

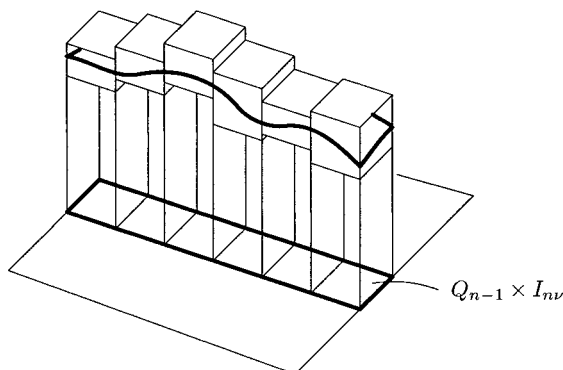
$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_1^2 x^2 y \, dx \, dy &= \int_1^2 \left[\frac{1}{3} x^3 y \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_1^2 \frac{1}{3} y \, dy \\ &= \frac{1}{6} [y^2]_1^2 = \frac{1}{6} (4 - 1) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

das müsste also auch herauskommen, wenn wir rechnen

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_1^2 x^2 y \, dy \, dx &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_{y=1}^{y=2} dx = \int_0^1 \frac{3}{2} x^2 \, dx \\ &= \frac{3}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

wie es sein soll.

ZUM BEWEIS DES SATZES VON FUBINI. Wir nehmen f in die Zange und betrachten eines der Teilintervalle $I_{n\nu}$ der Unterteilung von $[a_n, b_n]$.



Zum Beweis des Satzes von Fubini

Dann sehen wir schon, dass für festes $x_n \in I_{n\nu}$ die Funktion $\vec{\xi} \mapsto f(\vec{\xi}, x_n)$ auf $Q_{n-1} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{n-1}, b_{n-1}]$ auch in einer Zange Z_ν steckt und dass der Beitrag der “ $I_{n\nu}$ -Scheibe” zu $\mathcal{U}(Z)$ gerade $\mathcal{U}(Z_\nu) \cdot \text{Intervalllänge}(I_{n\nu})$ ist. Verfolgt man diesen Gedanken weiter, erhält man zuerst

$$\int_Q f(\vec{x}) d^n x = \int_{a_n}^{b_n} \left[\int_{Q_{n-1}} f(\vec{\xi}, x_n) d^{n-1} \xi \right] dx_n$$

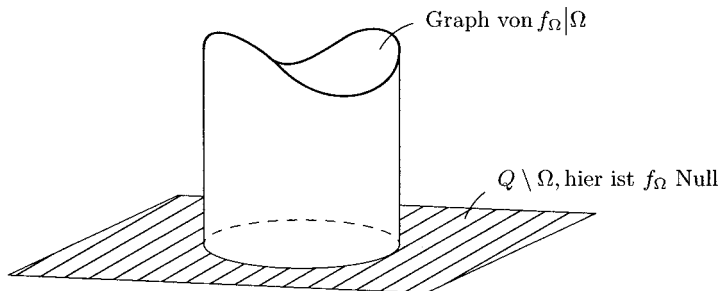
und daraus durch Induktion den Satz von Fubini. $\square$

Die Ausführung der Details erforderte natürlich noch Arbeit, der wir uns jetzt aber nicht stellen, vielmehr gehen wir gleich zum Problem der allgemeineren Integrationsbereiche $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ über.

Definition: Eine Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}^n$, soll Riemann-integrierbar **über eine beschränkte Teilmenge** $\Omega \subset B$ heißen, wenn für einen kompakten Quader $Q \supset \Omega$ die durch Nullsetzen außerhalb Ω definierte Funktion $f_\Omega : Q \rightarrow \mathbb{R}$ über Q Riemann-integrierbar ist, und wir schreiben dann

$$\int_\Omega f(\vec{x}) d^n x := \int_Q f_\Omega(\vec{x}) d^n x.$$

Offenbar hängt dann der Wert des Integrals nicht davon ab, welchen Quader man genommen hat: ist er unnötig groß, kommt wegen $f_\Omega|(Q \setminus \Omega) \equiv 0$ doch kein anderes Integral heraus.

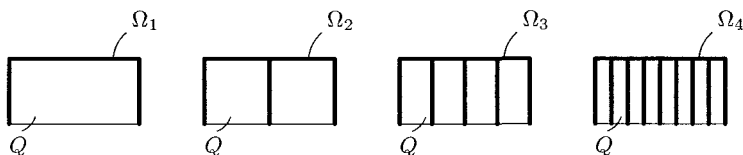


Der Graph von $f_\Omega : Q \rightarrow \mathbb{R}$

Das ist ja eine einfache und naheliegende Weise, die Integration über beliebige beschränkte Bereiche Ω auf die Integration über kompakte Quader zurückzuführen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ somit dem Zugriff der “Zangen” auszusetzen. Diese Funktionen $f_\Omega : Q \rightarrow \mathbb{R}$ sind aber im Allgemeinen *nicht stetig*, sie springen ja beim Verlassen von Ω abrupt auf den Wert Null.

Nun *braucht* eine Riemann-integrierbare Funktion auf einem Quader zum Glück nicht unbedingt stetig zu sein. Vielleicht genügt es zu fordern, dass f beschränkt und stetig auf Ω ist?

Leider nein! Selbst die konstante Funktion $1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x} \mapsto 1$ liefert bei genügend hässlichem Ω eine “sperrige” Funktion $1_\Omega : Q \rightarrow \mathbb{R}$ ab, wenn ich Ihnen $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ und $\Omega := \Omega_\infty := \bigcup_{i=1}^\infty \Omega_i$ so angebe:



Der Kamm $\Omega_k \subset Q$ erhält immer mehr Zinken, am Ende ist 1_{Ω_∞} zur Riemann-Integration zu sperrig geworden

dann wissen Sie schon, weshalb 1_{Ω_∞} nicht Riemann-integrierbar sein kann. Also schon die Frage, ob $\int_\Omega f d^n x$ überhaupt existiert, lässt sich aus einer netten Formel für $f(\vec{x})$ alleine nicht beantworten, man braucht eine Art Wohlverhalten von Ω , aber worin das bestehen soll, wissen wir noch nicht recht. — Aber *wenn* $\int_\Omega f d^n x = \int_Q f_\Omega d^n x$ existiert, dürfen wir dann $\int_Q f_\Omega d^n x$ als Mehrfachintegral wie beim Satz von Fubini ausrechnen? — Leider auch nicht! Dafür braucht man noch zusätzliches Wohlverhalten von f und Ω .

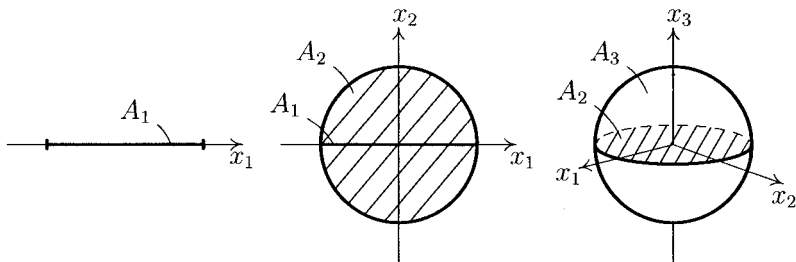
Diese Mitteilungen habe ich zur Schärfung Ihres Problembewusstseins gemacht. Jetzt kommt aber endlich die *gute* Nachricht. Für stetige Funktionen auf “stetig berandeten” kompakten Bereichen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist $\int_\Omega f(\vec{x}) d^n x$ jedenfalls vorhanden und kann als Mehrfachintegral berechnet werden. Genauer definieren wir induktiv:

Definition: Kompakte Intervalle $A_1 := [a_1, b_1]$ sollen “gut im $\mathbb{R}^1$ ” heißen. Ist $A_i \subset \mathbb{R}^i$ gut im $\mathbb{R}^i$, und sind $a_{i+1}, b_{i+1} : A_i \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und überall $a_{i+1} \leq b_{i+1}$, so soll

$$A_{i+1} := \{(\vec{\xi}, x_{i+1}) \in A_i \times \mathbb{R} \mid a_{i+1}(\vec{\xi}) \leq x_{i+1} \leq b_{i+1}(\vec{\xi})\}$$

gut im $\mathbb{R}^{i+1}$ heißen. □

Beispiel: Kugeln sind gut im $\mathbb{R}^n$.



Aufbau der Kugel mit stetigen Grenzen

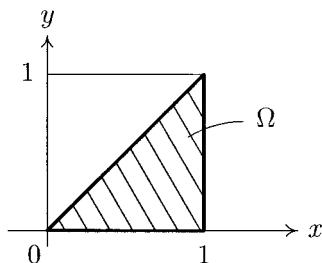
Starte mit $A_1 := [-r, r]$. Sei A_2 die gute Menge in $A_1 \times \mathbb{R}$ in den Grenzen $\pm\sqrt{r^2 - x^2}$ und A_3 die Menge der $(x, y, z) \in A_2 \times \mathbb{R}$ mit z zwischen $\pm\sqrt{r^2 - (x^2 + y^2)}$, das ist dann die Kugel $K_r^3(0)$.

Satz (Fubini): Ist die im $\mathbb{R}^n$ gute Menge $\Omega = A_n$ wie beschrieben mittels stetiger Funktion $a_{i+1}, b_{i+1} : A_i \rightarrow \mathbb{R}$ aufgebaut und f auf Ω stetig, so ist f über Ω integrierbar und es gilt

$$\int_{\Omega} f(\vec{x}) d^n x = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \cdots \int_{a_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{b_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1$$

Dasselbe gilt auch in anderer Reihenfolge der Variablen, und Integrale über kompliziertere Bereiche $\Omega \subset Q$ erschließt man, wenn möglich, daraus durch Unterteilung von Q in kleinere Quader $Q_1, \dots, Q_N$ mit guten $\Omega \cap Q_j$, $j = 1, \dots, N$. □

Rechnen wir rasch ein ganz kleines Beispiel: sei z.B. $f(x, y) = xy^2$.



Ein Dreieck als Integrationsbereich

Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(\vec{x}) \, d^2x &= \int_0^1 \int_0^x xy^2 \, dy \, dx = \int_0^1 \frac{1}{3} \left[xy^3 \right]_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{3} x^4 \, dx = \frac{1}{15} \left[x^5 \right]_0^1 = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Hinweis: Die Integration von vektorwertigen Abbildungen bietet nichts Neues, weil für $\vec{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ einfach

$$\int_{\Omega} \vec{f}(\vec{x}) d^n x := \left(\int_{\Omega} f_1(\vec{x}) d^n x, \dots, \int_{\Omega} f_k(\vec{x}) d^n x \right) \in \mathbb{R}^k$$

definiert wird — falls die rechte Seite vorhanden ist. □

7.3 Übungsaufgaben

Aufgabe R7.1: Aus einem Potential $V(x_1, x_2, x_3)$ erhält man das Kraftfeld $\vec{K}(\vec{x}) = (K_1(\vec{x}), K_2(\vec{x}), K_3(\vec{x}))$ durch

$$K_i(\vec{x}) := -\partial V / \partial x_i.$$

Berechnen Sie dieses Feld und die Größe

$$D(\vec{x}) := \frac{\partial K_1}{\partial x_1} + \frac{\partial K_2}{\partial x_2} + \frac{\partial K_3}{\partial x_3}$$

- a) für $V(\vec{x}) = f(r)$ und $\vec{x} \neq 0$, wobei $r := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ und f eine differenzierbare Funktion einer Variablen bezeichnet.
- b) speziell für $V(\vec{x}) = 1/\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ und $\vec{x} \neq 0$, sowie
- c) für $V(\vec{x}) = \sum_{i=1}^3 a_i x_i^2$.

Hinweis zur Notation: Die unterscheidende Notation für die Funktion V von drei Variablen und die Funktion f von einer Variablen würde in der physikalischen Lehrbuchliteratur als mathematische Pedanterie wirken, denn dort würde ein Potential, das nur von r abhängt, ohne weiteres mit $V(r)$ bezeichnet, ein f käme gar nicht vor. Man hat dann jeweils die Wahl, ob man $V(r)$ als die Funktion $r \mapsto V(r)$ lesen will, wie zum Beispiel wenn man $V'(r)$ bildet, oder als die Funktion $\vec{x} \mapsto V(r)$, wenn es um die partiellen Ableitungen geht. Dasselbe gilt dann natürlich auch für $V'(r)$ wieder. Das ist praktisch, weil man mit weniger Symbolen auskommt. Sie sollen mit dieser changierenden Notation umgehen können, auch wenn wenn sie für die Übernahme in die Mathematik weniger geeignet wäre.

Aufgabe R7.2: Die Potentialfunktion einer Kugel

$$r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq R$$

ist definiert durch

$$V(r) = \begin{cases} -2\pi R^2 + \frac{2\pi}{3}r^2 & \text{für } r < R \\ -\frac{4\pi R^3}{3r} & \text{für } r \geq R. \end{cases}$$

Berechnen Sie das Kraftfeld und die Größe D wie in Aufgabe R7.1 für $0 \leq r < R$ und $r > R$.

Aufgabe R7.3: Unter dem Schwerpunkt $\vec{s}$ eines Körpers versteht man das (vektorierte) Integral

$$\vec{s} = \frac{1}{M} \int_{\Omega} \mu(\vec{x}) \vec{x} d^3x$$

über das Volumen Ω des Körpers. Dabei ist $\mu(\vec{x})$ die Massendichte und $M = \int_{\Omega} \mu(\vec{x}) d^3x$ die Gesamtmasse. Berechnen Sie den Schwerpunkt

a) für einen Viertelkreis-Zylinder

$$\Omega := \{(x, y, z) \mid x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq a\},$$

b) einer vierseitigen geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche der Kantenlänge a und Höhe h ,

jeweils mit konstanter Massendichte.

Aufgabe R7.4: Unter dem Trägheitsmoment um die Achse eines Körpers versteht man das Integral

$$I = \int_{\Omega} \mu(\vec{x}) \rho^2(\vec{x}) d^3x.$$

Dabei ist $\rho(\vec{x})$ der senkrechte Abstand eines Punktes $\vec{x}$ von der Achse. Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Quaders mit den Kantenlängen a, b, c und konstanter Massendichte um eine Achse durch die Seitenmitten. Drücken Sie das Ergebnis durch die Gesamtmasse aus.

Aufgabe T7.1: Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion. Zu $\vec{x}_0 \in B$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ sei $\varepsilon > 0$ so klein gewählt, daß das Geradenstück $t \mapsto \vec{x}_0 + t\vec{v}$ für $-\varepsilon < t < \varepsilon$ ganz in B verläuft. Beweisen Sie

$$\left. \frac{d}{dt} f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) \right|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}_0) v_2$$

durch Berechnung des Limes des Differenzenquotienten.

Aufgabe T7.2: Es sei $\vec{v} : \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Vektorfeld auf einem kompakten Quader im $\mathbb{R}^n$. Es bezeichne $\mathcal{D}_i^\pm$ das $(n-1)$ -fache Integral der i -ten Komponente v_i von $\vec{v}$ über die i -te Vorder- bzw. Rückseite des Quaders, also z.B.

$$\mathcal{D}_1^+ = \int_{a_2}^{b_2} \cdots \int_{a_n}^{b_n} v_1(b_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \dots dx_2$$

usw. Beweisen Sie

$$\int_Q \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \right) d^n x = \sum_{i=1}^n (\mathcal{D}_i^+ - \mathcal{D}_i^-).$$

Aufgabe T7.3: Auf einem allgemeinen Rechteck $M \subset \mathbb{R}^2$ sei eine partiell differenzierbare Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, und es sei C eine Konstante mit $|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})| \leq C$ für $i = 1, 2$ und alle $\vec{x} \in M$. Beweisen Sie als Folgerung aus dem Mittelwertsatz, dass

$$|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| \leq 2C\|\vec{x} - \vec{x}_0\|$$

für alle $\vec{x}, \vec{x}_0 \in M$.

Aufgabe T7.4: Es sei $B \subset \mathbb{R}^n$ ein mit “stetigen Grenzen aufgebauter”, also für die Riemann-Integration geeigneter Definitionsbereich, und $f, g : B \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit $f(\vec{x}) < g(\vec{x})$ für alle $\vec{x} \in B$. Sei $\Omega := \{(\vec{x}, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(\vec{x}) \leq x_{n+1} \leq g(\vec{x})\}$ der zwischen den beiden Graphen gelegene Bereich. Zeigen Sie, dass das $(n + 1)$ -dimensionale Volumen $\int_{\Omega} d^{n+1}x$ existiert und gleich $\int_B (g(\vec{x}) - f(\vec{x})) d^n x$ ist.

Hinweis: Das Wort *Volumen* wird in zweierlei Sinn gebraucht. Ist wie in R7.3 und implizit auch in R7.4 vom Volumen Ω eines physikalischen Körpers im Raume die Rede, über das integriert wird, so ist damit der Bereich $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ gemeint, den der Körper einnimmt, im Unterschied etwa zu seiner Oberfläche. Anders in T7.4, dort ist eine Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ angegeben und ihr $(n + 1)$ -dimensionales Volumen, im Sinne von *Rauminhalt*, als das Integral $\int_{\Omega} 1 d^{n+1}x \in \mathbb{R}$ definiert, wofür man auch einfach $\int_{\Omega} d^{n+1}x$ schreibt.

8

Grundbegriffe der linearen Algebra

8.1 Lineare Abbildungen und Matrizen

Unsere Einführung in die Analysis ist an einem Punkt angekommen, wo es ohne lineare Algebra nicht mehr recht voran geht, und ich unterbreche daher den Analysiskurs für eine erste Bekanntschaft mit den Grundbegriffen der linearen Algebra, die wir sodann gleich beim weiteren Ausbau der Analysis nutzbringend einsetzen werden.

Bevor wir jetzt zusammen das Gebiet der linearen Algebra betreten, muss ich Sie in einer eigenartigen Benimm-Regel unterweisen: hier schreibt man nämlich die Elemente $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ nicht als Zeilen, sondern als *Spalten*

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

statt wie bisher in der Form $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Was der Sinn dieser Platzvergeudung sein soll, ist für Sie vorläufig nicht erkennbar. — Was man für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ unter der Summe $\vec{x} + \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und für $\lambda \in \mathbb{R}$ unter $\lambda \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ verstehen soll, ist wohl klar, ich schreibe es nur zum

Gewöhnen an die neue Notation nochmals hin:

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix},$$

so ist das gemeint.

Definition: Eine Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **linear**, wenn sie additiv und homogen ist, d.h. wenn

$$\begin{aligned} A(\vec{x} + \vec{y}) &= A(\vec{x}) + A(\vec{y}) \\ A(\lambda \vec{x}) &= \lambda A(\vec{x}) \end{aligned}$$

für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. □

Insbesondere bilden lineare Abbildungen stets Null auf Null ab, $A(0) = 0$. Beachte, dass wir die beiden Linearitätsbedingungen auch in eine kombinieren können, eine Abbildung A ist genau dann linear, wenn

$$A(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda A(\vec{x}) + \mu A(\vec{y})$$

für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt.

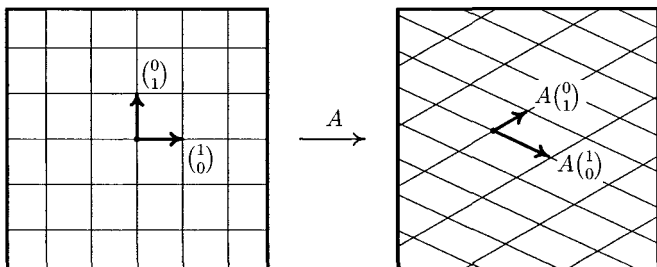
Um den Mechanismus der linearen Abbildungen zu verstehen, denken wir uns eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und betrachten zuerst die Bildvektoren $\vec{a}_1 := A(\vec{e}_1)$ und $\vec{a}_2 := A(\vec{e}_2)$ der beiden *Einheitsvektoren* $\vec{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^2$. Wenn wir nur diese beiden Bildvektoren kennen, dann kennen wir aber schon die ganze lineare Abbildung, denn es ist ja

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

also wegen der Linearität auch

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2,$$

und das ist nicht nur eine Anleitung zum Rechnen, sondern zeigt uns auch *anschaulich*, wie die Abbildung funktioniert.



Mechanismus linearer Abbildungen

Ja, so einfach ist das. Und ganz analog verhält es sich mit linearen Abbildungen $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zwischen Räumen beliebiger Dimensionen. Auch im $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir die **kanonischen Einheitsvektoren** mit $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n \in \mathbb{R}^n$, wobei also

$$\vec{e}_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ --- } i\text{-te Stelle}$$

gemeint ist. Ordnungsliebende Leser werden beanstanden, dass die Notation jetzt zwischen $\vec{e}_1 \in \mathbb{R}^2$ und $\vec{e}_1 \in \mathbb{R}^n$ nicht unterscheidet, sollten wir nicht besser $\vec{e}_1^{(2)}, \dots, \vec{e}_n^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ geschrieben haben? An sich schon, und wenn echte Verwechslungsgefahr im Anzuge ist, werden wir das auch tun. Für gewöhnlich vertrauen wir aber darauf, dass aus dem Kontext hervorgeht, *wessen* Einheitsvektoren gemeint sind, und dann ist $\vec{e}_i$ eben das "Tupel" mit einer Eins an der i -ten Stelle und sonst lauter Nullen. Für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt dann $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$, ganz wie im Falle $n = 2$, und damit beweisen wir:

Lemma: Zu beliebig vorgegebenen Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ existiert genau eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $A(\vec{e}_i) = \vec{a}_i$ für $i = 1, \dots, n$.

BEWEIS: Wenn es überhaupt so eine lineare Abbildung gibt, so muss sie wegen der Linearität $A(\vec{x}) = x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n$ erfüllen, also gibt es jedenfalls höchstens *eine* solche Abbildung. Um zu gegebenen $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ eine solche Abbildung zu *finden*, müssen wir natürlich $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ auch durch

$$A(\vec{x}) := x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n$$

definieren und hoffen, dass dieses A die gewünschten Eigenschaften hat — es bleibt gar nichts anderes übrig. Ist diese Abbildung linear? Offenbar additiv, offenbar homogen, klar. Bildet sie $\vec{e}_i$ auf $\vec{a}_i$ ab? Ja, denn für $\vec{x} = \vec{e}_i$ ist

$$x_j = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq i \\ 1 & \text{für } j = i, \end{cases}$$

also bleibt von der Summe nur der i -te Summand $1 \cdot \vec{a}_i = \vec{a}_i$ stehen, also $A(\vec{e}_i) = \vec{a}_i$. $\square$

Zum Arbeiten mit linearen Abbildungen $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ hat nun die lineare Algebra eine ganz besonders praktische Notation entwickelt, nämlich die sogenannte **Matrizenschreibweise**. Diese besteht darin, dass man den Ausdruck $A(\vec{x}) = x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n$ in der Form

$$A \cdot \vec{x} := \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \hline \end{array}$$

schreibt. Dabei ist jetzt A als eine rechteckige Tabelle, eine sogenannte **Matrix** geschrieben, deren n **Spalten** $\vec{a}_j \in \mathbb{R}^m$ jeweils m Komponenten haben, weshalb die Matrix aus n Spalten, aber

m **Zeilen** besteht, eine sogenannte $m \times n$ -**Matrix**. Der Vektor $\vec{x}$ steht rechts daneben als die einzelne Spalte mit n Komponenten, die er nun einmal ist. Der Multiplikationspunkt dazwischen, den man dann in der Praxis aber ebenso weglässt wie Sie ja auch einfach ab statt $a \cdot b$ schreiben, dieser Multiplikationspunkt soll Sie jetzt daran erinnern, dass der Gesamtausdruck aus Matrix A und danebenstehender Spalte $\vec{x}$ wirklich die **Anwendung** von A auf $\vec{x}$ bedeuten soll, also den Vektor $A(\vec{x}) = x_1 \vec{a}_1 + \cdots + x_n \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$.

Es hat sich in diesem Zusammenhang fest eingebürgert, die Komponenten der j -ten Spalte $\vec{a}_j$ als

$$\vec{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m,$$

zu indizieren, so dass also die Matrix aus diesen Spalten das Aussehen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

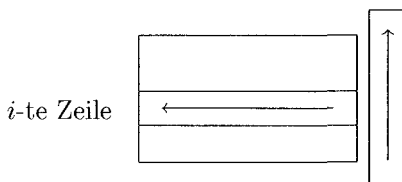
oder kurz auch $A = (a_{ij})_{i=1 \dots m, j=1 \dots n}$ oder noch kürzer $A = (a_{ij})$ gewinnt. Die Zahlen a_{ij} selbst heißen die **Komponenten** oder **Elemente** der Matrix. Der erste Index heißt der **Zeilenindex**, weil er angibt in welcher Zeile der Tabelle A das Element a_{ij} steht, der zweite dementsprechend der **Spaltenindex**.

Merke: Mit dieser Indizierung der Komponenten a_{ij} von A hat also der Bildvektor $\vec{y} = A\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ die Komponenten

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

Zur Berechnung der y_i denkt man sich also den “ $\vec{x}$ -Balken” auf die i -te Zeile der Matrix gelegt, dann multipliziert man übereinander-

liegende Zahlen und summiert die Produkte auf:



Zur Anwendung einer Matrix auf eine Spalte

Rasch ein kleines Beispiel:

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} = \vec{y}$$

Sie bemerken, dass ich schon die ganze Zeit die Matrix mit den Spalten $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^m$ und die lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, deren Bilder der Einheitsvektoren das sind, mit demselben Symbol A bezeichne, und das wird auch keine Missverständnisse erzeugen. Nach Vereinbarung ist ja eben $A_{\text{Matrix}} \cdot \vec{x} = A_{\text{Abbildung}}(\vec{x})$, nämlich beides ist $x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$.

Notiz und Definition (Matrizenaddition): Sind A und B zwei lineare Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, so ist auch

$$A + B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \vec{x} \mapsto A(\vec{x}) + B(\vec{x})$$

linear und die Matrix dieser Summenabbildung ist offenbar die komponentenweise gebildete Summe der Matrizen:

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix},$$

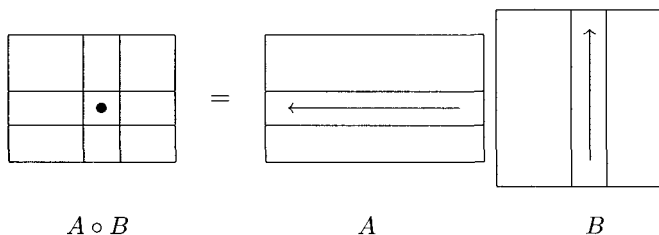
weil eben $A + B$ den Basisvektor $\vec{e}_j$ auf $\vec{a}_j + \vec{b}_j$ abbildet. □

Was aber geschieht bei der Verkettung $\mathbb{R}^n \xrightarrow{B} \mathbb{R}^m \xrightarrow{A} \mathbb{R}^p$ zweier linearer Abbildungen mit den Matrizen? Die Verkettung ist dann

natürlich ebenfalls linear, die j -te Spalte der Matrix $A \circ B$ ist der Vektor $A(B(\vec{e}_j)) \in \mathbb{R}^p$, und wegen

$$B(\vec{e}_j) = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}$$

erhält man also die Spalten der Matrix von $A \circ B$, indem man der Reihe nach die Matrix A auf die Spalten von B anwendet:



Aus der i -ten Zeile des ersten und der j -ten Spalte des zweiten Faktors komponiert man das (i, j) -te Element der Produktmatrix

So merkt man sich die Matrizenmultiplikation. Halten wir das Ergebnis auch in Formeln fest:

Bemerkung und Definition (Matrizenmultiplikation): Sind lineare Abbildungen $\mathbb{R}^n \xrightarrow{B} \mathbb{R}^m \xrightarrow{A} \mathbb{R}^p$ gegeben, so ist auch die Verkettung $C := A \circ B$ linear und hat die Matricelemente

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$

für $i = 1, \dots, p$ und $j = 1, \dots, n$. Man nennt C das **Produkt** der Matrizen A und B und schreibt einfach $C = AB$ statt $C = A \circ B$.

□

Hier ein kleines Beispiel. Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Diese Matrizen definieren lineare Abbildungen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, wir können daher sowohl $A \circ B$ als auch $B \circ A$ bilden und erhalten:

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Schon dieses einfache Beispiel zeigt uns, dass wir beim Rechnen mit Matrizen nicht genau dieselben Gesetze wie beim Rechnen mit Zahlen erwarten dürfen. Auch wenn sich von zwei Matrizen A und B beide Produkte bilden lassen, weil beides $n \times n$ -Matrizen sind, dann ist im Allgemeinen $AB \neq BA$, im Unterschied zur Multiplikation von Zahlen, wo immer $ab = ba$ gilt, und wenn ein Matrizenprodukt AB die Nullmatrix ergibt, so braucht weder A noch B die Nullmatrix gewesen zu sein, während ein Produkt ab von Zahlen nur Null ist, wenn einer der Faktoren Null ist.

Auf der anderen Seite gibt es aber auch wichtige Gemeinsamkeiten von Zahlenmultiplikation und Matrizenmultiplikation. So gelten für die Matrizenmultiplikation auch die *Distributivgesetze* $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$ und $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$, wovon man sich ganz leicht überzeugt, auch ist die Matrizenmultiplikation *assoziativ*, wie man sagt, d.h. es gilt $(AB)C = A(BC)$, weil das ja offenbar für die Verkettung so ist, und schließlich gibt es auch eine $n \times n$ -Matrix, die bei der Multiplikation die neutrale Rolle der Eins übernimmt:

Definition: Die Matrix der Identität $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto \vec{x}$, nennt man die n -dimensionale **Einheitsmatrix** und bezeichnet sie mit E oder, wenn die Dimension wichtig aber nicht zu erraten ist, mit E_n , also

$$E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Ihre Komponenten werden aber trotzdem nicht mit e_{ij} , sondern mit dem sogenannten **Kronecker-Symbol**

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bezeichnet. □

Offenbar muss $AE = A$ und $EB = B$ sein, wenn man die Produkte überhaupt bilden kann, weil ja die Verkettung mit der Identität nichts Neues ergibt. Sie können das übungshalber auch aus der Produktformel ausrechnen: in der Summe

$$(AE)_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \delta_{kj}$$

bleibt von den m Summanden, weil das Kronecker-Symbol meistens Null ist, nur der j -te Summand übrig, und der ist $a_{ij} \delta_{jj} = a_{ij}$, also ist $AE = A$, und analog für $EB = B$.

Wir können jetzt auch den Zweck der platzverschwendenden Schreibweise von n -tupeln $\vec{x}$ als Spalten einsehen, es handelt sich um eine Konzession an die Matrizenrechnung. Als ‘Tabelle’ ist ein als Spalte geschriebenes n -tupel $\vec{x}$ ja nichts anderes als eine $n \times 1$ -Matrix, und wenn Sie genau hinsehen, so bemerken Sie, dass dann die $m \times 1$ -Matrix $A\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ wirklich das Matrizenprodukt der $m \times n$ -Matrix A mit der $n \times 1$ -Matrix $\vec{x}$ ist.

Diese Einbeziehung der Vektoren des $\mathbb{R}^n$ in die Matrizenrechnung erweist sich oft als sehr praktisch, was uns aber nicht zu hindern braucht, außerhalb der Matrizenrechnung doch wieder zur bequemen Zeilenschreibweise für n -tupel überzugehen.

8.2 Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$

Zu sagen, die Schauplätze der linearen Algebra seien die Räume $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ist zwar nicht ganz falsch, aber oft spielt sich das eigentliche Geschehen auf sogenannten *Untervektorräumen* ab.¹

Definition: Eine Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein **Untervektorraum** von $\mathbb{R}^n$, wenn $0 \in U$ ist und wenn für alle $\vec{v}, \vec{w} \in U$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ auch $\lambda\vec{v} + \mu\vec{w} \in U$ gilt. □

Ist die Forderung $0 \in U$ nicht vielleicht überflüssig, weil wir in $\lambda \vec{v} + \mu \vec{w} \in U$ doch sowieso auch $\lambda = \mu = 0$ setzen dürfen? Ist sie nicht, denn sonst würde U auch *leer* sein dürfen, und das wollen wir nicht zulassen, den Nullvektor muss jeder Untervektorraum schon mindestens enthalten. In der Tat *ist* $U := \{0\}$ auch ein Beispiel eines Untervektorraums, das einfachste.

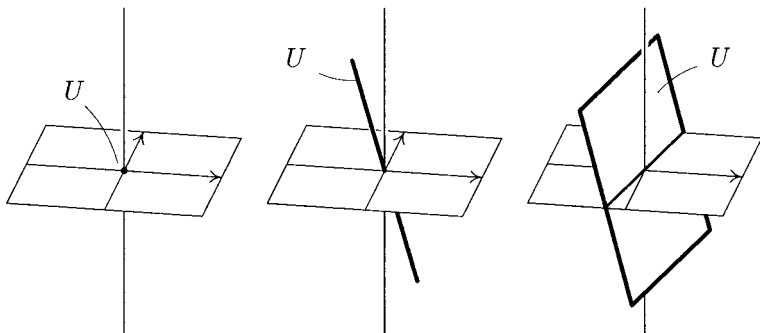
Definition: Sind $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r \in \mathbb{R}^n$ beliebige Vektoren, so bezeichne

$$\text{Lin}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r) := \{\lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_r \vec{v}_r \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

deren **lineare Hülle**, wie man sagt, die Menge der **Linearkombinationen** von $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$. Diese Definition wird noch durch die Konvention $\text{Lin}(\emptyset) = \{0\}$ ergänzt, die lineare Hülle aus gar keinen Vektoren soll aus dem Nullvektor bestehen. $\square$

Auch andere Notationen für die lineare Hülle sind im Gebrauch, z.B. $\text{span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r)$, weil sie manchmal auch die von $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r$ *aufgespannte* Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ genannt wird.

Ersichtlich ist jede lineare Hülle ein Untervektorraum, und somit haben wir jetzt viele Beispiele von Untervektorräumen. Anschauung bietet uns der $\mathbb{R}^3$, außer dem Nullraum $\text{Lin}(\emptyset) = \{0\}$ und dem $\mathbb{R}^3 = \text{Lin}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ selbst sehen wir auch die Geraden $\text{Lin}(\vec{v})$ durch den Nullpunkt, für $\vec{v} \neq 0$, und die Ebenen $\text{Lin}(\vec{v}, \vec{w})$ durch den Nullpunkt, wobei hier $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ zwei Vektoren bezeichnen, die nicht derselben Geraden durch den Nullpunkt angehören.



$U = \{0\}$

U eine Gerade durch 0

U eine Ebene durch 0

Tatsächlich gibt es gar keine anderen Untervektorräume im $\mathbb{R}^3$, was zwar jetzt eine beweisbedürftige Behauptung ist, deren Richtigkeit sich aber bald als kleines Nebenresultat unseres weiteren Voranschreitens in der linearen Algebra mit ergeben wird.

Jede lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ führt zwei wichtige Untervektorräume mit sich, nämlich ihr *Bild* und ihren *Kern*. Natürlich ist $\text{Bild } A := A(\mathbb{R}^n) = \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^m$, denn $A(0) = 0$ und $\lambda A\vec{x} + \mu A\vec{y} = A(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) \in \text{Bild } A$ wegen der Linearität von A .

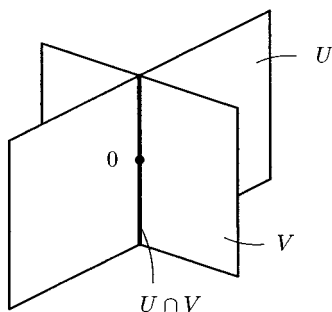
Notiz und Definition: Ist $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear, so heißt der Untervektorraum

$$\text{Kern } A := A^{-1}(0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = 0\}$$

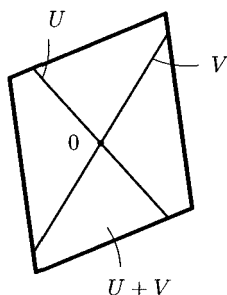
von $\mathbb{R}^n$ der **Kern von A** . □

Offensichtlich ist der Kern wirklich ein Untervektorraum, wieder wegen $A(0) = 0$ und $A(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda A(\vec{v}) + \mu A(\vec{w})$.

Oft hat man es mit zwei Untervektorräumen U und V desselben $\mathbb{R}^n$ zu tun. Der Durchschnitt $U \cap V$ ist dann offensichtlich auch ein Untervektorraum, und ebenso — nicht die Vereinigung, sondern — die sogenannte *Summe* $U + V$ der beiden Untervektorräume:



Durchschnitt



Summe

Definition: Sind $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ irgendwelche Teilmengen, so heißt

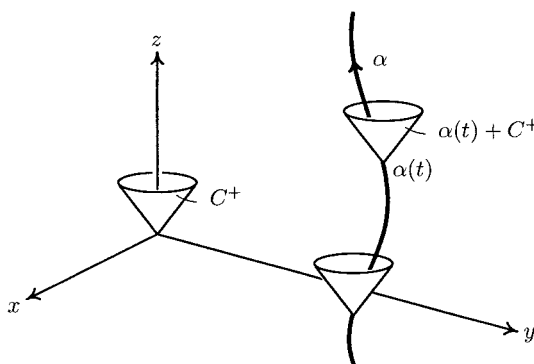
$$X + Y := \{\vec{x} + \vec{y} \mid \vec{x} \in X, \vec{y} \in Y\}$$

die **Summe** von X und Y . □

Obgleich man also die Summe von ganz beliebigen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ bilden kann, findet die lineare Algebra diese Summenbildung vor allem in drei Situationen interessant.

Erstens braucht man die schon erwähnte Summe $U + V$ von Untervektorräumen des $\mathbb{R}^n$.

Zweitens ist die Notation praktisch, wenn eine der Mengen nur aus einem Punkt besteht, etwa $X = \{\vec{x}\}$. Dann ist $\{\vec{x}\} + Y \subset \mathbb{R}^n$ die Teilmenge, die aus Y durch Translation um den Vektor $\vec{x}$ entsteht, wir schreiben einfach $\vec{x} + Y$:



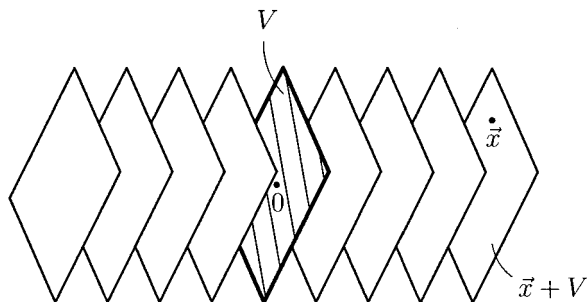
Der positive Halbkegel

$$C^+ := \{(x, y, z) \mid z > \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

wird hier von einer Kurve mitgeführt: zu jedem Zeitpunkt t betrachtet man die Menge $\alpha(t) + C^+$

Von besonderem Interesse ist aber auch hierbei der Fall, dass die verschobene Menge Y ein Untervektorraum $V \subset \mathbb{R}^n$ ist. Man nennt

$\vec{x} + V$ dann einen zu V gehörigen **affinen Teilraum** von $\mathbb{R}^n$ oder eine **Nebenklasse** von V . Anschaulich leicht vorzustellen:



Die Nebenklassen von V

Verschiedene Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ können unter Umständen dieselbe Nebenklasse hervorbringen, es ist eben $\vec{x} + V = \vec{y} + V$ genau dann, wenn $\vec{y} - \vec{x} \in V$, und insbesondere ist $\vec{v} + V$ für $\vec{v} \in V$ nichts anderes als V selbst. Diese Nebenklassen eines festen Untervektorraums nun sind das dritte Beispiel interessanter Mengensummanden in der linearen Algebra. Weil V ein Untervektorraum ist, gilt natürlich einfach

$$(\vec{x} + V) + (\vec{y} + V) = (\vec{x} + \vec{y}) + V,$$

was unscheinbar genug aussieht, aber das mathematisch Besondere daran ist, dass diese Addition nicht nur eine Art “Nullvektor” hat, nämlich V selbst, welches wegen $(\vec{x} + V) + V = \vec{x} + V$ *additiv neutral* ist, wie man sagt, sondern auch durch Subtraktion (Addition des Negativen) wieder rückgängig gemacht werden kann:

$$((\vec{x} + V) + (\vec{y} + V)) + (-\vec{y} + V) = \vec{x} + V.$$

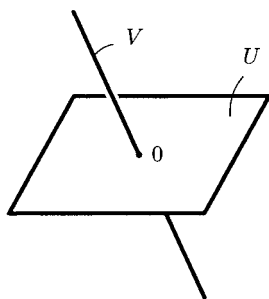
Das ist wirklich eine Besonderheit der Nebenklassensituation, keineswegs gilt $X + Y - Y = X$ allgemein beim Rechnen mit Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, für beliebige Untervektorräume U und V ist zum Beispiel $U + V - V = U + V$, jaja.

Auf einem anderen Blatt steht freilich, wozu man das braucht, und diese an sich berechnete Frage würde uns jetzt zu weit weg führen². Aber doch sollen Sie von dieser Plauderei etwas mitnehmen. Was haben Sie bisher schon einmal addiert? Zwei Zahlen, zwei Vektoren, zwei Funktionen. Jetzt zwei Nebenklassen! Die moderne Mathematik ist voll von futuristisch anmutenden Objekten, die auch zum Gegenstand sinnvoller algebraischer Operationen gemacht werden können.

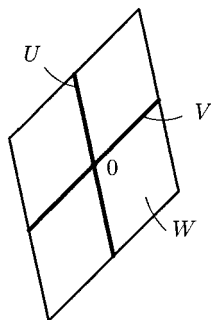
Kehren wir nun zu den Untervektorräumen zurück. Sind $U, V \subset \mathbb{R}^n$ Untervektorräume mit dem Durchschnitt $\{0\}$, so nennt man die Summe $U + V$ eine **direkte Summe** und schreibt

$$U + V =: U \oplus V \quad \text{falls } U \cap V = \{0\}$$

Das Besondere an der direkten Summe besteht darin, dass sich dann jeder Vektor $\vec{x} \in U \oplus V$ in genau *einer* Weise als Summe $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ mit $\vec{u} \in U$, $\vec{v} \in V$ schreiben lässt, denn aus $\vec{u}_1 + \vec{v}_1 = \vec{u}_2 + \vec{v}_2$ mit $\vec{u}_i \in U$ und $\vec{v}_i \in V$ folgt $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \in U \cap V = \{0\}$ und daher $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ und $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$.



Hier $U \oplus V = \mathbb{R}^3$,



hier $U \oplus V = W \subset \mathbb{R}^3$

Definition: Zwei Untervektorräume $U, V \subset W$ in einem dritten heißen **komplementäre Untervektorräume von W** , wenn $U \cap V = \{0\}$ und $U + V = W$ gilt, d.h. wenn $W = U \oplus V$ ist. $\square$

Das einfachste Beispiel komplementärer Untervektorräume stellen die beiden Koordinatenachsen im $\mathbb{R}^2$ dar.

8.3 Lineare Abbildungen zwischen Untervektorräumen

Definition: Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ Untervektorräume. Eine Abbildung $\varphi : U \rightarrow V$ heißt linear, wenn sie eben additiv und homogen ist, d.h. wenn

$$\varphi(\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) = \lambda \varphi(\vec{u}_1) + \mu \varphi(\vec{u}_2)$$

für alle $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt. $\square$

Die Matrizen $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sind hier als der Spezialfall $U = \mathbb{R}^n$, $V = \mathbb{R}^m$ mit eingeschlossen. Wie in diesem Spezialfall haben wir auch für beliebige lineare Abbildungen $\varphi : U \rightarrow V$ die Begriffe **Kern** und **Bild**, nämlich wieder als Kern $\varphi := \{\vec{u} \in U \mid \varphi(\vec{u}) = 0\} = \varphi^{-1}(0) \subset U$ und Bild $\varphi := \varphi(U) \subset V$ definiert, und beide sind wiederum Untervektorräume. Kern und Bild sagen nicht alles über eine lineare Abbildung, aber viel. Eines ist, dass der Kern die Information darüber enthält, ob φ injektiv ist oder nicht, denn $\varphi(\vec{u}) = \varphi(\vec{u}')$ bedeutet wegen der Linearität von φ soviel wie $\varphi(\vec{u} - \vec{u}') = 0$, also:

Notiz: Eine lineare Abbildung $\varphi : U \rightarrow V$ ist genau dann injektiv, wenn Kern $\varphi = \{0\}$ ist. $\square$

Das ist in der linearen Algebra auch immer der bequemste Weg, die Injektivität einer linearen Abbildung zu überprüfen. Gehen Sie nie auf die Definition zurück, sondern schauen Sie gleich auf den Kern.

Denken wir uns nun eine lineare Abbildung $\varphi : U \rightarrow V$ und einen festen Vektor $\vec{v} \in V$ und fragen nach den Vektoren $\vec{u} \in U$, welche die Gleichung

$$\varphi(\vec{u}) = \vec{v}$$

erfüllen. Im Matrizenfalle $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ fragt man so zu gegebenem $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ nach den ‘unbekannten’ Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, welche $A\vec{x} = \vec{b}$, also das sogenannte **inhomogene lineare Gleichungssystem**

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

erfüllen. Man nennt dann natürlich $A\vec{x} = 0$ das **zugehörige homogene lineare Gleichungssystem**, und allgemeiner, über den Matrizenfall hinaus, kann man von $\varphi(\vec{u}) = \vec{v}$ und $\varphi(\vec{u}) = 0$ als von einer inhomogenen und der zugehörigen homogenen Gleichung für $\vec{u}$ sprechen.

In dieser Sprechweise ist der Kern von φ definitionsgemäß nichts anderes als die Gesamtheit der Lösungen der homogenen Gleichung, $\varphi(\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \in \text{Kern } \varphi$, und das Bild von φ entscheidet darüber, ob die inhomogene Gleichung $\varphi(\vec{u}) = \vec{v}$ überhaupt lösbar ist, denn das bedeutet ja gerade $\vec{v} \in \text{Bild } \varphi$. Ist es der Fall und $\vec{u}_0$ eine *einzelne* Lösung der inhomogenen Gleichung $\varphi(\vec{u}) = \vec{v} \in V$, so ist $\vec{u}_0 + \text{Kern } \varphi$ die *allgemeine* Lösung der inhomogenen Gleichung, genauer:

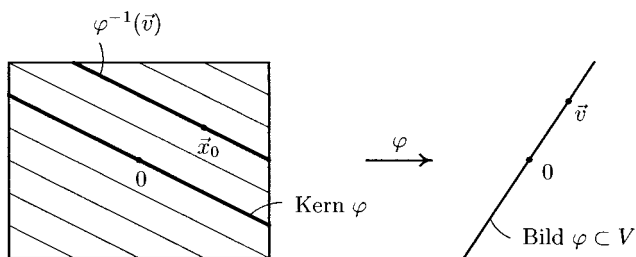
Notiz: Ist $\varphi(\vec{u}_0) = \vec{v}$, so gilt $\varphi(\vec{u}) = \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \in \vec{u}_0 + \text{Kern } \varphi$ oder

$$\varphi^{-1}(\vec{v}) = \vec{u}_0 + \text{Kern } \varphi,$$

denn $\varphi(\vec{u}) = \vec{v} \Leftrightarrow \varphi(\vec{u}) = \varphi(\vec{u}_0) \Leftrightarrow \varphi(\vec{u} - \vec{u}_0) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} - \vec{u}_0 \in \text{Kern } \varphi \Leftrightarrow \vec{u} \in \vec{u}_0 + \text{Kern } \varphi$. $\square$

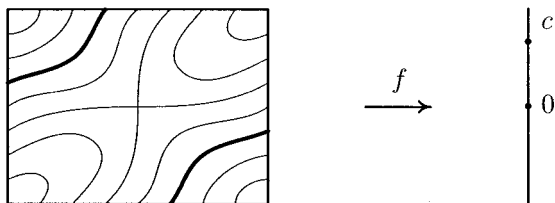
Erinnert Sie das an die Verhältnisse bei den Lösungen der homogenen und inhomogenen linearen Differentialgleichungen? Das soll es auch.

Die “Niveaumengen” $\varphi^{-1}(\vec{v})$, für $\vec{v} \in \text{Bild } \varphi$, einer linearen Abbildung, also die $\varphi^{-1}(\vec{v})$ für $\vec{v} \in \text{Bild } \varphi$, liegen im Definitionsbereich U ganz übersichtlich nebeneinander:



Die Niveaumengen gehen alle durch Translation aus dem Untervektorraum $\text{Kern } \varphi$ hervor.

Denken Sie zum Vergleich an die komplizierten Muster, welche die Niveaumengen *nichtlinearer* Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bilden können, mit denen wir es in der Analysis zu tun haben.



Niveaumengen einer nichtlinearen Abbildung

Um wichtige Eigenschaften gewisser linearer Abbildungen bezeichnen zu können, erweitern wir unseren Vorrat an Fachausdrücken ein wenig. Dazu muss ich etwas weiter ausholen und zunächst von Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ zwischen beliebigen Mengen X und Y sprechen.

Wie Sie schon wissen, nennt man eine Abbildung *injektiv*, wenn verschiedene Punkte in X stets auch verschiedene Bildpunkte haben, wenn aus $x \neq x'$ also $f(x) \neq f(x')$ folgt. Ist das Bild von f ganz Y , gibt es also zu jedem $y \in Y$ mindestens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$, so heißt f eine *surjektive* Abbildung, und die Abbildungen, wel-

che injektiv und surjektiv zugleich sind, nennt man **bijektiv**. Die bijektiven Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ sind gerade diejenigen, für die durch die Abbildungsvorschrift $f(x) \mapsto x$ wirklich eine Abbildung $Y \rightarrow X$ erklärt ist — ohne Injektivität wäre die Vorschrift gar nicht eindeutig, ohne Surjektivität würde nicht jedem $y \in Y$ etwas zugeordnet — und diese **Umkehrabbildung** oder **inverse Abbildung** bezeichnet man dann natürlich durch $f^{-1} : Y \rightarrow X$.

Das ist die Terminologie der bloßen Mengenlehre. Sie erinnern sich, dass ich in der Analysis einer Variablen reellwertige Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ schon umkehrbar genannt hatte, wenn sie nur injektiv waren, die Umkehrfunktion ist dann freilich nur auf $f(D)$ erklärt. Das ist eine bewusste kleine Abweichung von der Sprache der Mengenlehre gewesen. Zwar wollte ich, dass Sie begrifflich zwischen Funktionen und deren Einschränkungen auf kleinere Definitionsbereiche unterscheiden lernen, weil sich beim Einschränken analytische Eigenschaften ändern können, vielleicht ist $f|_{D_0}$ stetig, f selbst aber nicht, vielleicht hat $f|_{D_0}$ ein absolutes Maximum, f selbst aber nicht usw. Aber eine Unterscheidung zwischen der Sinusfunktion als Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oder als Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ usw. wollte ich dort nicht einführen, das lohnt im Kontext der Infinitesimalrechnung nicht den Notationsaufwand, wir haben deshalb alle reellwertigen Funktionen pauschal als Zuordnungen der Art $D \rightarrow \mathbb{R}$ notiert. Wenn ich aber gleichwohl das Recht behalten will, z.B. vom Logarithmus als der Umkehrfunktion der Exponentialfunktion, von den Arcusfunktionen als von Umkehrfunktionen eingeschränkter trigonometrischer Funktionen zu sprechen, so kann ich der Sprache der Mengenlehre in puncto Umkehrung nicht folgen, und das ist auch ganz in Ordnung wenn wir, wie geschehen, unseren Gebrauch des Wortes genau definieren.

In der linearen Algebra jedoch, wie auch sonst meist in der Mathematik, wird man eine nicht bijektive Abbildung auch nicht umkehrbar nennen. Anders als bei den Funktionen der Infinitesimalrechnung hat man in der linearen Algebra nicht immer mit derselben Zielmenge $\mathbb{R}$ zu tun, und zu den Daten einer linearen Abbildung $f : U \rightarrow V$ gehört hier nicht nur der Originalraum U als Definitionsbereich und die Zuordnung, sondern immer auch der Zielraum V .

In der Mengenlehre heißen zwei Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow X$ **invers zueinander**, wenn $g \circ f = \text{Id}_X$ und $f \circ g = \text{Id}_Y$ ist. Ersichtlich sind dann beide bijektiv und es gilt $g = f^{-1}$ und $f = g^{-1}$, und für jede bijektive Abbildung f sind auch wirklich f und f^{-1} invers zueinander.

Solange es sich um bloße Mengen handelt, ist also Bijektivität und Existenz des Inversen dasselbe. Kommt man aber aus der Mengenlehre in ein Gebiet der realen Mathematik, so sind dort nicht die Abbildungen per se, sondern Abbildungen mit besonderen Eigenschaften von Interesse, zum Beispiel *stetige Abbildungen* oder *C^1 -Abbildungen* oder eben *lineare Abbildungen*. Wichtiger als die bloße Bijektivität von f ist einem dann die Existenz einer dazu inversen Abbildung *derselben Art*. Nicht jede stetige Bijektion hat auch ein stetiges Inverses, wie wir am Beispiel $[0, 2\pi) \rightarrow S^1$ schon gesehen haben, die stetigen Bijektionen mit stetigen Inversen sind deshalb kostbarer, sie führen eine eigene Benennung, man nennt sie **Homöomorphismen**. In der linearen Algebra haben wir aber Glück:

Notiz und Definition: Bijektive lineare Abbildungen $\varphi : U \rightarrow V$ haben stets lineare Inversen. Bijektive lineare Abbildungen heißen **Isomorphismen**, man notiert sie auch als

$$\varphi : U \xrightarrow{\cong} V$$

oder $\varphi : U \cong V$. Zwei Untervektorräume $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ heißen **isomorph zueinander** oder kurz **isomorph**, geschrieben $U \cong V$, wenn es einen Isomorphismus $\varphi : U \cong V$ gibt. $\square$

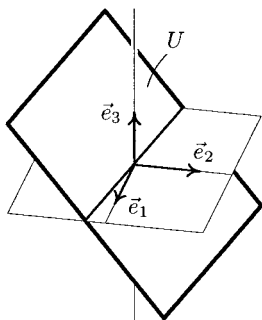
Sie können der ‘Morphismensprache’ oft in der Mathematik begegnen, Mathematiker nennen lineare Abbildungen gern *Homomorphismen*, injektive Homomorphismen heißen dann *Monomorphismen*, surjektive *Epimorphismen*, und die Homomorphismen von V nach V nennt man die *Endomorphismen* von V . Wir kommen aber einstweilen mit dem Wort *Isomorphismen* aus.

Bei allem, was wir hier bisher über lineare Abbildungen gesagt haben, hätte die Beschränkung auf den Matrizenfall, also auf $U = \mathbb{R}^n$

und $V = \mathbb{R}^m$, gar keine Vereinfachung gebracht. Trotzdem werden Sie eine Schwierigkeit der allgemeineren Situation sehen, die sich, fürchten Sie vielleicht, noch zu einer rechten Kalamität auswachsen mag: wie rechnet man denn konkret mit Untervektorräumen und deren linearen Abbildungen? Im Matrizenfall haben wir die schöne Rechenformel

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j,$$

die ich direkt in den Computer eingeben kann, wobei die Spalten $\vec{a}_j$ die Bilder der Einheitsvektoren $\vec{e}_j$ sind. Aber wie soll man denn $\varphi : U \rightarrow V$ ausrechnen, wenn die Einheitsvektoren gar keine Bilder *haben*, weil sie vielleicht nicht in U liegen?



$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \notin U$: was nun ?

Wenn Sie solche Fragen stellen, dann sind Sie in der richtigen Verfassung das nächste Kapitel zu lesen, denn dort werde ich diese Fragen beantworten. Etwas schwerer habe ich es mit Lesern, die schon zu wissen glauben, wie man das macht und deshalb argwöhnen, ich wolle ihnen etwas verkaufen, was sie gar nicht brauchen. Für diese Leser hier noch ein bisschen *sales talk*.

Eine lineare Abbildung $\varphi : U \rightarrow V$, wenn U ein Untervektorraum in $\mathbb{R}^n$ und V einer in $\mathbb{R}^m$ ist, denken Sie, beschreibe ich wieder durch eine geeignete $m \times n$ -Matrix. Schließlich sollen ja jedenfalls n -tupel linear in m -tupel verwandelt werden, dazu brauche ich eine $m \times n$ -Matrix. Ich werde also $\vec{v} = \varphi(\vec{u})$ konkret durch $\vec{v} = A\vec{u}$

verwirklichen. Was schadet es, dass die Einheitsvektoren vielleicht nicht in U liegen? Ich wende A eben einfach nur auf Vektoren $\vec{u} \in U$ an, wenn es denn um eine Abbildung von U nach V geht.

So denken Sie, und ich kann nicht einmal behaupten, das ginge nicht. Es ist prinzipiell möglich, φ so zu beschreiben. Manchmal macht man es auch so, besonders wenn ursprünglich schon eine Matrix $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ da war und dann das Interesse an gewissen Untervektorräumen mit $A(U) \subset V$ dazu kam und zur Betrachtung der *Einschränkung* $\varphi := A|U : U \rightarrow V$ führte. Und ich gehe noch einen Schritt auf Sie zu und räume ein, dass es unter Umständen sogar zweckmäßig sein kann, auch zu einer linearen Abbildung $\varphi : U \rightarrow V$ ganz anderer Herkunft eine Matrix $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zu konstruieren, die φ als $A|U$ darstellt.

Sie sollen aber auch hören, was *dagegen* spricht, es immer so zu machen. Denken Sie sich U und V als die linearen Hüllen einiger weniger Vektoren, sagen wir, um die Vorstellung zu fixieren, jeweils *eines* Vektors: $U = \text{Lin}(\vec{u}_0)$ und $V = \text{Lin}(\vec{v}_0)$, wobei $\vec{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{v}_0 \in \mathbb{R}^m$ vom Nullvektor verschieden seien. Anschaulich bedeutet das, U und V sind Geraden durch den jeweiligen Nullpunkt. Sei $\varphi : U \rightarrow V$ nun eine lineare Abbildung.

Dann ist $\varphi(\vec{u}_0) = a\vec{v}_0$, weil jeder Vektor in V ein Vielfaches von $\vec{v}_0$ ist. Diese eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ enthält jetzt die ganze Information über φ , denn jedes $\vec{u} \in U$ lässt sich als $\vec{u} = \lambda\vec{u}_0$ schreiben, und wegen der Linearität von φ ist $\varphi(\lambda\vec{u}_0) = a\lambda\vec{v}_0$.

Denken Sie nun an den Fall $n = m = 1000$. Ihre $m \times n$ -Matrix A hätte dann eine Million Einträge. Zur Beschreibung eines Objekts φ , das sich durch eine einzige Zahl a charakterisieren lässt! Urteilen Sie selbst.

Ähnlich wenn U und V nicht Geraden, sondern zum Beispiel Ebenen sind. Eine lineare Abbildung lässt sich dann immer durch vier Zahlen, nämlich durch eine 2×2 -Matrix charakterisieren, an der man auch die Eigenschaften von φ leicht ablesen kann, wie im nächsten Kapitel erklärt wird. In Ihrer darstellenden 1000×1000 -Matrix A dagegen sind diese Eigenschaften geradezu versteckt!

Das ist auch kein Wunder, denn A enthielte ganz viel Informationsmüll, nämlich sämtliche Angaben darüber, was mit den Vektoren außerhalb von U geschehen soll, die uns ja eigentlich gar nicht interessieren. Und umgekehrt, wenn Sie so eine Matrix A konstruieren,

ieren, müssen Sie über das Schicksal dieser Vektoren außerhalb U Entscheidungen treffen, denn durch φ alleine ist es nicht festgelegt, A ist durch φ nicht eindeutig bestimmt.

Was Sie überhaupt zu dem Griff nach einer $m \times n$ -Matrix A verleitet, ist natürlich die n - bzw. m -Tupeligkeit der Vektoren in U und V . Aber gerade diese Tupeligkeit ist ein schlechter Ratgeber in der linearen Algebra der Untervektorräume. Was Sie ohne Bezugnahme darauf verstehen lernen, nur auf der Untervektorraumeigenschaft ($0 \in U$ und $\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2$ wieder in U) und der Linearität von $\varphi : U \rightarrow V$ fußend, das hat auch dann noch Bestand, wenn später U und V allgemeine Vektorräume sind, deren Vektoren gar keine Tupel, sondern vielleicht Funktionen oder so etwas sind.

Und so hoffe ich, dass Sie den linear-algebraischen Methoden nicht nur vorurteilsfrei, sondern mit einer positiven Einstellung begegnen werden.

8.4 Übungsaufgaben

Aufgabe R8.1: Bestimmen Sie die Matrizen A_ϕ , B_ϕ , C_ϕ der linearen Abbildungen des $\mathbb{R}^3$ in sich, die jeweils eine Drehung um die x -, y - bzw. z -Achse um den Winkel ϕ in entgegengesetztem Uhrzeigersinn beschreiben (Rechte-Hand-Regel für die Reihenfolge x, y, z bzw. y, z, x bzw. z, x, y der Achsen). Zeigen Sie $A_\alpha A_\beta = A_\beta A_\alpha = A_{\alpha+\beta}$ durch direktes Nachrechnen. Berechnen Sie die Matrizen $A_{\pi/2} B_{\pi/2}$, $B_{\pi/2} A_{\pi/2}$ und $C_{\pi/2} B_{\pi/2} A_{\pi/2}$.

Aufgabe R8.2: Bestimmen Sie den Durchschnitt $W = U \cap V$ der beiden Untervektorräume $U = \{\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$ und $V = \{\mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2 \mid \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}\}$ des $\mathbb{R}^3$, die durch die Vektoren $\vec{u}_1 = (0, 0, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, 0)$, $\vec{v}_1 = (0, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, 1)$ aufgespannt werden.

Aufgabe R8.3: Ein Neutron mit der Masse m und der Geschwindigkeit $\vec{v}_0$ treffe auf einen ruhenden Atomkern, der das Neutron einfängt und anschließend in zwei Kerne der Masse M_1, M_2 mit den Geschwindigkeiten $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ zerfällt. Welche Bedingung müssen die gemessenen Geschwindigkeiten $\vec{w}_i$ erfüllen, damit man mit Hilfe des Impulssatzes die unbekannten Massen M_i daraus bestimmen

kann, wann gibt es eine Lösung und wann ist die Lösung eindeutig bestimmt?

Aufgabe R8.4: Bestimmen Sie die 4×4 -Matrix $\Lambda(v)$, die als lineare Abbildung durch die Lorentz-Transformation $\Lambda(v)\vec{x} := \vec{x}'$ mit $x'_0 = (x_0 - \beta x_1)\gamma$, $x'_1 = (x_1 - \beta x_0)\gamma$, $x'_2 = x_2$, $x'_3 = x_3$ gegeben ist. Dabei ist $x_0 = ct$ die Zeitkoordinate, c die Lichtgeschwindigkeit, $\beta = v/c \in (-1, 1)$, $\gamma := 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Zeigen Sie, dass die Hintereinanderausführung $\Lambda(v_2)\Lambda(v_1)$ zweier Lorentz-Transformationen wieder eine Lorentz-Transformation $\Lambda(v_3)$ ist. Berechnen Sie v_3 .

Aufgabe T8.1: Sei A eine $m \times n$ -Matrix. Addiere, für vorgegebene $i \neq j$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, zur i -ten Spalte das λ -fache der j -ten. Zeigen Sie, daß die so abgeänderte Matrix $\tilde{A}$ als Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ noch dasselbe Bild wie A hat.

Aufgabe T8.2: Sei A eine $m \times n$ -Matrix. Addiere, für vorgegebene $i \neq j$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, zur i -ten Zeile das λ -fache der j -ten. Zeigen Sie, dass die so abgeänderte Matrix $\tilde{A}$ als Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ noch denselben Kern wie A hat.

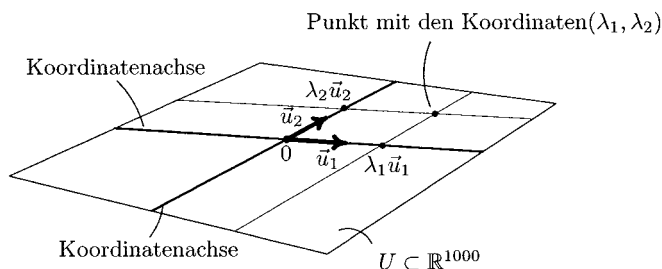
Aufgabe T8.3: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum. Eine lineare Abbildung $P : U \rightarrow U$ heißt eine *Projektion*, wenn $P \circ P = P$ ist.

- Zeigen Sie, dass für jede Projektion $U = \text{Kern } P \oplus \text{Bild } P$ gilt.
- Gibt es umgekehrt zu jeder Zerlegung $U = U_1 \oplus U_2$ eine Projektion $P : U \rightarrow U$ mit $\text{Kern } P = U_1$ und $\text{Bild } P = U_2$?

9 Basen und Dimensionen

9.1 Der Begriff der Basis

Eine *Basis* eines Untervektorraums $U \subset \mathbb{R}^n$ verhilft uns zu Koordinaten in U . — Nanu, ist U koordinatenbedürftig? Hat nicht jeder Vektor $\vec{u} \in U$ schon n Komponenten $u_1, \dots, u_n$, eben seine Koordinaten im $\mathbb{R}^n$? — Das sind die Koordinaten, die wir jetzt nach Möglichkeit einmal ignorieren wollen. Zur Ortsbestimmung auf einer Ebene im $\mathbb{R}^{1000}$ sollten wir nur *zwei* Zahlenangaben brauchen, nicht tausend.



Koordinaten bezüglich einer Basis $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$

Um zu erklären, was eine Basis ist, muß ich zuvor einen anderen, in der linearen Algebra allgegenwärtigen Grundbegriff erläutern, nämlich den der *linearen Unabhängigkeit*:

Definition: Ein r -tupel $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ von Vektoren $\vec{u}_i \in U$ heißt **linear unabhängig**, wenn keiner dieser Vektoren aus den anderen linearkombiniert werden kann oder, was dasselbe bedeutet, wenn

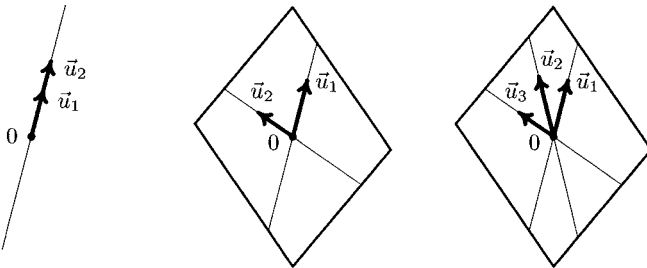
$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_r \vec{u}_r = 0$$

nur in dem trivialen Falle $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ möglich ist. $\square$

Man sagt wohl auch etwas lax: “die Vektoren $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r$ sind linear unabhängig”, obwohl die lineare Unabhängigkeit offenbar eine Eigenschaft des r -tupels $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ ist, nicht der einzelnen Vektoren.

Die Standardformulierung für den Nachweis, dass ein vorgegebenes r -tupel $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ von Vektoren linear unabhängig ist, beginnt mit den Worten: “Sei also $\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_r \vec{u}_r = 0$. Dann gilt ...”, und nun folgt die mathematische Argumentation, unter Ausnutzung dessen, was man über $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ eben weiß, die zu dem Ergebnis führt: “... , daher ist $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$, was zu zeigen war.”

Ein “1-tupel” $(\vec{u}_1)$ ist offenbar genau dann linear unabhängig, wenn $\vec{u}_1 \neq 0$ ist. Ein Paar $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ ist linear unabhängig, wenn weder $\vec{u}_1 = \lambda \vec{u}_2$ noch $\vec{u}_2 = \mu \vec{u}_1$ geschrieben werden kann.



$(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ lin. abh.

$(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ lin. unabh.

$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ lin. abh.

Merke auch: ein Nullvektor im r -tupel verdirbt die lineare Unabhängigkeit auf jeden Fall.

Definition: Ein linear unabhängiges r -tupel $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ von Vektoren in U heißt eine **Basis** von U , wenn seine lineare Hülle ganz U ist. $\square$

Das ist kurz und bündig gesprochen. Die nachfolgende ausführlichere Fassung lässt besser erkennen, welchem Zweck die Basen dienen sollen:

Lemma und Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum. Ein r -tupel $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ von Vektoren $\vec{u}_i \in U$ ist genau dann eine Basis von U , wenn sich jeder Vektor $\vec{u} \in U$ in eindeutiger Weise als

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_r \vec{u}_r, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

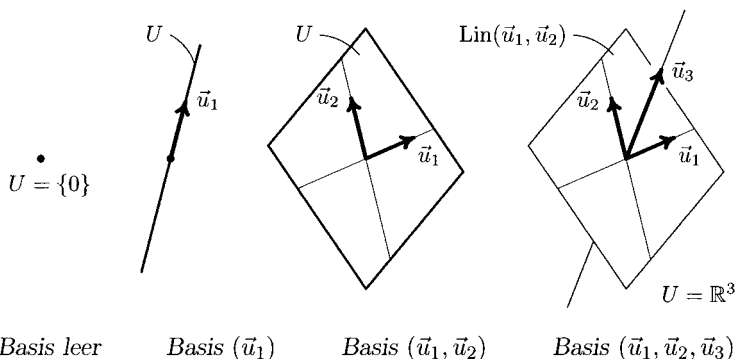
schreiben lässt. Man nennt diese Darstellung von $\vec{u}$ die **Entwicklung** von $\vec{u}$ nach der Basis, die λ_i heißen die **Entwicklungskoeffizienten** oder **Koordinaten** von $\vec{u}$ bezüglich der Basis.

BEWEIS: “ $\Rightarrow$ ”: Sei also $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ eine Basis von U . Dann ist insbesondere $\text{Lin}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r) = U$, also läßt sich jedes $\vec{u}$ jedenfalls so schreiben. Noch zu zeigen: die Koeffizienten sind eindeutig bestimmt. Dazu: wenn

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_r \vec{u}_r = \mu_1 \vec{u}_1 + \dots + \mu_r \vec{u}_r$$

gilt, so folgt $(\lambda_1 - \mu_1)\vec{u}_1 + \dots + (\lambda_r - \mu_r)\vec{u}_r = 0$, und daraus, wegen der linearen Unabhängigkeit der Basis, folgt weiterhin $\lambda_1 - \mu_1 = \dots = \lambda_r - \mu_r = 0$, also $\lambda_i = \mu_i$ für alle $i = 1, \dots, r$. “ $\Rightarrow$ ” $\square$

“ $\Leftarrow$ ”: Sei also jedes $\vec{u}$ eindeutig als $\sum \lambda_i \vec{u}_i$ darstellbar. Jedenfalls ist dann $\text{Lin}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r) = U$, und wegen der vorausgesetzten Eindeutigkeit sind insbesondere die Koeffizienten für die Entwicklung des Nullvektors eindeutig bestimmt, also ist $0 = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_r \vec{u}_r$ nur für $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ möglich, und damit ist gezeigt, dass $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ eine Basis ist. “ $\Leftarrow$ ” $\square$



Die Basis $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ des $\mathbb{R}^n$ nennt man seine **Standard-Basis**. In dem Lemma in 8.1 hatten wir gesehen, wie durch beliebiges Vorgeben der Bilder dieser Basisvektoren eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bestimmt ist. Dieses Lemma können wir jetzt verallgemeinern:

Lemma: Ist $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ eine Basis von $U \subset \mathbb{R}^n$ und sind $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r$ beliebige Vektoren eines Untervektorraums V des $\mathbb{R}^m$, so gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi : U \rightarrow V$ mit $\varphi(\vec{u}_i) = \vec{a}_i$ für $i = 1, \dots, r$.

Der BEWEIS verläuft genau so wie dort: die Formel

$$\varphi(\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_r \vec{u}_r) = \lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_r \vec{a}_r$$

spricht für den Eindeutigkeitsbeweis eine notwendige Bedingung an φ aus, welches also eindeutig festgelegt ist, und ist für den Existenzbeweis die definierende Formel. ... □

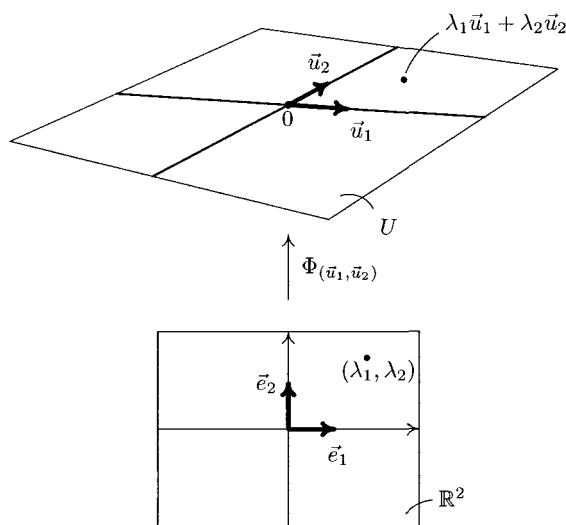
Hat man einen Untervektorraum U zu *bestimmen*, z.B. den Kern einer Matrix $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, so hat man die Aufgabe zwar gelöst, wenn man genügend viele Vektoren $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r$ darin gefunden hat, um den Untervektorraum aufzuspannen. Aber auf etwaige “linear überflüssige” unter diesen r Vektoren wird man gern verzichten, schon um das Resultat übersichtlicher zu gestalten.

Das Wegstreichen von Vektoren, die sich sowieso aus den übrig bleibenden linearkombinieren lassen, befriedigt aber nicht nur ein

mathematisch-ästhetisches Bedürfnis, wie wir jetzt sehen, denn wir behalten schließlich offenbar eine *Basis* des Untervektorraumes U übrig, was wirkliche technische Vorteile hat, wir können beliebige Vektoren in U eindeutig nach der Basis entwickeln, können lineare Abbildungen von U in andere Räume nach Wunsch konstruieren und dergleichen. In der Tat versteht man die Aufgabe, ein homogenes lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = 0$ zu *lösen*, in der Praxis als die Suche nach einer *Basis* des Lösungsraumes Kern A .

Gleichzeitig stiftet eine Basis $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ von U eine ganz bestimmte Beziehung zwischen U und $\mathbb{R}^r$, für die wir jetzt einen Namen und eine Notation einführen wollen:

Definition: Ist $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ eine Basis von U , so wollen wir den Isomorphismus $\mathbb{R}^r \cong U$, welcher $\vec{e}_i$ auf $\vec{u}_i$ abbildet, **Basis-Isomorphismus** zu $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ nennen und mit $\Phi_{(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)} : \mathbb{R}^r \cong U$ bezeichnen. $\square$



Was der Basis-Isomorphismus tut

Der Basisisomorphismus bildet also $\vec{x} \in \mathbb{R}^r$ auf $x_1 \vec{u}_1 + \dots + x_r \vec{u}_r \in U$ ab, und sein Inverses ist offenbar gerade jene nach obigem Lemma wohlbestimmte lineare Abbildung $U \rightarrow \mathbb{R}^r$, die jeweils $\vec{u}_i$ auf $\vec{e}_i$

und deshalb $\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_r \vec{u}_r$ auf sein Koordinaten- r -tupel $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ abbildet.

Die Notation Φ für den Basisisomorphismus erinnert Sie daran, dass $\vec{x} \in \mathbb{R}^r$ und $\Phi(\vec{x}) = \vec{u} \in U$ durchaus in zwei ganz verschiedenen Vektorräumen wohnen, zwischen denen zu vermitteln eine *Abbildung* gebraucht wird, und der Index in $\Phi_{(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)}$, den zu schreiben ich Sie nötige, spricht laut aus, dass es von der Wahl der Basis eben abhängt, welche Koordinaten ein Vektor $\vec{u}$ bekommt. So empfinden Sie den Basisisomorphismus nicht ganz zu Unrecht zunächst als eine didaktische Zwangsmaßnahme, was eine natürliche Abwehrhaltung hervorruft, das weiß ich schon.

Ich hoffe aber, sie werden die Basisisomorphismen noch zu schätzen lernen. Solange Sie nämlich nur mit einer *festen* Basis zu tun haben, rechnet es sich mit den Koordinaten- r -tupeln wie mit Vektoren im $\mathbb{R}^r$, und das sind sie ja auch, man vergisst vielleicht, dass hier eine Abbildung im Spiel ist. Aber Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$, ebenso wie die späteren allgemeinen Vektorräume,¹ haben meist keine Standard-Basis. Basen werden mehr oder weniger willkürlich gewählt, und unvermeidlich muss man zuweilen zu einer anderen Basis, d.h. einem anderen Koordinatensystem übergehen. Dann haben Sie mit ‘alten’ und ‘neuen’ Koordinaten zu tun und sollen wissen, wie sich die in den alten Koordinaten beschriebenen linear-algebraischen Objekte in die neuen Koordinaten umrechnen. Das kann auf den ersten Blick ziemlich chaotisch aussehen. Holen Sie dann die Basisisomorphismen hervor und schauen dankbar zu, wie die ganz von alleine alles aufräumen und entwirren.

Einstweilen benutzen wir die Basisisomorphismen einmal dazu, lineare Abbildungen zwischen Untervektorräumen durch angemessenen *kleine* Matrizen zu beschreiben.

Definition: Ist $\varphi : U \rightarrow V$ eine lineare Abbildung und sind $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ und $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s)$ Basen von U und V , so heißt die durch

$$\Phi_{(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s)}^{-1} \circ \varphi \circ \Phi_{(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)} =: A$$

gegebene $s \times r$ -Matrix $A : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^s$ die **Matrix** von φ **bezüglich** dieser Basen. □

Solche Formeln merken sich Mathematiker durch sogenannte *kommutative Diagramme*, Mitteldinge zwischen Formel und Zeichnung. Hier ist es das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & V \\ \Phi(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r) \uparrow \cong & & \cong \uparrow \Phi(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s) \\ \mathbb{R}^r & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^s \end{array}$$

Der Ausdruck **kommutativ** bezieht sich darauf, dass A gerade so definiert ist, dass die beiden möglichen Verkettungen, die von links unten nach rechts oben führen, übereinstimmen:

$$\Phi_{V\text{-Basis}} \circ A = \varphi \circ \Phi_{U\text{-Basis}}.$$

Solche Diagramme als Merk- und Übersichtshilfen benutzt man in der modernen Mathematik sehr oft. Die visuelle Veranschaulichung durch das Diagramm erlaubt es uns, statt der Formel uns nur zu merken: holt man φ mittels der Basisisomorphismen herunter, so erhält man die Matrix A . Daraus ergibt sich die Formel ganz von selbst.

Auch aus der Entwicklung der Basisbilder $\varphi(\vec{u}_i)$ nach der Basis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s$ im Zielraum kann man die Matrix A rekonstruieren, wenn das auch nicht so einprägsam ist.

Bemerkung: In der obigen Situation gilt die Formel

$$\varphi(\vec{u}_j) = \sum_{i=1}^s a_{ij} \vec{v}_i$$

BEWEIS: Jedenfalls ist ja die j -te Spalte $\vec{a}_j$ der Matrix nichts anderes als

$$A(\vec{e}_j^{(r)}) = \vec{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{sj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^s a_{ij} \vec{e}_i^{(s)}$$

Wenden wir darauf den Basisisomorphismus $\Phi_{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s}$ an, so ergibt sich (schau' auf's Diagramm!) $\varphi(\vec{u}_j) = \sum_{i=1}^s a_{ij} \vec{v}_i$, was zu zeigen war. $\square$

Die Sache hat bis jetzt nur noch einen Schönheitsfehler: woher nehmen wir die Basen? Gibt es überhaupt immer Basen? Davon handelt der nächste Abschnitt.

9.2 Basisergänzungssatz und Dimensionsbegriff

Der Schlüssel zur Existenz von maßgeschneiderten Basen aller Art ist die folgende einfache Beobachtung:

Ergänzungslemma: *Es sei*

$$\text{Lin}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s) = U$$

und $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ zwar linear unabhängig, aber keine Basis von U . Dann ist $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_i)$ für mindestens eines der i mit $1 \leq i \leq s$ linear unabhängig.

BEWEIS: Sprechen wir von $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ als von einer *Basis im Aufbau* und von den $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s$ als von den *Vorratsvektoren*, mit denen wir an der Basis weiterbauen sollen. Es muß einen Vorratsvektor $\vec{v}_i$ geben, der aus den $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r$ nicht linearkombinierbar ist, denn sonst wäre doch $\text{Lin}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ schon ganz U . Prüfen wir die lineare Unabhängigkeit von $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_i)$. Aus $\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_r \vec{u}_r + \lambda \vec{v}_i = 0$ würde zunächst $\lambda = 0$ folgen (sonst $\vec{v}_i = -\frac{1}{\lambda}(\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_r \vec{u}_r)$), und dann also wegen der linearen Unabhängigkeit der $\vec{u}$'s auch $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$. $\square$

Als Korollar erhalten wir daraus sofort den

Basisergänzungssatz: *Gilt $\text{Lin}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s) = U$, und ist $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ linear unabhängig, so läßt sich $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ aus den Vorratsvektoren zu einer Basis $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_p})$ von U ergänzen.*

BEWEIS: Ist $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ schon eine Basis, so denken wir uns $p = 0$, wir brauchen dann eben keine Ergänzung, so ist das gemeint. Andernfalls wenden wir einfach das Ergänzungslemma so oft an, bis es nicht mehr geht. $\square$

Die Anzahl der Vektoren in einer Basis nennt man die *Länge* der Basis.

Korollar: Je zwei Basen eines Untervektorraums $U \subset \mathbb{R}^n$ haben die gleiche Länge.

BEWEIS: Angenommen es gäbe Basen $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ und $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s)$ von U mit $r \neq s$, oBdA $r < s$. Wirf $\vec{u}_1$ hinaus und ergänze $(\vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r)$ durch ein $\vec{v}_{i_1}$ zu einem linear unabhängigen r -tupel $(\vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_{i_1})$, nach dem Ergänzungslemma. Dann ist auch dieses neue r -tupel eine Basis. Um das einzusehen, denken wir daran, dass jedenfalls $\vec{v}_{i_1} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_r \vec{u}_r$ mit geeigneten Koeffizienten gelten muss, weil $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ eine Basis war, und dabei ist $\lambda_1 \neq 0$, sonst wäre ja $\vec{v}_{i_1}$ Linearkombination der $\vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r$. Also lässt sich das hinausgeworfene $\vec{u}_1$ aus $(\vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_{i_1})$ linearkombinieren, nämlich als $\vec{u}_1 = \frac{1}{\lambda_1}(\vec{v}_{i_1} - \lambda_2 \vec{u}_2 - \dots - \lambda_r \vec{u}_r)$. Damit ist aus $(\vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_{i_1})$ alles linearkombinierbar, was aus $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r$ linearkombinierbar war, also ganz U , und daher ist's eine Basis. So weit so gut.

Ersetze nun sukzessive auch die anderen $\vec{u}_i$ durch Vektoren aus $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s\}$. Dann wäre $(\vec{v}_{i_1}, \dots, \vec{v}_{i_r})$ eine Basis, was aber wegen $r < s$ nicht sein kann, weil sonst mindestens ein $\vec{v}_j$ aus den übrigen linearkombinierbar wäre. Widerspruch. $\square$

Satz und Definition (Dimension): In jedem Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^n$ lässt sich eine Basis finden. Die (nach obigen Korollar wohlbestimmte) Länge einer Basis von U heißt die **Dimension** $\dim U$ von U .

BEWEIS: Ist $U = \{0\}$, so sagen wir U habe die *leere* Basis, und $\dim U = 0$. Sei also $U \neq \{0\}$. Angenommen U hätte keine Basis. Wähle $\vec{u}_1 \neq 0$ in U als Induktionsbeginn der Konstruktion einer Folge $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots$ von Vektoren in U , bei der stets $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_i)$ linear unabhängig ist. Ist nämlich $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_i)$ linear unabhängig, so gibt es, weil U keine Basis hat, ein $\vec{u}_{i+1} \in U$, das sich *nicht* aus

$\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_i$ linearkombinieren lässt. Dann ist das ergänzte $(i+1)$ -tupel $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i+1})$ also auch linear unabhängig, und das war schon der Induktionsschluss.

Nun nutzen wir $U \subset \mathbb{R}^n$ aus! Da insbesondere $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n+1})$ linear unabhängig ist, lässt es sich durch Vorratsvektoren aus der Standardbasis $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ des $\mathbb{R}^n$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^n$ ergänzen, deren Länge dann $\geq n+1$ wäre, im Widerspruch zur Wohlbestimmtheit der Basislänge. $\square$

Sie werden sehen, wie viele linear-algebraische Türen sich Ihnen öffnen, wenn Sie Dimensionsbegriff und Basisergänzungssatz am Schlüsselbund haben. Notieren wir einige Folgerungen.

Bemerkung 1: Zwei Untervektorräume U und V von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ sind genau dann isomorph, wenn sie gleiche Dimension haben.

BEWEIS: “ $\Rightarrow$ ”: Ist $\varphi : U \rightarrow V$ ein Isomorphismus und $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ eine Basis von U , so offenbar $(\varphi(\vec{u}_1), \dots, \varphi(\vec{u}_r))$ eine Basis von V , also $\dim V = r$. “ $\Rightarrow$ ” $\square$

“ $\Leftarrow$ ”: Wähle Basen $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ von U und $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r)$ von V . Sei $\varphi : U \rightarrow V$ die lineare Abbildung mit $\varphi(\vec{u}_i) = \vec{v}_i$, und analog $\psi : V \rightarrow U$ mit $\psi(\vec{v}_i) = \vec{u}_i$. Dann $\varphi \circ \psi = \text{Id}_V$, $\psi \circ \varphi = \text{Id}_U$, also φ Isomorphismus. $\square$

Bis auf Isomorphismus, wie man sagt, gibt es demnach nur einen r -dimensionalen Untervektorraum eines $\mathbb{R}^n$. Hast du einen gesehen, hast du alle gesehen? Na ja, gewissermaßen schon, *bis auf Isomorphismus* eben. — Als Korollar aus der Bemerkung 1 wollen wir auch festhalten:

Korollar: Jede invertierbare Matrix ist quadratisch. $\square$

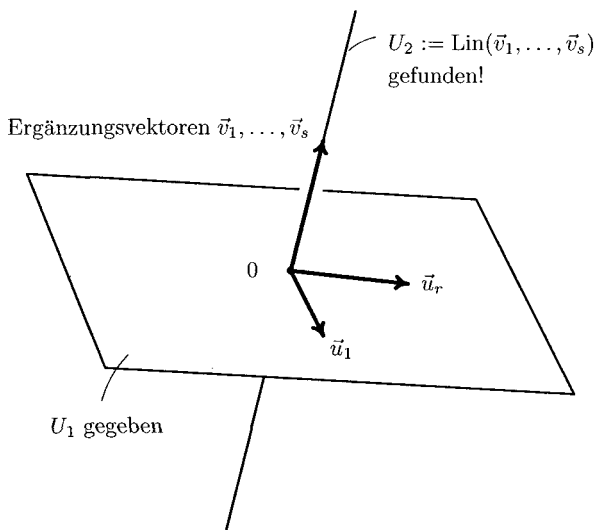
Denn eine invertierbare $m \times n$ -Matrix ist ja als Abbildung ein Isomorphismus $A : \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$, also $n = \dim \mathbb{R}^n = \dim \mathbb{R}^m = m$.

Bemerkung 2: Zu jedem Untervektorraum $U_1 \subset U$ eines Untervektorraums $U \subset \mathbb{R}^n$ lässt sich ein komplementärer Untervektorraum U_2 finden.

BEWEIS: Ergänze einfach eine Basis $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ von U_1 zu einer Basis $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s)$ von U (jede beliebige Basis von U liefert dafür genug Vorratsvektoren) und setze

$$U_2 := \text{Lin}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s).$$

Dann ist jedenfalls $U_1 + U_2 = U$, aber auch $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Denn jedes $\vec{u} \in U_1 \cap U_2$ lässt sich sowohl als $\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_r \vec{u}_r$ wie auch als $\vec{u} = \mu_1 \vec{v}_1 + \dots + \mu_s \vec{v}_s$ schreiben. Dann ist aber $\vec{u} - \vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_r \vec{u}_r - \mu_1 \vec{v}_1 - \dots - \mu_s \vec{v}_s = 0$ und daher, wegen der linearen Unabhängigkeit von $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s)$, sind alle λ 's und μ 's Null, also $\vec{u} = 0$. Damit ist $U_1 \oplus U_2 = U$ gezeigt. $\square$



Wahl eines Komplementärtraums

Bemerkung 3: Ist $U \subset V$ und $\dim U = \dim V$, dann ist $U = V$.

BEWEIS: Jede Basis $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ in U ist automatisch Basis von V , denn Ergänzung würde sonst $\dim V > \dim U$ zeigen. $\square$

Man sieht dieser unscheinbaren Bemerkung nicht gleich an wie nützlich sie ist. Hat man $U = V$ zu zeigen, muss man eigentlich $U \subset V$

und $V \subset U$ nachprüfen (jedes $\vec{u}$ in V , jedes $\vec{v}$ in U), und in der Praxis ist oft das eine leicht und das andere schwer. Wenn Sie aber die Dimensionsinformation haben, dann beweisen Sie nur die ‘leichtere’ Inklusion und sagen dann einfach: $U \subset V$, aus Dimensionsgründen also $U = V$. Hört sich außerdem gut an, *aus Dimensionsgründen*, echt cool. — Die Information über die Dimension müssen Sie freilich haben. Eine der Quellen für solche Informationen ist die

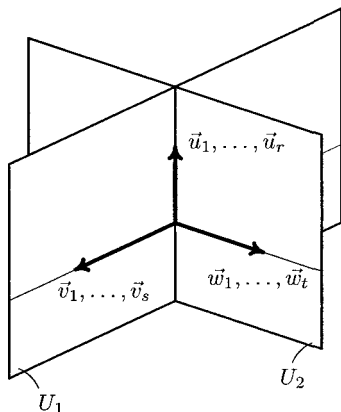
Dimensionsformel für Untervektorräume: Sind $U_1, U_2 \subset U$ Untervektorräume, so gilt

$$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$$

BEWEIS: Ergänze eine Basis $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r$ des Durchschnitts $U_1 \cap U_2$ zuerst zu einer Basis $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s)$ von U_1 und sodann zu einer Basis $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_t)$ von U_2 . Wir wären fertig wenn wir zeigen könnten, dass $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_t)$ eine Basis von $U_1 + U_2$ ist, denn dann kennen wir auch die letzte der vier beteiligten Dimensionen und die Behauptung ist

$$r + (r + s + t) = (r + s) + (r + t),$$

also richtig.



Zum Beweis der Dimensionsformel für Untervektorräume

Ersichtlich spannen die Vektoren die Summe $U_1 + U_2$ auf, wir haben nur noch ihre lineare Unabhängigkeit zu zeigen, und das tun wir in der typischen Formulierung: Sei also

$$\lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_r \vec{u}_r + \mu_1 \vec{v}_1 + \cdots + \mu_s \vec{v}_s + \nu_1 \vec{w}_1 + \cdots + \nu_t \vec{w}_t = 0.$$

Schreiben wir zur Abkürzung

$$\begin{aligned}\vec{u} &:= \lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_r \vec{u}_r \\ \vec{v} &:= \mu_1 \vec{v}_1 + \cdots + \mu_s \vec{v}_s \\ \vec{w} &:= \nu_1 \vec{w}_1 + \cdots + \nu_t \vec{w}_t.\end{aligned}$$

Dann ist $\vec{w} \in U_2$ sowieso, aber auch $\vec{w} = -\vec{u} - \vec{v} \in U_1$, also ist $\vec{w} \in U_1 \cap U_2$ und daher $\vec{w} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \cdots + \alpha_r \vec{u}_r$, woraus nun aber

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \cdots + \alpha_r \vec{u}_r - \nu_1 \vec{w}_1 - \cdots - \nu_t \vec{w}_t = \vec{w} - \vec{w} = 0$$

folgt. Also sind alle α 's und alle ν 's wegen der linearen Unabhängigkeit von $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_t)$ gleich Null, insbesondere $\vec{w} = 0$, und damit auch $\vec{u} + \vec{v} = 0$, und wegen der linearen Unabhängigkeit von $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s)$ verschwinden deshalb auch alle λ 's und alle μ 's, was zu zeigen war. $\square$

9.3 Der Rang

Definition: Ist $\varphi : U \rightarrow V$ eine lineare Abbildung, so nennt man

$$\text{rg } \varphi := \dim \text{Bild } \varphi$$

den **Rang** von φ . Insbesondere ist der Rang einer $m \times n$ -Matrix $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ die Dimension des Untervektorraums $\text{Bild } A \subset \mathbb{R}^m$.

Bemerkung 4: Der Rang einer Matrix ist dasselbe wie die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten.

BEWEIS: $\text{Bild } A$ ist die lineare Hülle der Spalten. Nach dem Basisergänzungssatz gibt es also eine aus Spalten bestehende Basis von $\text{Bild } A$, also *gibt* es mindestens so viele linear unabhängige Spalten wie $\text{rg } A = \dim \text{Bild } A$ angibt; aber auch nicht mehr, sonst gäbe es ja eine längere Basis. $\square$

Dimensionsformel für lineare Abbildungen: Ist $\varphi : U \rightarrow V$ linear, so gilt

$$\operatorname{rg} \varphi + \dim \operatorname{Kern} \varphi = \dim U$$

BEWEIS: Wähle einen Komplementärraum zu $U_1 := \operatorname{Kern} \varphi \subset U$, also einen Untervektorraum $U_2 \subset U$ mit $U_1 \oplus U_2 = U$. Dann ist $\varphi|_{U_2} : U_2 \rightarrow \varphi(U)$ ein Isomorphismus, denn $\varphi|_{U_2}$ ist injektiv, weil $U_2 \cap \operatorname{Kern} \varphi = \{0\}$ ist, aber auch surjektiv, denn da U_1 der Kern von φ ist, gilt $\varphi(U_2) = \varphi(U_1 + U_2)$, und das ist $\varphi(U)$. Damit ist aber $\operatorname{rg} \varphi = \dim \operatorname{Bild} \varphi = \dim U_2$, und nach der Dimensionsformel für Untervektorräume ist $\dim U = \dim(U_1 \oplus U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$ also $\dim U = \dim \operatorname{Kern} \varphi + \operatorname{rg} \varphi$. $\square$

Die Dimensionsformel ist nicht ‘irgend so ‘ne Formel’, sondern gehört zu jenem eisernen Bestand an linear-algebraischen Grundtatsachen, die sie verinnerlichen sollten. Auch ist sie ganz plausibel. Eine *injektive* lineare Abbildung $\varphi : U \rightarrow V$ würde U gewissermaßen unbeschädigt nach V transportieren, das Bild $\varphi(U) \subset V$ hat dann dieselbe Dimension wie U . Was aber der Kern wegfrisst, das fehlt dann eben im Bild, das sagt die Dimensionsformel:

$$\dim \varphi(U) = \dim U - \dim \operatorname{Kern} \varphi.$$

Die Dimensionsformel für lineare Abbildungen liefert wieder neue “Dimensionsgründe” zur Vereinfachung von Beweisen. Zum Beispiel ist anschaulich klar, dass man einen großen Raum nicht injektiv in einen kleinen, einen kleinen nicht surjektiv auf einen großen linear abbilden kann. Die Dimensionsformel präzisiert das:

Bemerkung 5: Ist die lineare Abbildung $\varphi : U \rightarrow V$ injektiv bzw. surjektiv, so ist $\dim U \leq \dim V$ bzw. $\dim U \geq \dim V$.

BEWEIS. Injektivität bedeutet $\dim \operatorname{Kern} \varphi = 0$, also $\dim U = \operatorname{rg} \varphi$ nach der Dimensionsformel, und $\operatorname{rg} \varphi = \dim \varphi(U) \leq \dim V$ gilt sowieso immer. Surjektivität dagegen bedeutet gerade $\operatorname{rg} \varphi = \dim V$, die Dimensionsformel sagt also $\dim U = \dim V + \dim \operatorname{Kern} \varphi$ und daher $\dim U \geq \dim V$. $\square$

Dass sich $\dim \text{Kern } \varphi$ und $\text{rg } \varphi$ zu $\dim U$ ergänzen, wie die Dimensionsformel sagt, impliziert für gleichdimensionale Räume:

Bemerkung 6: *Haben U und V die gleiche Dimension, so ist eine lineare Abbildung $\varphi : U \rightarrow V$ genau dann injektiv, wenn sie surjektiv ist.* $\square$

Sollen Sie also eine lineare Abbildung $\varphi : U \rightarrow V$ zwischen gleichdimensionalen Räumen, z.B. eine ‘quadratische’ Matrix $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ als einen Isomorphismus nachweisen, so zeigen Sie etwa nur die Injektivität, was gewöhnlich leichter ist als die Surjektivität zu beweisen, und sagen dann: *also ist φ aus Dimensionsgründen sogar ein Isomorphismus.* Jeder Leser (z.B. Übungsleiter) sieht daraus sofort, dass Sie den vollen Durchblick haben.

Schließlich benutzen wir unsere durch den Basisergänzungssatz gewonnene Vielseitigkeit in der Konstruktion von Basen, um den wichtigen *Rangsatz* zu beweisen:

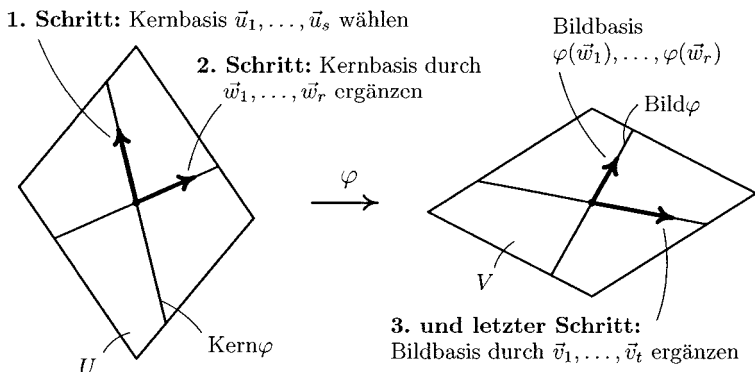
Rangsatz: *Sind $U \subset \mathbb{R}^N$ und $V \subset \mathbb{R}^M$ Untervektorräume der Dimensionen n und m und hat $\varphi : U \rightarrow V$ den Rang r , so können Basen von U und V so gewählt werden, dass die Matrix A , welche φ bezüglich dieser Basen beschreibt, die einfache Gestalt*

$$A = E_r^{m \times n} := \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 \\ \hline & & & 0 & 0 \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{ccc|cc} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 \\ \hline & & & 0 & 0 \end{array}} \right\}^r$$

hat, als lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ also die Standardabbildung vom Rang r ist, welche die ersten r Komponenten von $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ behält und einfach durch Nullen zu einem m -tupel auffüllt.

BEWEIS: Wir ergänzen zuerst eine Basis $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_s)$ von $\text{Kern } \varphi$ zu einer Basis $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_r, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_s)$ von ganz U . Die Bildvektoren der hinzugenommenen $w_1, \dots, w_r$ bilden dann eine Basis von

Bild φ , die wir nun zu einer Basis $(\varphi(\vec{w}_1), \dots, \varphi(\vec{w}_r), \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_t)$ von V ergänzen:



Die Basiswahlen beim Beweis des Rangsatzes

Dann sehen wir aus dem die Matrix A definierenden kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{\varphi} & V \\
 \Phi_{U\text{-Basis}} \uparrow \cong & & \cong \uparrow \Phi_{V\text{-Basis}} \\
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

dass $A\vec{e}_i^{(n)} = \vec{e}_i^{(m)}$ für $i = 1, \dots, r$ und $A\vec{e}_i = 0$ für $i > r$ gilt, und A daher die Gestalt

$\vec{e}_1$	$\dots$	$\vec{e}_r$	0
-------------	---------	-------------	-----

hat, was zu zeigen war. □

Bis auf (Basis-)Isomorphismen sieht also jede lineare Abbildung so aus wie die Musterabbildung vom gleichen Rang. Bei allen Überlegungen und Beweisen, bei denen es auf das Vor- und Nachschalten von Isomorphismen nicht ankommt, darf man also sagen: oBdA sei die Abbildung die Musterabbildung, und das kann eine sehr große Vereinfachung des Problems bedeuten.

9.4 Rangbestimmung

Wie *berechnet* man den Rang einer gegebenen Matrix? Manchen Matrizen sieht man ihren Rang einfach an, z.B.

Notiz: Hat $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ die Gestalt

a_{11}	*
$\ddots$	*
a_{rr}	*
0	0

mit $a_{11} \neq 0, \dots, a_{rr} \neq 0$, so ist $\text{rg } A = r$.

BEWEIS: Die Matrizen-Notation mit den Sternchen und Nullen ist so gemeint, dass in Feldern, wo nichts oder Nullen stehen, alle Komponenten Null sind, während ein Sternchen anzeigt, dass in diesem Bereich der Matrix beliebige Komponenten stehen dürfen. Der gutwillige Betrachter wird also erkennen, dass in unserem Falle $a_{ij} = 0$ für die Indices verlangt ist, für die $j < i$ oder $i > r$ gilt.

Weshalb hat unsere Matrix den Rang r ? Weil das Bild von A aus dem r -dimensionalen Teilraum $\mathbb{R}^r \times 0 \subset \mathbb{R}^m$ besteht: Offenbar sind die letzten $m - r$ Komponenten jedes Bildvektors Null, und jeder Vektor in $\mathbb{R}^r \times 0$ kommt auch wirklich in $\text{Bild } A$ vor, sogar als Bild eines Vektors $(x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, weil das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1r}x_r & = & y_1 \\
 & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & a_{rr}x_r & = & y_r
 \end{array}$$

sukzessive von unten her lösbar ist: $x_r = y_r/a_{rr}$ usw. Also ist Bild $A = \mathbb{R}^r \times 0$ und daher $\text{rg } A = r$. $\square$

Das Rangbestimmungsverfahren für eine beliebige Matrix, die noch nicht in dieser für die Rangablesung so bequemen Gestalt ist, besteht nun darin, die Matrix durch gewisse Umformungen in diese Gestalt zu *bringen*. Natürlich müssen das Umformungen sein, die den Rang nicht ändern, sonst lesen wir ja am Ende den falschen Rang ab.

Definition: Unter einer *elementaren Spaltenumformung* einer Matrix versteht man jeden der folgenden drei Prozesse:

- Multiplikation einer Spalte mit einer Zahl $\lambda \neq 0$,
- Addition des λ -fachen einer Spalte zu einer anderen Spalte,
- Vertauschung zweier Spalten.

Analog sind *elementare Zeilenumformungen* definiert. $\square$

Lemma: *Elementare Umformungen ändern den Rang einer Matrix nicht.*

BEWEIS: Elementare Spaltenumformungen lassen nicht nur den Rang, sondern sogar das Bild von A selbst unverändert. Weshalb? Nun jedenfalls ist eine Linearkombination der Spalten der neuen Matrix $\tilde{A}$ immer auch eine Linearkombination der alten, deshalb kann das Bild nach einer elementaren Spaltenumformung höchstens kleiner geworden sein, Bild $\tilde{A} \subset \text{Bild } A$. Aber jede elementare Spaltenumformung läßt sich auch durch eine elementare Spaltenumformung wieder rückgängig machen, daher gilt auch Bild $A \subset \text{Bild } \tilde{A}$, also Bild $A = \text{Bild } \tilde{A}$, erst recht $\text{rg } A = \text{rg } \tilde{A}$.

Elementare Zeilenumformungen ändern zwar möglicherweise das Bild der Matrix, aber nicht den Kern, denn jeder Vektor im Kern von A liegt ersichtlich auch im Kern der durch elementare Zeilenumformungen geänderten Matrix $\tilde{A}$, also $\text{Kern } A \subset \text{Kern } \tilde{A}$. Aber es muß auch $\text{Kern } \tilde{A} \subset \text{Kern } A$ gelten, weil elementare Zeilenumformungen durch elementare Zeilenumformungen wieder rückgängig gemacht werden können. Also ist $\text{Kern } \tilde{A} = \text{Kern } A$, erst recht $\dim \text{Kern } \tilde{A} = \dim \text{Kern } A$, nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen also auch $\text{rg } A = \text{rg } \tilde{A}$. $\square$

Dieses Lemma ist nun wirklich eine brauchbare Anleitung zur Rangbestimmung. Man verwandelt A durch endlich viele Spalten- und Zeilenumformungen in die “Rangabsegestalt”

$$\tilde{A} = \begin{array}{|cc|cc} \tilde{a}_{11} & & & \\ & * & & \\ & \ddots & & \\ & & \tilde{a}_{rr} & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}$$

und weiß damit $\text{rg } A = r$. Überzeugen wir uns, dass das immer möglich ist! Wir starten einen Iterationsprozess:

1. Schritt: Entweder $A = 0$, dann ist $\text{rg } A = 0$, oder es gibt ein $a_{ij} \neq 0$. Dann können wir dieses Element durch Zeilen- und Spaltenvertauschung in die Position $(1, 1)$ der Matrix bringen. Damit haben wir die erste Zeile aber in eine “Killerzeile” verwandelt, die jetzt durch elementare Zeilenumformungen vom ersten und zweiten Typ alle anderen Einträge der ersten Spalte tötet. Dann ist der erste Schritt abgeschlossen, und aus A ist eine Matrix gleichen Ranges der Gestalt

$$A_1 = \begin{array}{|c|cc} a_{11}^{(1)} & & \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{array} \quad , \quad a_{11}^{(1)} \neq 0$$

geworden.

Iterationsschritt: Hat A nach i Schritten durch elementare Umformungen die Gestalt

$$A_i = \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} a_{11}^{(1)} & & * \\ & \ddots & \\ & & a_{ii}^{(i)} \end{array} & \begin{array}{c} * \\ \\ * \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \end{array} & B_i \end{array}, \quad a_{11}^{(1)} \neq 0, \dots, a_{ii}^{(i)} \neq 0$$

bekommen, so ist entweder die Teilmatrix B_i die Nullmatrix und $\text{rg } A = i$, der Rang also ermittelt und das Verfahren zu Ende, oder die erste Zeile von B_i kann durch Vertauschungen der hinteren Zeilen- und Spalten von A_i zur Killerzeile gemacht und der $i + 1$ -te Schritt ausgeführt werden. Offenbar stoppt das Verfahren nach längstens $\min(m, n)$ Schritten bei einem A_r , und $\text{rg } A = r$ ist dann bestimmt. $\square$

9.5 Übungsaufgaben

Aufgabe R9.1: Sei φ eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und A die zugehörige Matrix. Sei U ein r -dimensionaler Untervektorraum, der durch Basisvektoren $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r$ aufgespannt wird. Berechnen Sie die Matrix C der auf U eingeschränkten Abbildung

$$\varphi|_U : U \rightarrow \mathbb{R}^m$$

bezüglich der Basis $(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r)$ in U und der Standardbasis im $\mathbb{R}^m$. (Notationsvorschlag: Bezeichnen Sie die Matrix aus den Spalten $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r$ mit B .)

Aufgabe R9.2: Es sei A die 4×4 -Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie Basen von Kern und Bild der Matrix durch elementare Zeilen- und Spaltenumformungen.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $\vec{b} = (2, 7, 5, 1)$ (als Spaltenvektor).

Aufgabe R9.3: Der Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ ergänze die ersten beiden Einheitsvektoren zu einer Basis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{a})$. Es sei $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Projektion des $\mathbb{R}^3$ auf $U := \mathbb{R}^2 \times 0$ längs der Richtung von $\vec{a}$ (d.h. $P(\vec{x}) \in U$ ist das "Schattenbild" von $\vec{x}$ bei einer Beleuchtung in Richtung von $\vec{a}$). Berechnen Sie P als Matrix, zeigen Sie, dass $P \circ P = P$ ist, berechnen Sie die Matrix der komplementären Projektion $Q := \text{Id} - P$ und zeigen Sie auch $Q \circ Q = Q$.

Aufgabe T9.1: a) Für welche Untervektorräume $U \subset \mathbb{R}^n$ läßt sich eine lineare Abbildung $\varphi : U \rightarrow U$ mit Kern $\varphi = \text{Bild } \varphi$ finden und für welche nicht?

b) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie, daß eine lineare Abbildung $P : U \rightarrow U$ genau dann eine Projektion auf ihr Bild ist, wenn $P \circ P = P$ gilt.

Aufgabe T9.2: Es seien $\varphi_1, \varphi_2 : U \rightarrow V$ zwei lineare Abbildungen mit demselben Kern. Beweisen Sie, daß es einen Isomorphismus $\Phi : V \rightarrow V$ mit $\varphi_2 = \Phi \circ \varphi_1$ gibt.

Aufgabe T9.3: Es seien $\varphi, \psi : U \rightarrow V$ zwei lineare Abbildungen mit demselben Bild. Beweisen Sie, dass es einen Isomorphismus $\Phi : U \rightarrow U$ mit $\psi = \varphi \circ \Phi$ gibt.

Aufgabe T9.4: Aus zwei Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ und $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ kann man eine $m \times n$ -Matrix A bilden, indem man $a_{ij} := x_i y_j$ setzt. Zeigen Sie, dass es genau die Matrizen vom Rang Null oder Eins sind, die sich so schreiben lassen.

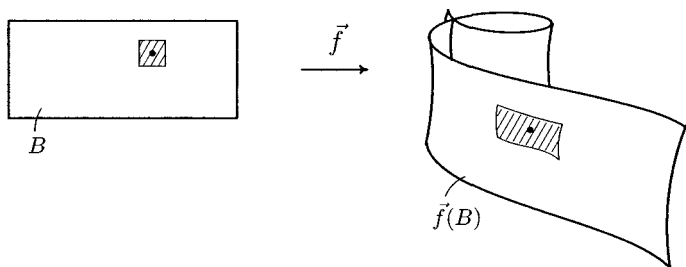
Aufgabe T9.5: Finden und beweisen Sie ein Lemma, welches darüber Auskunft gibt, was die lineare Abhängigkeit oder Unabhängigkeit eines r -tupels $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r)$ von Vektoren $\vec{a}_i$ im $\mathbb{R}^n$ mit dem Rang der $n \times r$ -Matrix A zu tun hat, deren Spalten diese Vektoren sind.

10

Lineare Approximation in der Analysis

10.1 Die Jacobimatrix

Jetzt kehren wir in die Analysis zurück und betrachten einen, sagen wir der Einfachheit halber: offenen Definitionsbereich $B \subset \mathbb{R}^n$ und darauf eine Abbildung $\vec{f}: B \rightarrow \mathbb{R}^m$



Wir betrachten das Verhalten einer nichtlinearen Abbildung in der Nähe eines Punktes $\vec{x} \in B$

Wir sagen, $\vec{f}$ sei bei $\vec{x}$ differenzierbar, wenn für kleine Änderungen $\Delta\vec{x}$ die Zuordnung

$$\Delta\vec{x} \mapsto \Delta\vec{f} := \vec{f}(\vec{x} + \Delta\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x})$$

so gut wie linear ist. Genau soll das Folgendes heißen:

Definition: Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{x} \in B$. Eine Abbildung $\vec{f} : B \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt **differenzierbar bei $\vec{x}$** , wenn es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt, so dass der durch

$$\vec{f}(\vec{x} + \vec{v}) =: \vec{f}(\vec{x}) + A\vec{v} + \vec{a}(\vec{v})$$

definierte **Fehlerterm** $\vec{a}(\vec{v})$ für $\vec{v} \rightarrow 0$ so schnell klein wird, dass nicht nur $\vec{a}(\vec{v}) \rightarrow 0$, sondern sogar

$$\lim_{\vec{v} \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(\vec{v})}{\|\vec{v}\|} = 0$$

gilt. Unter einer **differenzierbaren Abbildung** verstehen wir natürlich eine, die an *jeder* Stelle ihres Definitionsbereiches differenzierbar ist. $\square$

Man sagt auch, es handele sich um *Approximation erster Ordnung* von $v \mapsto \vec{f}(\vec{x} + \vec{v}) - \vec{f}(\vec{x})$ durch $\vec{v} \mapsto A\vec{v}$ bei $\vec{v} = 0$.

Lemma und Definition: Die approximierende lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist dann eindeutig bestimmt und heißt die **Jacobi-matrix** $J_{\vec{f}}(\vec{x})$ oder das **Differential** $d\vec{f}_{\vec{x}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ von $\vec{f}$ an der Stelle $\vec{x}$.

BEWEIS DER EINDEUTIGKEIT: Hätte B auch die approximierende Eigenschaft, so wäre

$$\lim_{\vec{v} \rightarrow 0} \frac{A\vec{v} - B\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = 0,$$

also für jedes feste $\vec{v} \neq 0$ erst recht

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(h\vec{v}) - B(h\vec{v})}{h} = 0,$$

was wegen der Linearität, ja allein schon wegen der Homogenität natürlich $A\vec{v} = B\vec{v}$ bedeutete. $\square$

Wenn wir zwischen $m \times n$ -Matrizen A und linearen Abbildungen $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ in der Notation unterscheiden wollen, bekommen wir

hier also je eine Notation angeboten. Wir werden aber nicht immer so pedantisch sein und wissen schon, wie $d\vec{f}_{\vec{x}} = J_{\vec{f}}(\vec{x})$ gemeint ist.

Man nennt $d\vec{f}_{\vec{x}}$ zuweilen auch das **totale Differential** und spricht von **totaler Differenzierbarkeit**, um den Unterschied zur partiellen Differenzierbarkeit hervorzuheben. So einen Unterschied gibt es jedenfalls, denn anders als bei der partiellen Differenzierbarkeit gilt für die richtige Differenzierbarkeit:

Notiz: Ist $\vec{f}$ differenzierbar, so erst recht stetig. □

Sprechen wir ein bisschen über die Notation. Eine einheitliche Bezeichnung für den Fehlerterm gibt es nicht, ich habe hier einmal $\vec{a}$ gewählt, das kleine a mag an *kleine Abweichung* erinnern. Statt von $\vec{x}$ und $\vec{x} + \vec{v}$ kann man natürlich auch von $\vec{x}_0$ und $\vec{x}$ sprechen und alles darin ausdrücken:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0) + J_{\vec{f}}(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + \vec{a}(\vec{x})$$

mit $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{a(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0$. Auch nicht schlecht! Ich möchte aber doch gern dem Vektor $\vec{v}$, der so durch $\vec{x} - \vec{x}_0$ ersetzt werden würde, einen eigenen Buchstaben gönnen, weil er ja doch ein wichtiger Akteur ist, und $\Delta\vec{x}$ statt $\vec{v}$ zu schreiben, was auch seinen Sinn hätte, will ich auch nicht, weil das eine Beziehung zwischen dem festen $\vec{x}$ und dem variablen $\Delta\vec{x}$ zu suggerieren scheint, die in Wirklichkeit nicht vorhanden ist: Man kann nicht $\Delta\vec{x}$ aus $\vec{x}$ ausrechnen. Ja die Vorzüge und Nachteile einzelner Notationen! Ein unerschöpfliches Thema.

Wir haben vom Differential $d\vec{f}_{\vec{x}}$ als Ganzem durch die Definition eine bestimmte Vorstellung: es ist die beste lineare Approximation von $\vec{v} \mapsto \vec{f}(\vec{x} + \vec{v}) - \vec{f}(\vec{x})$. Was ist aber die anschauliche Bedeutung des einzelnen Wertes $d\vec{f}_{\vec{x}}(\vec{v}) = J_{\vec{f}}(\vec{x})\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ für ein festes $\vec{v}$?

Um das festzustellen, schicken wir einmal für festes $\vec{v}$ (und festes $\vec{x}$ sowieso) die Gerade $t \mapsto \vec{x} + t\vec{v}$ für kleine t als Sonde in den Definitionsbereich von $\vec{f}$ und sehen nach, was uns die Definition

über die Beziehung zwischen $\vec{f}(\vec{x} + t\vec{v})$ und $J_{\vec{f}}(\vec{x})\vec{v}$ sagt. Wegen $\vec{f}(\vec{x} + t\vec{v}) = \vec{f}(\vec{x}) + J_{\vec{f}}(\vec{x})t\vec{v} + \vec{a}(t\vec{v})$ haben wir für $t \neq 0$

$$J_{\vec{f}}(\vec{x})\vec{v} = \frac{\vec{f}(\vec{x} + t\vec{v}) - \vec{f}(\vec{x})}{t} - \frac{\vec{a}(t\vec{v})}{t}$$

Das gilt für alle t , also ist $J_{\vec{f}}(\vec{x})\vec{v}$ auch gleich dem Limes für $t \rightarrow 0$, bei dem der Fehlerterm wegen der Approximationseigenschaft erster Ordnung keinen Beitrag liefert, es bleibt also nur die Ableitung von $\vec{f}$ nach der Zeit während der Fahrt mit Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$, genommen zum Zeitpunkt $t = 0$:

Notiz: Aus der Definition folgt direkt

$$\left. \frac{d}{dt} \vec{f}(\vec{x} + t\vec{v}) \right|_{t=0} = J_{\vec{f}}(\vec{x})\vec{v}$$

□

Wie rechnet man die Jacobimatrix aus? Wie man Matrizen immer ausrechnen kann: die Spalten sind die Bilder der Einheitsvektoren, und die obige Formel sagt uns ja gerade, wie wir das Bild eines festen Vektors $\vec{v}$ unter der Jacobimatrix bestimmen, das machen wir jetzt für $\vec{v} := \vec{e}_j$ und erhalten

$$J_{\vec{f}}(\vec{x})\vec{e}_j = \left. \frac{d}{dt} \vec{f}(\vec{x} + t\vec{e}_j) \right|_{t=0} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_j}(\vec{x})$$

nach Definition der partiellen Ableitungen, also ergibt sich als Korollar:

Lemma: Die Jacobimatrix ist die Matrix der partiellen Ableitungen:

$$J_{\vec{f}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

□

Bedeutet das, dass eine Abbildung schon differenzierbar ist, wenn ihre partiellen Ableitungen existieren und ich damit “die Jacobi-matrix ausrechnen” kann? Keineswegs, denn wie Sie schon wissen, gibt es partiell differenzierbare unstetige Funktionen, aber richtig differenzierbare unstetige Funktionen gibt es nicht. Es gilt aber der

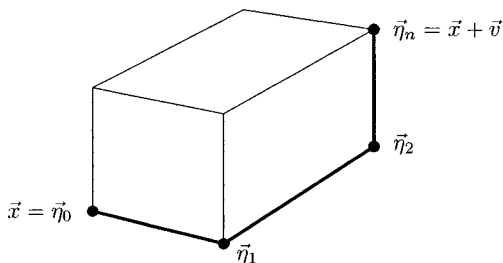
Satz: Jede C^1 -Abbildung ist differenzierbar.

ZUM BEWEIS: Dieser Satz ist es, der Ihnen in der Praxis fast immer die Arbeit abnimmt, den Fehlerterm

$$\vec{a}(\vec{v}) = \vec{f}(\vec{x} + \vec{v}) - \vec{f}(\vec{x}) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}(\vec{x}) v_i$$

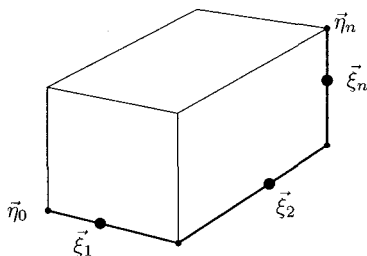
zu berechnen um nachzusehen, ob wirklich $\lim_{\vec{v} \rightarrow 0} \vec{a}(\vec{v}) / \|\vec{v}\| = 0$ ist. Sie dürfen dann auf die Frage, ob $\vec{f}$ differenzierbar sei, meist ganz lässig antworten: na klar, is’ ja sogar C^1 — sofern Sie nämlich letzteres guten Gewissens behaupten können, aber das ist ein einfacherer Begriff, weil er nur mit partiellen Ableitungen und mit Stetigkeit zu tun hat.

Damit der Satz aber diese Kraft bekommt, müssen wir jetzt beim Beweis den Nachweis von $\lim_{\vec{v} \rightarrow 0} \vec{a}(\vec{v}) / \|\vec{v}\| = 0$ wirklich explizit führen. Dazu schreiben wir $\vec{f}(\vec{x} + \vec{v}) - \vec{f}(\vec{x})$ als die Summe der n Differenzen die sich ergeben, wenn wir beim Schreiten von $\vec{x}$ nach $\vec{x} + \vec{v}$ die Ecken $\vec{\eta}_i := (x_1 + v_1, \dots, x_i + v_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ des Quaders als Trittsteine benutzen:



Der Quader $[x_1, x_1 + v_1] \times \dots \times [x_n, x_n + v_n]$ im $\mathbb{R}^n$

Das ist die Anschauung zu der natürlich auch rechnerisch trivialen Formel $\vec{f}(\vec{x} + \vec{v}) - \vec{f}(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n (\vec{f}(\vec{\eta}_i) - \vec{f}(\vec{\eta}_{i-1}))$. Auf die einzelnen Komponenten des i -ten Summanden wenden wir nun den Mittelwertsatz der gewöhnlichen Differentialrechnung in einer Variablen an. Statt von den einzelnen Komponenten von $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)$ zu sprechen, können wir aber auch oBdA $m = 1$ annehmen. Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $0 < \theta_i < 1$ und damit eine Zwischenstelle $\vec{\xi}_i := (x_1 + v_1, \dots, x_{i-1} + v_{i-1}, x_i + \theta_i v_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ auf der i -ten Kante, so dass der i -te Summand gerade $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{\xi}_i) v_i$ wird.



Die Zwischenstellen auf den Quaderkanten

Damit ergibt sich der Fehlerterm aber zu

$$a(\vec{v}) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{\xi}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \right) v_i,$$

daher ist jedenfalls

$$\frac{|a(\vec{v})|}{\|\vec{v}\|} \leq \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{\xi}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}) \right\|$$

also folgt $\lim_{\vec{v} \rightarrow 0} a(\vec{v})/\|\vec{v}\| = 0$ aus der Stetigkeit der partiellen Ableitungen. $\square$

Für eine Klasse von Abbildungen sind Differenzierbarkeit und Differential, also Jacobimatrix, so einfach direkt zu sehen, dass es schon fast wieder verwirrend ist, wir sollten's aber doch einmal ausgesprochen haben:

Notiz 1: Ist $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, so ist die durch $\vec{f}(\vec{x}) := A\vec{x} + \vec{b}$ definierte (sogenannte **affine**) Abbildung differenzierbar, und überall gilt $d\vec{f}_{\vec{x}} = A$. $\square$

Die Fehlerterm ist in diesem Fall ja Null: $A(\vec{x} + \vec{v}) + \vec{b} - (A\vec{x} + \vec{b}) = A\vec{v}$. Eine lineare Abbildung braucht man eben nicht erst linear zu approximieren, die ist schon selber linear. Insbesondere gilt natürlich

Notiz 2: Das Differential der identischen Abbildung $\vec{x} \mapsto \vec{x}$ ist an jeder Stelle die Identität auf $\mathbb{R}^n$, ihre Jacobimatrix also die Einheitsmatrix

$$J_{\text{Id}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

für jedes $\vec{x}$. $\square$

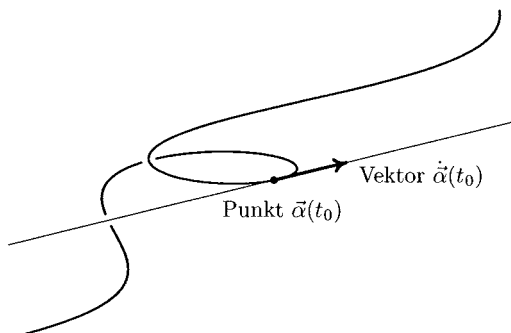
10.2 Die Jacobimatrizen von Kurven und Funktionen

Unter den Abbildungen $\vec{f} : B \rightarrow \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^n$, die wir hier betrachten, sind natürlich auch die Kurven im $\mathbb{R}^m$ und die reellwertigen Funktionen von n Variablen mit eingeschlossen, nämlich als die Spezialfälle $n = 1$ bzw. $m = 1$. Die Jacobimatrix einer Kurve $\vec{\alpha} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}$ ein allgemeines Intervall, an einer Stelle $t \in D$ ist eine $m \times 1$ -Matrix, nämlich

$$J_{\vec{\alpha}}(t) = \dot{\vec{\alpha}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\alpha}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\alpha}_m(t) \end{pmatrix},$$

als Vektor gelesen ist das der **Geschwindigkeitsvektor** der Kurve. Lesen wir diese $m \times 1$ -Matrix aber als die lineare Abbildung $d\vec{\alpha}_t : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^m$, welche die Kurve, oder genauer die Abbildung $h \mapsto \vec{\alpha}(t+h) - \vec{\alpha}(t)$, von erster Ordnung approximiert, so ist $d\vec{\alpha}_t(h) := \dot{\vec{\alpha}}(t)h$ zu verstehen und daher auch

$$\dot{\vec{\alpha}}(t) = d\vec{\alpha}_t(1).$$



Kurve $t \mapsto \vec{\alpha}(t)$, Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{\alpha}}(t_0)$
und lineare Approximation bei t_0

Wenn es sich immer nur um Kurven handelte, dann hätten wir freilich die Jacobimatrix und das Differential gar nicht einzuführen brauchen, weil wir alles mit Hilfe des Geschwindigkeitsvektors bequem ausdrücken könnten, und auch zwischen *totaler* und *partieller* Differenzierbarkeit gibt es hier keinen Unterschied, weil Kurven Abbildungen von nur einer Variablen t sind. Da die Jacobimatrix in der Analysis mehrerer Variabler aber unentbehrlich ist, müssen wir auch verstehen, wie sie sich im Spezialfall der Kurven ausnimmt, weil wir sonst Schwierigkeiten beim *Zusammenspiel* von Kurven und mehrdimensionalen Abbildungen bekommen.

Aus analogem Grunde müssen wir uns auch den anderen Extremfall, nämlich beliebiges n aber $m = 1$, den Fall der reellwertigen Funktionen genau anschauen. Die Jacobimatrix einer differenzierbaren Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, an einer Stelle $\vec{x} \in B$ ist eine $1 \times n$ -Matrix, nämlich die Zeile

$$J_f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \right) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

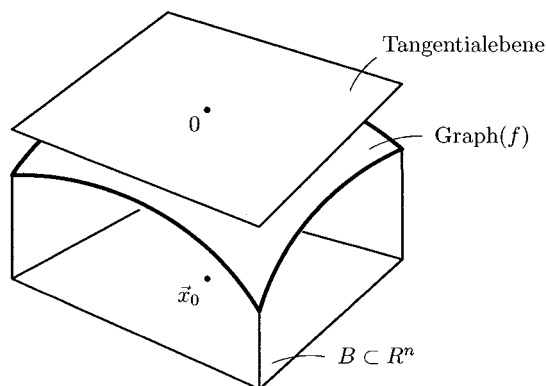
der partiellen Ableitungen. Die Matrizenrechnung sagt uns, wie die Zeile als lineare Abbildung gemeint ist:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot v_i,$$

und das ist also die Formel für die Abbildung

$$\begin{aligned} df_{\vec{x}} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{v} &\longmapsto \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot v_i, \end{aligned}$$

welche $\vec{v} \mapsto f(\vec{x} + \vec{v}) - f(\vec{x})$ linear von erster Ordnung approximiert.



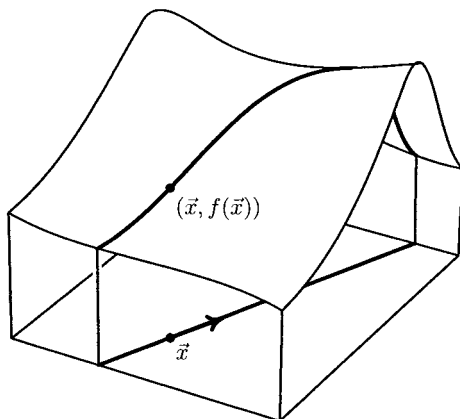
Verschiebt man den Graphen der linearen Funktion $df_{\vec{x}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ parallel an den Ort des Geschehens, so bildet er dort die Tangentialebene an den Graphen von f .

Wie wir als unmittelbare Folgerung aus der Definition schon im vorigen Abschnitt bemerkt hatten, ist der einzelne Wert $J_f(\vec{x})\vec{v}$ gleich der Ableitung $\left. \frac{d}{dt} f(\vec{x} + t\vec{v}) \right|_{t=0}$ der Funktion längs der Geraden $t \mapsto \vec{x} + t\vec{v}$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Das sollte etwas mit dem Anstieg des Graphen in Richtung $\vec{v}$ zu tun haben. Aber der Höhenzuwachs pro *Zeit* beim Bergwandern hängt natürlich nicht nur von der Steilheit des Wegs, sondern auch von der *Geschwindigkeit* der Wanderer ab. Im Falle $\|\vec{v}\| = 1$ ist $J_f(\vec{x})\vec{v}$ wirklich der Anstieg des Graphen in Richtung $\vec{v}$, und dann nennt man es die **Richtungsableitung** von f in Richtung $\vec{v}$ und schreibt auch $J_f(\vec{x})\vec{v} =: \nabla_{\vec{v}} f(\vec{x})$. Für beliebiges $\vec{v}$ hängt $J_f(\vec{x})\vec{v}$ mit der Richtungsableitung in Richtung $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

durch

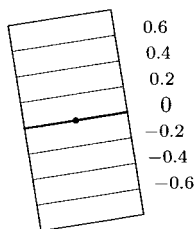
$$J_f(\vec{x})\vec{v} = \|\vec{v}\| \nabla_{\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}} f(\vec{x})$$

zusammen.

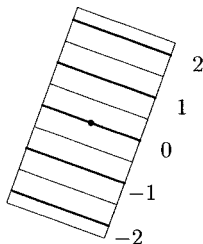


Die sondierende Gerade und was sie auf dem Graphen erlebt

Veranschaulicht man sich die Funktion nicht durch ihren Graphen, sondern durch ihre Niveaus, wie die Höhenlinien auf einer Wanderkarte, so macht man es zweckmäßigerweise für die lineare Approximation $\vec{v} \mapsto df_{\vec{x}}\vec{v}$ ebenso. Die Niveaus des Differentials sind aber einfach die Nebenklassen des Kerns:



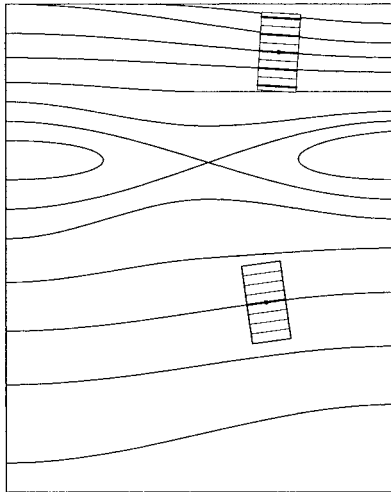
Flacheres Differential



Steileres Differential

An die jeweilige Stelle $\vec{x}$ verschoben und in die Höhenkarte der

Funktion selbst eingezeichnet, sehen wir die Beziehung der Differentiale zur Funktion anschaulich vor uns:



Niveaus von Funktion und Differentialen

Und schließlich erwarten Sie von mir, dass ich jetzt etwas über den *Gradienten* einer differenzierbaren Funktion sage. Tue ich auch! Den Gradienten erhält man, indem man die Jacobimatrix, die bei einer Funktion ja aus einer *Zeile* besteht, trotzdem als *Spalte* schreibt:

Definition: Der Vektor

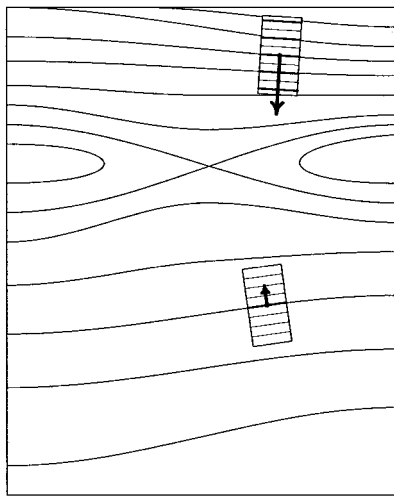
$$\text{grad}_{\vec{x}} f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

heißt der **Gradient** von f an der Stelle $\vec{x}$. □

Der Gradient enthält natürlich auch die volle Information über das Differential $df_{\vec{x}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, nur dürfen wir die Schreibweise

$$df_{\vec{x}} \vec{v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot v_i =: \text{grad}_{\vec{x}} f \cdot \vec{v}$$

jetzt nicht als Matrizenprodukt zu lesen versuchen, vielmehr handelt es sich hier um das sogenannte *Skalarprodukt* von Vektoren, mit dem wir uns beschäftigen wollen, wenn wir demnächst wieder zur linearen Algebra zurückkehren werden.



Gradienten und Niveaus

Man kann sich natürlich auf den Standpunkt stellen, ob man ein n -tupel als Zeile oder Spalte schreibt, mache nur einen formalen Unterschied, eine andere Art des Hinschreibens auf dem Papier. Es kommt aber darauf an, was damit bezeichnet sein soll, und wenn man vom *Gradienten* spricht, ist der Vektor gemeint, selbst wenn die Spaltenschreibweise dabei gar nicht benutzt wird! Als mathematisches Objekt ist ein Vektor in $\mathbb{R}^n$ aber doch etwas anderes als eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, wie auch unsere Veranschaulichungen zeigen, und statt zu sagen sie seien *dasselbe* sollten wir lieber sagen, dass sie in offensichtlicher Weise auseinander hervorgehen.

Zum Schluss noch einen Blick auf den allereinfachsten Fall, den einer differenzierbaren Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ einer reellen Variablen. Die Jacobimatrix $J_f(x)$ an einer Stelle $x \in D$ ist jetzt eine 1×1 -Matrix, hat also nur eine einzige Komponente, und diese ist natürlich nichts anderes als die Ableitung $f'(x) \in \mathbb{R}$ an dieser Stelle, eine Zahl. Was aber ist das Differential df_x in diesem Falle als

lineare Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$? Die Multiplikation mit dieser Zahl, also die Abbildung $h \mapsto f'(x)h$, also $f'(x) = df_x(1)$.

Wer dem Begriff des Differentials hier zum ersten Mal begegnet, wie ich es ja von den Lesern, an die sich dieses Buch wendet, annehmen muss, sollte auch diesen trivialen Fall einmal durchdenken. Denn auch wenn man den 'allgemeinen' Fall, für den auch die Notation konzipiert ist, ganz gut verstanden hat, kann man mit Verwunderung bemerken, dass einen ein Extremfall wie $n = m = 1$ anschaut wie ein leeres Blatt Papier, man erkennt die Begriffe darin nicht wieder.¹ Und doch kann auch so ein Fall einmal wichtig sein.

10.3 Die mehrdimensionalen Ableitungsregeln

Wir haben nun das Differential, also gewissermaßen die mehrdimensionale Ableitung, definiert (durch die Approximationseigenschaft), berechnet (mittels partieller Ableitungen als Jacobimatrix), einige Grundbeispiele ($\vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$) betrachtet und Anschauung gewonnen. Was uns noch fehlt, sind *Ableitungsregeln*. Trivial ist

Notiz: Stets gilt $d(\vec{f} + \vec{g})_{\vec{x}} = d\vec{f}_{\vec{x}} + d\vec{g}_{\vec{x}}$ und $d(\lambda\vec{f})_{\vec{x}} = \lambda d\vec{f}_{\vec{x}}$ für differenzierbare Abbildungen $\vec{f}, \vec{g} : B \rightarrow \mathbb{R}^m$ und konstante $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

Nun aber die *Kettenregel* und die *Umkehrregel*! Die allgegenwärtige Kettenregel lautet genau so wie Sie es erwarten:

Kettenregel: Sind $B \subset \mathbb{R}^n$ und $\tilde{B} \subset \mathbb{R}^m$ offene Bereiche und

$$B \xrightarrow{\vec{g}} \tilde{B} \xrightarrow{\vec{f}} \mathbb{R}^p$$

zwei Abbildungen, ist $\vec{x} \in B$, und sind $\vec{g}$ bei $\vec{x}$ und $\vec{f}$ bei $\vec{g}(\vec{x})$ differenzierbar, so ist auch $\vec{f} \circ \vec{g}$ bei $\vec{x}$ differenzierbar und es gilt

$$d(\vec{f} \circ \vec{g})_{\vec{x}} = d\vec{f}_{\vec{g}(\vec{x})} \circ d\vec{g}_{\vec{x}}$$

oder in Matrizenschreibweise $J_{\vec{f} \circ \vec{g}}(\vec{x}) = J_{\vec{f}}(\vec{g}(\vec{x})) J_{\vec{g}}(\vec{x})$. $\square$

In Komponentenschreibweise also

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)) \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n)$$

wobei hier $y_1, \dots, y_m$ als die Koordinaten im mittleren Definitionsbereich $\tilde{B} \subset \mathbb{R}^m$ gedacht sind. Diese Formel erzeugt gewiss den Wunsch nach größerer Übersichtlichkeit! Eine Möglichkeit: Gibt man der Abbildung $\vec{g}$ keinen eigenen Namen, sondern notiert sie nur als Koordinatenzuordnung $\vec{y} = \vec{y}(\vec{x})$, was die Lesbarkeit von Koordinatenformeln durchaus erhöht, so liest man

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(\vec{y}(\vec{x})) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(\vec{y}(\vec{x})) \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(\vec{x}),$$

und das kann man schließlich schreiben als

Rechenkurzformel für Insider:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_j}$$

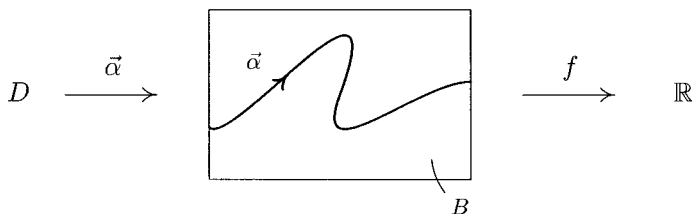
Diese Formel ist aber nicht für Laien zum Kennenlernen der Kettenregel geeignet, sie fehlerfrei zu handhaben setzt im Gegenteil bereits Verständnis *voraus*.

Am Besten zu verstehen, weil kurz, klar und plausibel, ist die Kettenregel in ihrer ‘mathematischsten’ Form $d(\vec{f} \circ \vec{g})_x = d\vec{f}_{\vec{g}(\vec{x})} \circ d\vec{g}_{\vec{x}}$. Denn bis auf Translation dürfen wir oBdA $\vec{x} = 0$, $\vec{g}(\vec{x}) = 0$ und $\vec{f}(\vec{g}(\vec{x})) = 0$ voraussetzen, und wenn wir die Approximation von $\vec{f}$ bei 0 durch A von erster Ordnung mit $\vec{f} \approx A$ bezeichnen, das Zeichen $\approx$ also keineswegs einem luftigen “ungefähr gleich” überlassend, dann sagt die Kettenregel einfach, dass aus $\vec{f} \approx A$ und $\vec{g} \approx B$ auch $\vec{f} \circ \vec{g} \approx A \circ B$ folgt.

Der Beweis ist eine Übung im Umgang mit dem Limesbegriff, nicht zu schwierig, aber an einem Wege gelegen, in den wir jetzt

nicht einbiegen wollen. Wichtiger ist mir, dass Sie mit der Aussage der Kettenregel auch in allen Verkleidungen und Extremfällen umgehen können.

Ein wichtiger und häufig vorkommender Spezialfall der Kettenregel betrifft die Verkettung einer Kurve mit einer Funktion, die ja eine gewöhnliche Funktion einer Variablen t ergibt.



Kurve in eine Funktion 'einsetzen': eine Verkettung

Die Kettenregel, ganz formal auf die Verkettung $f \circ \vec{\alpha}$ an der Stelle t angewendet, sagt zunächst $d(f \circ \vec{\alpha})_t = df_{\vec{\alpha}(t)} \circ d\vec{\alpha}_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Im Falle nur einer Variablen t ist das Differential aber einfach die Multiplikation mit der Ableitung, Einsetzen von 1 zeigt also

$$(f \circ \vec{\alpha})'(t) = df_{\vec{\alpha}(t)}(\dot{\vec{\alpha}}(t)).$$

Schreiben wir die Kurve in anonymer Notation als $t \mapsto \vec{x}(t)$ oder klassisch als $\vec{x} = \vec{x}(t)$ und fassen die gewöhnliche Ableitung

$$\frac{d}{dt} f(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

als 1×1 -Jacobimatrix der Verkettung auf, so ist das nach der Matrizenversion der Kettenregel das Matrizenprodukt aus der Jacobizeile von f an der Stelle $\vec{x}(t)$ mit der Jacobispalte $\dot{\vec{x}}(t)$ der Kurve an der Stelle t , und deshalb ist

$$\frac{d}{dt} f(x_1(t), \dots, x_n(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}(t)) \dot{x}_i(t).$$

Dieser Spezialfall der Kettenregel kommt im praktischen Alltag der mehrdimensionalen Analysis so häufig vor, dass man glauben sollte, sie prägt sich dem Benutzer unwillkürlich ein. Seltsame Erlebnisse mit jüngeren *und älteren* Studenten haben mich aber so verunsichert, dass ich die Formel in der Vorlesung immer wieder von Neuem erkläre, und ich fürchte mit dem Effekt, dass manche Hörer nun meinen, ach, das ist die Ableitungsregel, die wir uns nicht zu merken brauchen, weil er die sowieso jeden Tag wiederholt.

In der Differentialrechnung in einer Variablen enthielt unsere *Umkehrregel* für die Ableitung auch eine Aussage über die *Existenz* einer differenzierbaren Umkehrung, die wir bei der Definition vieler elementarer Funktionen wie Logarithmus, Wurzelfunktionen und Arcusfunktionen sogleich kräftig ausgenutzt hatten. Auf den Beweis war ich zwar nicht eingegangen, aber er ist elementar genug, dass sich die Fiktion aufrechterhalten lässt, Sie hätten ihn aus der Schule gekannt.

In der Differentialrechnung mehrerer Variabler gibt es eine ähnliche Existenzaussage für differenzierbare Inversen, sie nimmt als der berühmte *Umkehrsatz* oder *Satz von der inversen Abbildung* eine zentrale Stellung ein. Er bildet die Grundlage für die Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme, ermöglicht den Aufbau der Analysis unter Nebenbedingungen, die Einführung von Koordinatensystemen für gekrümmte k -dimensionale Flächen im $\mathbb{R}^n$ und vieles mehr. Versteht sich, dass wir uns mit diesem wichtigen Satz befassen müssen! Nur nicht gerade jetzt, sondern jetzt machen wir uns das Leben leicht und setzen die Existenz der differenzierbaren Inversen einfach voraus und erhalten aus $f^{-1} \circ f = \text{Id}$ und der Kettenregel sofort die

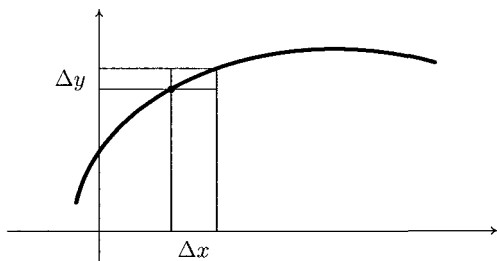
Umkehrformel: Ist $\vec{f} : B \rightarrow \tilde{B}$ eine differenzierbare bijektive Abbildung zwischen offenen Bereichen $B, \tilde{B} \subset \mathbb{R}^n$ mit einer differenzierbaren Inversen, so gilt an jeder Stelle $\vec{y} = f(\vec{x})$ von $\tilde{B}$:

$$d(f^{-1})_{\vec{y}} = (df_{\vec{x}})^{-1} \quad \text{oder} \quad J_{f^{-1}}(\vec{y}) = (J_f(\vec{x}))^{-1}.$$

□

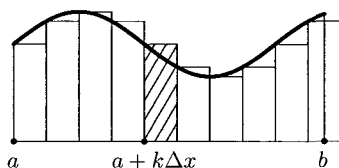
10.4 Infinitesimale Größen

Jeder kennt die symbolische Notation $\frac{dy}{dx}$ für die Ableitung einer Funktion $y = y(x)$.



Die Ableitung $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =: \frac{dy}{dx}$

Der Grenzwert auf der linken Seite ist ein klarer Begriff, rechts haben wir eine symbolische Notation dafür. Ähnlich bei der Integration:



Das Integral $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{b-a}{\Delta x} \rfloor} y(a + k\Delta x) \Delta x =: \int_a^b y(x) dx$

Die symbolische Notation erinnert deutlich an die Struktur der von Δx abhängigen Größe, deren Grenzwert für $\Delta x \rightarrow 0$ sie bezeichnet, und das wäre ja an und für sich schon ganz nett und geschickt, wenn auch nicht so besonders wichtig, die Notation $y'(x)$ z.B. erinnert nicht an den Differenzenquotienten und ist doch auch sehr praktisch.

Die Notation der “infinitesimalen Größen” dy und dx entfaltet aber beträchtliche heuristische Kraft wenn man, wozu die bloßen Definitionen von Ableitungen und Integral *nicht* nötigen, diesen Größen eine selbständige mathematische Existenz zubilligt. Diese

Kraft macht sich die Physik vielfach zunutze, wofür ich jetzt erst einmal ein paar Beispiele aus der Lehrbuchliteratur² geben will.

Beispiel 1: “Sie [die Geschwindigkeit] ist ein Vektor, dessen Richtung durch $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ gegeben ist”.

Beispiel 2: Es gilt $d(\vec{p} \cdot \vec{p}) = 2\vec{p} \cdot d\vec{p}$, was benutzt wird um die wichtige Beziehung

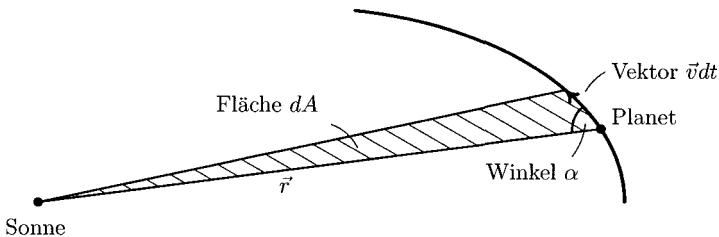
$$d\left(\frac{p^2}{2m}\right) - \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

zu zeigen. Den zweiten Term nennt man die *Arbeit* $dW := \vec{F} \cdot d\vec{r}$ längs des Weges $d\vec{r}$, woraus sich die *Gesamtarbeit* als

$$W := \int_0^1 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

ergibt. Alle diese Aussagen beziehen sich auf die Kurve $t \mapsto \vec{r}(t)$, die ein Massepunkt mit Masse m unter dem Einfluss einer Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ beschreibt.

Beispiel 3: Steht im Zusammenhang mit dem 2. Keplerschen Gesetz: *Gleiche Flächen in gleichen Zeiten*, Invarianz des Drehimpulses $\vec{r} \times \vec{p} =: \vec{L}$.

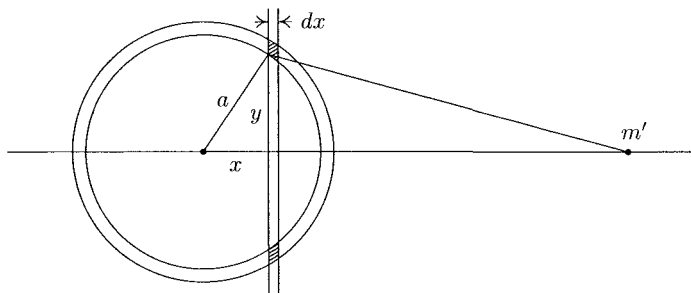


$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r}| \cdot |\vec{v} dt| \cdot \sin \alpha$$

“Für $\Delta t \rightarrow 0$ geht die Differenz der Ellipsenfläche minus Dreiecksfläche gegen Null und wir erhalten”

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r}| \cdot |\vec{v}| \sin \alpha = \frac{1}{2m} |\vec{r} \times \vec{p}| = \frac{1}{2m} |\vec{L}|.$$

Beispiel 4: Herleitung von Potential und Feldstärke des Gravitationsfeldes einer Hohlkugel:

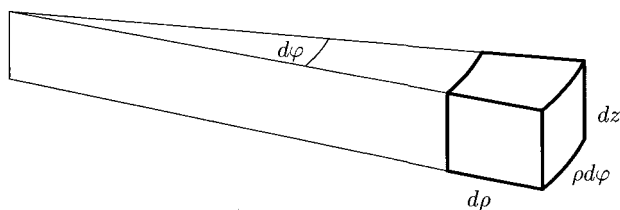


$$\text{Masse des Ringes: } dm = 2\pi y \rho ds da = 2\pi a \rho dx da$$

Dabei ist $2\pi y$ die Länge, ρ die Dichte und $ds \cdot da$ die Querschnittsfläche. Daraus folgt dann $dE_{\text{pot}} = -Gm'dm/r$ und durch Integration $E_{\text{pot}} = -Gm'm/R$ usw.

Beispiel 5: Das Wegelement $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2$ in der speziellen Relativitätstheorie.

Beispiel 6: Das Volumenelement in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) :



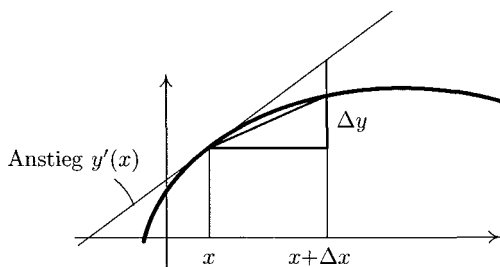
$$dV = \rho d\rho d\varphi dz$$

Wie Sie sehen können, sind die *infinitesimalen Größen* dx , dy , dz , $d\vec{p}$, $d(\vec{p} \cdot \vec{p})$, $d\vec{r}$, dW , dA , dt , da , dm , dE_{pot} , ds , dV etc. aus ihrer passiven Rolle als Bestandteil einer symbolischen Schreibweise herausgetreten und führen offenbar ein recht munteres Eigenleben.

Was sind das für *Größen*? Symbole? Wofür? Sie lesen, diese Größen seien *infinitesimal klein* oder einfach *infinitesimal* — ist es nicht erlaubt zu fragen, was das heißen soll? *Unendlich klein, aber nicht Null*? Sie verstehen das nicht?

Lassen Sie sich nicht bluffen. Reelle Größen, die größer als Null aber kleiner als jede positive Zahl sind, gibt es eben nicht, da haben Sie ganz Recht.

Das Dilemma ist dies: solange man sich dx und dy nur als Δx und Δy für *sehr kleines* $\Delta x > 0$ vorstellt, sind alle die schönen Gleichungen, die man für die infinitesimalen Größen aufgestellt hat, fehlerbehaftet. In dem durch die Skizze



dargestellten konkreten Beispiel ist eben für $\Delta x \neq 0$ immer $\Delta y < y'(x)\Delta x$, nicht $\Delta y = y'(x)\Delta x$, und analog sehen Sie in allen angeführten Beispielen, dass die Gleichungen, die für die infinitesimalen Größen angegeben sind, für die entsprechenden sogenannten *endlichen* Größen Δx , Δy usw. nicht exakt stimmen. Dass diese Gleichungen für $\Delta x \rightarrow 0$ *im Limes* richtig werden, ist ein sehr schwacher Trost, weil in diesem Limes dann immer die nichtssagende Gleichung $0 = 0$ dasteht. Die Gleichung $d(\vec{p} \cdot \vec{p}) = 2d\vec{p} \cdot \vec{p}$ stimmt "im Limes"? Na, $d(\vec{p} \cdot \vec{p}) = 3d\vec{p} \cdot \vec{p}$ stimmt im Limes auch, $0 = 0$! So kann es doch nicht gemeint sein. Welche sinnvolle, weiterverwendbare Aussage ist es denn, die mit $d(\vec{p} \cdot \vec{p}) = 2d\vec{p} \cdot \vec{p}$ ausgedrückt sein soll? Wenn sogar diese Frage unbeantwortet bleibt, wie soll denn dann erst begründet werden, weshalb man vor solche Gleichungen, $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$, einfach ein Integralzeichen machen kann usw.

Die Erfinder der Infinitesimalrechnung konnten dieses Dilemma nicht in überzeugender Weise auflösen. Sie scheinen die Vorstellung

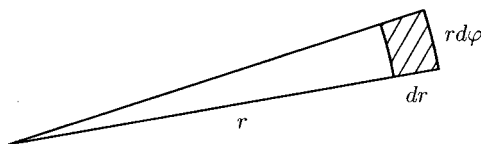
gehabt zu haben, man könne und solle dy und dx als Δy und Δx im Moment des Verschwindens auffassen — irgendwie. Vielleicht ging das gar nicht besser zu erklären, vielleicht war das der *Preis*, der für die Infinitesimalrechnung zu zahlen war? Stelle dir dx, dy als “ganz klein” vor, klopfe auf Holz und rechne!

Die *Mathematik* hat sich aus diesem Dilemma längst befreit. Die Schwammigkeit des “unendlich klein” oder “ Δy im Moment des Verschwindens” ist für die moderne Mathematik vollkommen unakzeptabel, und Sie werden im Laufe der Zeit bemerken, dass die infinitesimalen Größen aus den mathematischen Vorlesungen und der mathematischen Literatur vollständig verschwunden sind. Wir haben noch die d -Notation, aber die dy und $d\varphi$ und $d(\vec{p} \cdot \vec{p})$ haben eine ganz klare wohldefinierte Bedeutung als Differentialformen des Cartanschen Kalküls; wenn wir $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2$ schreiben, dann ist da nichts unendlich klein, sondern da steht eine Gleichung zwischen zwei 1-Formen, und die daraus folgende Gleichung

$$\int_{\gamma} df = \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\gamma} \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2$$

beruht auf einem wohldefinierten Integralkalkül, der gleichzeitig auch für die Integration über beliebige höherdimensionale Flächen in n -dimensionalen Räumen und darüber hinaus funktioniert.

Die Physik hat die Methode aber aus guten Gründen keineswegs aufgegeben. Zum Teufel mit den Skrupeln der Mathematiker! Seh' ich doch, dass der Fehler, den ich mache, wenn ich die Fläche des kleinen Ringsektors

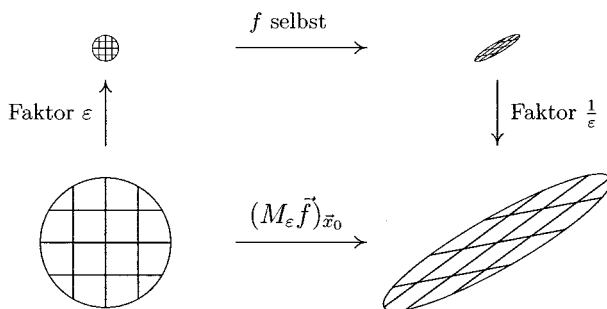


Flächenelement $rdrd\varphi$

als $rdrd\varphi$ angebe, beim Integrieren $\int_{\Omega} f(r, \varphi) rdrd\varphi$ dann keine Rolle mehr spielt, man muss die entsprechenden Grenzübergänge nicht immer wieder diskutieren! Sagt der Physiker.

Das Rechnen mit den infinitesimalen Größen hat unbestreitbare Vorteile für die Physik, wenn es auch vom Standpunkt der modernen Mathematik aus obsolet wirkt. Die Methode gibt oft zu einer analytischen Aussage einen schnellen heuristischen Zugang, der zudem den mathematischen Kernpunkt trifft und nahe am physikalischen Sinn der Formeln bleibt. Sie müssen das in den Physikvorlesungen lernen, Sie brauchen es, und Sie sollen dabei nicht das Gefühl haben, mit der Mathematik in Konflikt zu kommen. Ich will deshalb jetzt einen Versuch machen, zwischen den infinitesimalen Größen und der Mathematik, die Sie in diesem Buch vorfinden, eine Brücke zu bauen.

Betrachten Sie erst einmal, ganz im Geiste des Buches, eine offene Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^m$ und darauf eine differenzierbare Abbildung $\vec{f}: B \rightarrow \mathbb{R}^m$. Wir studieren die Abbildung in der Nähe eines festen Punktes $\vec{x}_0 \in B$. Was heißt in der Nähe? Nun, in einer ε -Kugel $\overset{\circ}{K}_\varepsilon(\vec{x}_0)$ um $\vec{x}_0$. Sei $\vec{y}_0 := \vec{f}(\vec{x}_0)$. Um besser sehen zu können, was die Abbildung in der ε -Kugel um $\vec{x}_0$ tut, richten wir das ε -**Mikroskop** auf $\vec{x}_0$ und $\vec{y}_0$:



Das ε -Mikroskop

Wir beobachten also statt $\vec{f}|_{\overset{\circ}{K}_\varepsilon(\vec{x}_0)}$ selber die durch

$$(M_\varepsilon \vec{f})_{\vec{x}_0}(\vec{v}) := \frac{1}{\varepsilon}(\vec{f}(\vec{x}_0 + \varepsilon \vec{v}) - \vec{f}(\vec{x}_0))$$

erklärte, nämlich mit dem Faktor $1/\varepsilon$ vergrößerte und durch Translation auf $0 \mapsto 0$ justierte Abbildung $(M_\varepsilon \vec{f})_{\vec{x}_0}: \overset{\circ}{K}_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$. Je höher

wir den Vergrößerungsfaktor $1/\varepsilon$ drehen, desto genauer sehen wir die Einzelheiten. Was liegt also näher, als mit $\varepsilon \rightarrow 0$ zu gehen, die Vergrößerung dieses idealen Mikroskops, wenn Sie einmal abends allein im Labor sind, nach ∞ zu schicken. Aber was passiert da? Irgend eine Katastrophe? Sehen wir dann schließlich gar nichts mehr? Leicht festzustellen: ausgedrückt durch Jacobimatrix und Fehlerterm ist die Vergrößerung

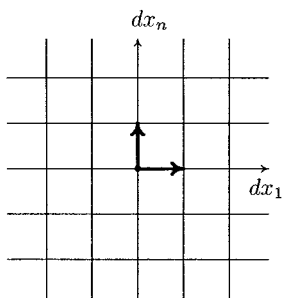
$$(M_\varepsilon \vec{f})_{\vec{x}_0}(\vec{v}) = \frac{J_{\vec{f}}(x_0)\varepsilon\vec{v} + \vec{a}(\varepsilon\vec{v})}{\varepsilon},$$

und da $\frac{1}{\varepsilon}J_{\vec{f}}(\vec{x}_0)\varepsilon\vec{v} = J_{\vec{f}}(\vec{x}_0)\vec{v}$ wegen der Linearität und $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(\varepsilon\vec{v})}{\varepsilon} = 0$ wegen der Approximationseigenschaft erster Ordnung gilt, erhalten wir

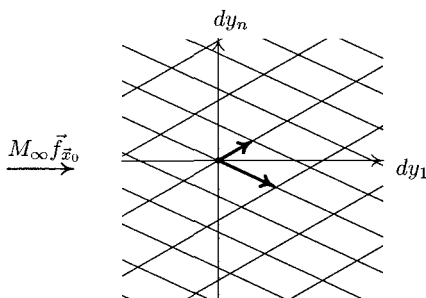
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (M_\varepsilon \vec{f})_{\vec{x}_0}(\vec{v}) = J_{\vec{f}}(x_0)\vec{v}$$

und damit das

Korollar: In ∞ -facher Vergrößerung sieht die Abbildung $\vec{f}$ bei $\vec{x}_0$ wie ihre lineare Approximation, ihr Differential aus!



Nenne die Variablen
hier $dx_1, \dots, dx_n$



Nenne die Variablen
hier $dy_1, \dots, dy_m$

Wenn Sie also mit infinitesimalen Größen arbeiten und sich Rechenschaft geben wollen, was Sie da eigentlich tun, mathematisch

gesehen, so machen Sie sich erst einmal klar, welches die *unabhängigen* Größen sind, nennen wir sie hier einmal $dx_1, \dots, dx_n$, und welches die *abhängigen*, $dy_1, \dots, dy_m$, die aus den unabhängigen ausgerechnet werden sollen. In der Physik hat man es oft nur mit *einer* unabhängigen Größe zu tun, nämlich mit dt , der Variablen im (eindimensionalen) Raum der Zeitzuwächse, wie man sagen könnte. Dann aber wieder können es auch mehrere, etwa auf Raum und Zeit bezügliche unabhängige Variable sein. Darauf ist vielleicht nicht eigens hingewiesen, Sie finden diese Information mehr zwischen den Zeilen.

Wenn Sie nun, nach Physikerbrauch, ausgehend von der bestehenden Beziehung $\vec{y} = \vec{y}(\vec{x})$ und einer Skizze, die eigentlich nur zeigt, wie an einer festen Stelle $\vec{x}_0$ der $\vec{y}$ -Zuwachs $\Delta\vec{y}$ vom $\vec{x}$ -Zuwachs $\Delta\vec{x}$ abhängt, zur dementsprechenden Berechnung von $d\vec{y}$ aus $d\vec{x}$ übergehen, *so haben Sie keine fehlerhafte Formel erzeugt, sondern durch mentales Aufdrehen der Vergrößerung des ε -Mikroskops direkt das Differential der Abbildung $\vec{x} \mapsto \vec{y}(\vec{x})$ bei $\vec{x}_0$ erblickt!* Die von Ihnen so bestimmte Zuordnung $d\vec{x} \mapsto d\vec{y}$ ist das Differential, also die lineare Abbildung, welche die nichtlineare Abbildung $\vec{y} = \vec{y}(\vec{x})$ bei $\vec{x}_0$ von erster Ordnung approximiert.

Der Unterschied zum gewöhnlichen mathematischen Dienstweg ist nur, dass Sie nicht erst partielle Ableitungen und daraus die Jacobimatrix berechnen, um diese dann auf den Spaltenvektor $d\vec{x}$ anzuwenden — was vielleicht kompliziert und jedenfalls unanschaulich sein möchte — sondern die lineare Approximation direkt aus der mikroskopischen Betrachtung der Abbildung selbst erschließen. Die Notation $d\vec{x}$ und $d\vec{y}$ für die Variablen in Original- und Zielraum des Differentials bezeichnet nichts unendlich Kleines, sondern erinnert nur an die dienende Rolle der Zuwächse $\Delta\vec{x}$ und $\Delta\vec{y}$ bei der Herleitung.

Über die *Multiplikation* infinitesimaler Größen, wie sie bei der Bestimmung von *Volumenelementen* auftreten, und das anschließende Davorsetzen eines Integralzeichens habe ich jetzt noch nichts gesagt, weil das mit mathematischen Begriffen zusammenhängt (Integraltransformationsformel), die ich Ihnen noch nicht erklärt habe, aber die mathematische Rechtfertigung auch dieser Vorgänge beruht einfach auf der Tatsache, dass die infinitesimalen Formeln das Differential beschreiben.

Lassen Sie sich also die Freude an der eleganten, oftmals das Wesentliche anschaulich darbietenden Methode der infinitesimalen Größen nicht durch unangebrachte Skrupel stören. Es hat schon alles seine Richtigkeit.

10.5 Übungsaufgaben

Aufgabe R10.1: Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ offen, $V : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare (Potential-)Funktion, $t \mapsto \vec{x}(t)$ eine C^2 -Kurve in B , die Bahnkurve eines Teilchens der Masse m , das der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} - \gamma \dot{x}_i$$

mit Reibung $\gamma > 0$ genügt. Dann ist $T = m \sum_i \frac{\dot{x}_i^2}{2}$ die kinetische Energie. Berechnen Sie $\frac{d}{dt}(T + V)$ längs der Bahn des Teilchens. Wann ist $(T + V)$ konstant?

Aufgabe R10.2: Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ die durch $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$ beschriebene Ellipsenfläche und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ definiert. Berechnen Sie den Gradienten $\text{grad}_{(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})} f$ im Punkt $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}) \in B$ und die Niveaulinie der Funktion und die ihrer linearen Approximation durch diesen Punkt.

Aufgabe R10.3: Durch

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

ist eine Abbildung $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(r, \varphi, \theta) \mapsto (x, y, z)$ gegeben (sphärische Polarkoordinaten). Berechnen Sie die Jacobimatrix und deren Determinante.

b) Bestimmen Sie an einer Stelle (r, φ, θ) das Volumenelement dV aus den infinitesimalen Größen $dr, d\varphi, d\theta$ (Skizze).

c) Bearbeiten Sie Teilaufgabe a) analog für die Zylinderkoordinaten-Abbildung $(r, \varphi, z) \mapsto (x, y, z)$ mit $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

Aufgabe T10.1: Es sei $B \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{f} : B \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung, $m < n$. Muß es zu jedem $\vec{x} \in B$ einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\vec{v}\| = 1$ geben, so daß die Richtungsableitung $\nabla_{\vec{v}} \vec{f}(\vec{x}) = 0$ ist?

Aufgabe T10.2: Ein differenzierbarer Weg $\vec{\alpha} : D \rightarrow B$, $B \subset \mathbb{R}^n$ offen, mit $\dot{\vec{\alpha}}(t) \neq 0$ für alle t , gehe immer in Richtung des Gradienten einer differenzierbaren Funktion $f : B \rightarrow \mathbb{R}$. Wie rechnet man aus, wie steil der darüber verlaufende Weg im Funktionsgebirge (d.h. auf dem Graphen von f) dann ist? Wie steil kann er maximal in dem Beispiel $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) := \frac{100}{1+x^2+y^2}$ werden?

Aufgabe T10.3: Seien $n \neq m \in \mathbb{N}$. Seien $X \subset \mathbb{R}^n$ und $Y \subset \mathbb{R}^m$ jeweils offen und nicht leer.

a) Folgern Sie aus der Kettenregel, dass es keine differenzierbare bijektive Abbildung $\vec{f} : X \rightarrow Y$ mit differenzierbarer Inversen geben kann.

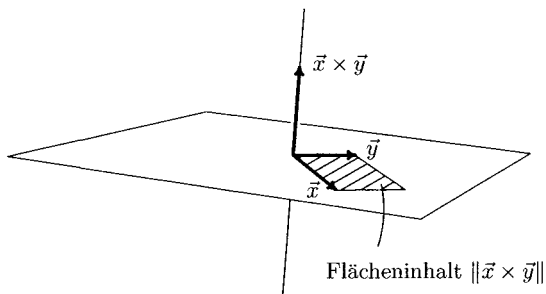
b) Für welche n, m kann es immerhin Beispiele differenzierbarer Abbildungen $\vec{f} : X \rightarrow Y$ und $\vec{g} : Y \rightarrow X$ mit $\vec{f} \circ \vec{g} = \text{Id}_Y$ geben?

11

Multilineare Abbildungen und die Determinante

11.1 Multilinearität

Sie kennen schon einige linear-algebraische *Produkte*, als deren einfachsten Prototyp ich die gewöhnliche Multiplikation von Zahlen anführen möchte: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(\lambda, \mu) \mapsto \lambda\mu$. Man kann aber auch einen Vektor mit einer Zahl multiplizieren: $\mathbb{R} \times U \rightarrow U$, $(\lambda, \vec{u}) \mapsto \lambda\vec{u}$. Wahrscheinlich haben Sie auch schon vom *inneren Produkt* oder *Skalarprodukt* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} \cdot \vec{y}$ von Vektoren des $\mathbb{R}^n$ gehört, es ist durch $\vec{x} \cdot \vec{y} := x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ definiert. In Ihrer Physikvorlesung ist vielleicht auch schon das *Kreuzprodukt* $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} \times \vec{y}$ vorgekommen.



Anschauliche Bedeutung des Kreuzprodukts

Es ist durch

$$\vec{x} \times \vec{y} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

definiert. Sodann kennen wir natürlich das *Matrizenprodukt*

$$\mathbb{R}^{p \times m} \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times n}, (A, B) \mapsto AB,$$

wobei $\mathbb{R}^{p \times m}$ den Raum der $p \times m$ -Matrizen bezeichnen soll, was ja beinahe dasselbe ist wie $\mathbb{R}^{pm}$: zwar sind die Matrizen statt in einer langen Spalte in einer $p \times m$ -Tabelle geschrieben, aber $A_1 + A_2$ und λA werden in $\mathbb{R}^{p \times m}$ genau so ‘elementweise’ gebildet wie im $\mathbb{R}^{pm}$. Die Anwendung $\mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $(A, \vec{x}) \mapsto A\vec{x}$ von Matrizen auf Vektoren können wir auch als Spezialfall der Matrizenmultiplikation lesen, wenn wir $\vec{x}$ als $n \times 1$ -Matrix auffassen.

Das sind nur Beispiele von Produktbildungen, die Ihnen schon begegnet *sind*, mehrere andere *werden* Ihnen erst noch begegnen, zum Beispiel der **Kommutator** oder das **Lie-Produkt** quadratischer Matrizen,

$$\mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, (A, B) \mapsto [A, B] := AB - BA,$$

das ich Ihnen hier schnell hinschreibe, wenn ich auf den Sinn dieser Produktbildung jetzt auch nicht eingehen kann, oder das mit dem *Tensorprodukt* der Mathematik nahe verwandte *dyadische Produkt* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto (x_i y_j)_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, m}$ und einige andere.

Die vom Produkt von Zahlen vertrauten Eigenschaften des Multiplizierens bleiben aber bei diesen fremdartigen Produkten nicht alle bestehen, z.B. hatten wir schon gesehen, dass $AB \neq BA$ beim Produkt quadratischer Matrizen vorkommt (was das Lie-Produkt erst interessant macht), Produkte sind im Allgemeinen nicht *kommutativ*. Oder: auch wenn das Produkt zweier Objekte a, b wieder vom selben Typ ist, so dass man es mit einem dritten solchen multiplizieren kann, (was nicht immer der Fall ist), so braucht die Produktbildung nicht *assoziativ* zu sein, d.h. es braucht nicht $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ zu gelten. Die Matrizenmultiplikation ist zwar assoziativ: $(AB)C = A(BC)$, weil beides ja einfach $A \circ B \circ C$ ist,

das Kreuzprodukt jedoch nicht:

$$\begin{aligned}(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \times \vec{e}_2 &= \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \\ \vec{e}_1 \times (\vec{e}_2 \times \vec{e}_2) &= \vec{e}_1 \times 0 = 0.\end{aligned}$$

Auf eines aber ist Verlass: alle diese Produkte sind *bilinear*, d.h. hält man den einen Faktor fest, so hängt das Produkt *linear* von dem anderen Faktor ab, sonst würde man die Verknüpfung gar nicht “Produkt” nennen. Ganz analog sind Produkte aus mehreren Faktoren *multilinear*, und diese Eigenschaft wollen wir jetzt näher kennenlernen.

Definition: Es seien $U_1, \dots, U_r$ und V Untervektorräume irgendwelcher $\mathbb{R}^n$'s. Eine Abbildung

$$\begin{aligned}\omega : U_1 \times \dots \times U_r &\longrightarrow V \\ (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r) &\longmapsto \omega(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)\end{aligned}$$

heißt **linear in der i -ten Variablen**, wenn stets

$$\begin{aligned}\omega(\vec{u}_1, \dots, \lambda \vec{u}_i, \dots, \vec{u}_r) &= \lambda \omega(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r) \quad \text{und} \\ \omega(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_i + \vec{u}'_i, \dots, \vec{u}_r) &= \omega(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r) + \omega(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}'_i, \dots, \vec{u}_r)\end{aligned}$$

gilt, und ist ω in *jeder* der r Variablen linear, so heißt ω **multilinear**. □

Im Fall $r = 1$ ist das die gewöhnliche Linearität, für $r = 2, 3, \dots$ sagt man **bilinear**, **trilinear**, usw., allgemeiner eben **r -linear** oder multilinear.

Man bekommt eine gute rechnerische Intuition von der Multilinearität, wenn man sich $\omega(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ als eine Art *Produkt* der $\vec{u}_i$ denkt, dann erwartet man z.B. gleich ganz richtig, dass etwa im bilinearen Falle beim Ausrechnen von $\omega(\vec{u}_1 + \vec{u}'_1, \vec{u}_2 + \vec{u}'_2)$ vier Terme entstehen: wegen der Linearität in der ersten Variablen zunächst

$$\omega(\vec{u}_1 + \vec{u}'_1, \vec{u}_2 + \vec{u}'_2) = \omega(\vec{u}_1, \vec{u}_2 + \vec{u}'_2) + \omega(\vec{u}'_1, \vec{u}_2 + \vec{u}'_2)$$

und daraus weiter, wegen der Linearität in der zweiten Variablen,

$$\dots = \omega(\vec{u}_1, \vec{u}_2) + \omega(\vec{u}_1, \vec{u}'_2) + \omega(\vec{u}'_1, \vec{u}_2) + \omega(\vec{u}'_1, \vec{u}'_2).$$

Nutzen wir das gleich einmal in großem Stile aus:

Lemma 1: Sind $U_1, \dots, U_r$ Untervektorräume der Dimensionen $d_1, \dots, d_r$ und ist für jedes U_i eine Basis

$$(\vec{u}_1^{(i)}, \dots, \vec{u}_{d_i}^{(i)}) =: (\vec{u}_{\mu_i}^{(i)})_{\mu_i=1, \dots, d_i}$$

gegeben, so gibt es für jede gegebene Familie

$$(\omega_{\mu_1 \dots \mu_r})_{1 \leq \mu_i \leq d_i, i=1, \dots, r}$$

von Elementen von V genau eine multilineare Abbildung

$$\omega : U_1 \times \dots \times U_r \longrightarrow V,$$

welche die Basisvektoren auf die vorgegebenen Elemente von V abbildet, d.h. welche $\omega(\vec{u}_{\mu_1}^{(1)}, \dots, \vec{u}_{\mu_r}^{(r)}) = \omega_{\mu_1 \dots \mu_r}$ für alle Indizes erfüllt, und diese multilineare Abbildung ω ist durch die Formel

$$\omega(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r) = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_r} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \lambda_{\mu_1}^{(1)} \cdot \dots \cdot \lambda_{\mu_r}^{(r)},$$

gegeben, wobei die $\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_{d_i}^{(i)} \in \mathbb{R}$ jeweils die Entwicklungskoeffizienten von $\vec{x}_i$ nach der Basis in U_i bezeichnen.

Definition: Die $\omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \in V$ heißen dann die **Koeffizienten** oder **Komponenten** der multilinearen Abbildung ω bezüglich der gegebenen Basen. $\square$

BEWEIS DES LEMMAS: Bevor wir mit dem Beweis richtig anfangen, wollen wir das Lemma in Ruhe lesen, was wegen der vielen Indices gar nicht so einfach ist. Für $r = 2$ wäre die Familie $(\omega_{\mu_1 \dots \mu_r})_{1 \leq \mu_i \leq d_i, i=1 \dots r}$ eine $(d_1 \times d_2)$ -Matrix aus Elementen von V , für $r = 3$ gleichsam ein "Quader" voller Elemente von V , eine Tabelle mit drei Eingängen, ein PC versteht das leicht. Ginge es nur um diese beiden Fälle, so würden wir die Koeffizienten wahrscheinlich auch lieber mit ω_{ij} bzw. ω_{ijk} bezeichnen, statt *indizierte Indices* μ_1, μ_2, μ_3 zu benutzen, aber was bleibt uns bei $r = 100$ anderes übrig, als die hundert Indices, die wir brauchen, selbst wieder zu numerieren und sie etwa $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{100}$ zu nennen.

Weshalb tragen die Basisvektoren $\vec{u}_{\mu_i}^{(i)}$ von U_i den Index i auch noch einmal als oberen Index? Genügt nicht das i am unteren Index μ_i um anzuzeigen, dass wir im i -ten Vektorraum U_i sind? Solange nur der Index-Name μ_i da steht, würde das schon genügen, aber sobald eine konkrete Zahl dafür eingesetzt werden muss, ist das i nicht mehr zu sehen, zum Beispiel würde ja, wenn wir den oberen Index nicht hätten, der erste Vektor in jeder der r Basen $\vec{u}_1$ heißen, und das geht doch nicht an. Aus demselben Grunde müssen auch die Entwicklungskoeffizienten in

$$\vec{x}_i = \sum_{\mu_i=1}^{d_i} \lambda_{\mu_i}^{(i)} \vec{u}_{\mu_i}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, r.$$

einen oberen Index tragen, das ist nun einmal nicht zu vermeiden. Aber die Einsicht, weshalb die vielen Indices gebraucht werden, erleichtert das Lesen indexreicher Formeln ganz beträchtlich.

Beginnen wir nun mit dem Beweis der Eindeutigkeitsaussage. Wenn ω eine multilineare Abbildung mit den geforderten Koeffizienten ist, dann können wir $\omega(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r)$, $\vec{x}_i \in U_i$, aus den Koeffizienten $\omega_{\mu_1 \dots \mu_r}$ ausrechnen. Wegen der Linearität in der ersten Variablen muss

$$\omega(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r) = \sum_{\mu_1=1}^{d_1} \lambda_{\mu_1}^{(1)} \omega(\vec{u}_{\mu_1}^{(1)}, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_r)$$

sein, wegen der Linearität in der zweiten Variablen sodann

$$\omega(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r) = \sum_{\mu_1=1}^{d_1} \sum_{\mu_2=1}^{d_2} \lambda_{\mu_1}^{(1)} \lambda_{\mu_2}^{(2)} \omega(\vec{u}_{\mu_1}^{(1)}, \vec{u}_{\mu_2}^{(2)}, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_r)$$

und induktiv so weiter, bis

$$\omega(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r) = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_r} \lambda_{\mu_1}^{(1)} \cdot \dots \cdot \lambda_{\mu_r}^{(r)} \omega(\vec{u}_{\mu_1}^{(1)}, \dots, \vec{u}_{\mu_r}^{(r)}),$$

und wenn ω die vorgeschriebenen Koeffizienten $\omega_{\mu_1 \dots \mu_r}$ hat, dann heißt das also gerade

$$\omega(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r) = \sum_{\mu_1, \dots, \mu_r} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \lambda_{\mu_1}^{(1)} \cdot \dots \cdot \lambda_{\mu_r}^{(r)}.$$

Diese Formel beweist auch die Eindeutigkeit, jede Konkurrenzform $\tilde{\omega}$ müsste sie ja auch erfüllen. Für den Existenzbeweis benutzt man sie zur *Definition* von ω und hat dann zu zeigen, dass ω multilinear ist und die vorgeschriebenen Koeffizienten hat, was aber ganz leicht ist. $\dots \square$

Kurz, wenn auch etwas undeutlich: Wie lineare, so kann man auch *multilineare* Abbildungen auf Basisvektoren beliebig vorschreiben.

11.2 Symmetrieeigenschaften

In diesem Abschnitt betrachten wir den Fall, dass die Variablen alle aus dem selben Raum $U_1 = \dots = U_r =: U$ sind. Dann hat es einen Sinn, danach zu fragen, wie sich eine multilineare Abbildung $U \times \dots \times U \rightarrow V$ beim *Vertauschen* zweier Variablen verhält.

Definition: Eine multilineare Abbildung $\omega : U \times \dots \times U \rightarrow V$ heißt ***symmetrisch***, wenn die Vertauschung zweier Variablen jeweils nichts und sie heißt ***alternierend***, wenn die Vertauschung zweier Variablen jeweils nur eine Vorzeichenänderung bewirkt, wenn also

$$\omega(\dots \vec{u}_i \dots \vec{u}_j \dots) = \pm \omega(\dots \vec{u}_j \dots \vec{u}_i \dots)$$

für alle $i \neq j$, gemeint ist das Vorzeichen $+$ im symmetrischen, $-$ im alternierenden Fall. Bei bilinearen Abbildungen sagt man statt alternierend auch ***schiefssymmetrisch***. $\square$

Ist $\tau : \{1, \dots, r\} \rightarrow \{1, \dots, r\}$ eine bijektive Abbildung, eine sogenannte ***Permutation***, so gilt für symmetrische multilineare Abbildungen offenbar stets

$$\omega(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r) = \omega(\vec{u}_{\tau(1)}, \dots, \vec{u}_{\tau(r)}).$$

Bei alternierenden multilinearen Abbildungen ändert *eine* Vertauschung das Vorzeichen, *zwei* nacheinander ausgeführte ändern also nichts. Mit welcher Vorzeichenänderung eine alternierende multilineare Abbildung auf eine Permutation der Variablen reagiert hängt also davon ab, wieviele Vertauschungen man braucht, um die Permutation herzustellen:

Notiz: Für alternierendes ω gilt

$$\omega(\vec{u}_{\tau(1)}, \dots, \vec{u}_{\tau(r)}) = \text{sgn}(\tau) \omega(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$$

wobei $\text{sgn}(\tau) = \pm 1$ je nachdem, ob die Permutation τ durch eine gerade Anzahl von Vertauschungen bewirkt werden kann, eine **gerade Permutation** ist, oder nicht. $\square$

Eine weniger formale, sofort als inhaltlich wichtig erkennbare Charakterisierung des Alternierens spricht das folgende Lemma aus. Zum Beispiel lesen wir daraus ab, dass es im Falle $r > \dim U$ gar keine andere alternierende multilineare Abbildung gibt als die *Nullabbildung*:

Lemma 2: Eine multilineare Abbildung $\omega : U \times \dots \times U \rightarrow V$ in r Variablen ist genau dann alternierend, wenn sie auf jedes linear abhängige r -tupel mit Null antwortet.

BEWEIS: “ $\Rightarrow$ ”: Sei also ω alternierend. Dann antwortet ω jedenfalls auf solche r -tupel $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ mit Null, in denen ein Vektor zweimal vorkommt, denn die Vertauschung dieser beiden bewirkt dann einerseits nichts, weil sie ja gleich sind, andererseits einen Vorzeichenwechsel des ω -Wertes, weil ω alternierend ist. Sei nun $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ irgend ein linear abhängiges r -tupel. Dann ist einer der Vektoren, oBdA der erste, eine Linearkombination der übrigen,

$$\vec{u}_1 = \lambda_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_r \vec{u}_r,$$

und daher

$$\omega(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r) = \sum_{i=2}^r \lambda_i \omega(\vec{u}_i, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r) = 0.$$

weil in $(\vec{u}_i, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r)$ der Vektor $\vec{u}_i$ zweimal vorkommt. “ $\Rightarrow$ ” $\square$

“ $\Leftarrow$ ”: Sei jetzt also von einer multilinearen Abbildung ω vorausgesetzt, dass sie auf linear abhängige r -tupel mit Null antwortet. Zu zeigen ist, dass ω bei Vertauschung zweier Variablen in $-\omega$

übergeht. Da ein r -tupel mit zwei gleichen Vektoren gewiss linear abhängig ist, bewirkt die jetzt vorausgesetzte Eigenschaft nicht nur, dass für $i \neq j$ stets

$$\omega(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_i + \vec{u}_j, \dots, \vec{u}_i + \vec{u}_j, \dots, \vec{u}_r) = 0$$

gilt, sondern auch, dass von den vier Termen, welche sich aus der linken Seite wegen der Linearität in der i -ten und j -ten Variablen ergeben, nur zwei übrigbleiben, nämlich es bleibt

$$\omega(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_i, \dots, \vec{u}_j \dots \vec{u}_r) + \omega(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_j, \dots, \vec{u}_i \dots \vec{u}_r) = 0,$$

also die Vertauschungsbedingung für alternierende Abbildungen.

“ $\Leftarrow$ ” $\square$

$\square$

Wie spiegeln sich die Symmetrieeigenschaften in Anwesenheit einer Basis in den Koeffizienten wider? Das ist ganz einfach:

Bemerkung: Sind $\omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \in V$ die Koeffizienten einer multilinearen Abbildung $\omega : U \times \dots \times U \rightarrow V$ bezüglich einer (und derselben, in jedem Faktor) Basis von U , so ist ω genau dann symmetrisch, wenn sich $\omega_{\mu_1 \dots \mu_r}$ bei Vertauschung von Indices nicht ändert, und ω ist genau dann alternierend, wenn $\omega_{\mu_1 \dots \mu_r}$ bei Vertauschung zweier Indices nur das Vorzeichen ändert. $\square$

Zur Angabe einer symmetrischen multilinearen Abbildung

$$\omega : U \times \dots \times U \rightarrow V$$

zu gegebener Basis von U braucht man von der ganzen Koeffizientenfamilie also nur die $\omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \in V$ mit aufsteigenden Indices $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_r$ zu kennen bzw. kann sie vorgeben, die übrigen gehen durch Permutation der Indices daraus hervor. Zur Angabe einer *alternierenden* multilinearen Abbildung braucht man sogar nur die Koeffizienten $\omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \in V$ mit *streng* aufsteigenden Indices $\mu_1 < \dots < \mu_r$ zu kennen bzw. kann sie beliebig vorgeben, denn die Koeffizienten mit zwei gleichen Indices sind sowieso Null und die anderen ergeben sich durch

$$\omega_{\mu_{\tau(1)} \dots \mu_{\tau(r)}} = \text{sgn } \tau \omega_{\mu_1 \dots \mu_r}$$

aus denen mit streng aufsteigenden Indices.

11.3 Die Determinante

Vielleicht kommt Ihnen das alles etwas trocken vor. Jonglieren mit indizierten Indices, Permutationen und Vorzeichen! Na ja, hoffen Sie vielleicht, es wird nicht alles so allgemein gegessen wie es gekocht wird. Vielleicht kommt es letzten Endes nur auf den Fall $r = 2$ an.

Diese Hoffnung muss ich Ihnen allerdings rauben. Zum Trost kann ich aber auch versprechen, dass es jetzt gleich sehr inhaltsreich wird, weil wir ein ganz wichtiges Instrument der linearen Algebra und der Analysis in die Hand bekommen, den Begriff der *Determinante* quadratischer Matrizen. Und außerdem hat eine große Variablenzahl unter Umständen auch eine vereinfachende Wirkung, ist z.B. $\dim U = r$, müssen sich die Indices μ_i also zwischen 1 und r aufhalten, so gibt es doch nur *ein einziges* streng aufsteigendes r -Tupel $\mu_1 < \dots < \mu_r$ von Indices, nämlich $(1, 2, \dots, r)$. Das heißt aber, dass es bei gegebener Basis von U auch zu jedem $\vec{v} \in V$ genau *eine* alternierende r -lineare Abbildung mit $\omega_{12\dots r} = \vec{v}$ gibt! Und wir wissen aus Lemma 1 in Abschnitt 11.1, wie man die konstruiert:

Lemma 3: Ist $\dim U = r$, so gibt es in Anwesenheit einer Basis $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ für U zu jedem $\vec{v} \in V$ genau eine alternierende r -lineare Abbildung $\omega : U \times \dots \times U \rightarrow V$ mit $\omega(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r) = \vec{v}$, nämlich

$$\omega(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_r) := \vec{v} \sum_{\tau \in S_r} \operatorname{sgn} \tau \cdot \lambda_{\tau(1)}^{(1)} \cdot \dots \cdot \lambda_{\tau(r)}^{(r)}$$

wobei S_r die Menge der Permutationen und $\lambda_1^{(j)}, \dots, \lambda_r^{(j)}$ die Entwicklungskoeffizienten von $\vec{x}_j$ bezüglich der Basis von U bezeichnen, mit der gearbeitet wird. $\square$

Das müssen wir uns für den Fall $U := \mathbb{R}^n$, $V := \mathbb{R}$, $r := n$ und die Standardbasis $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ einmal genauer ansehen.

Definition: Die einzige alternierende multilineare Abbildung

$$\det : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

in n Variablen mit $\det(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = 1$ heißt die Determinantenfunktion oder kurz **die Determinante**. Ist A eine $n \times n$ -Matrix

mit den Spalten $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$, so nennt man die Zahl

$$\det A := \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \in \mathbb{R}$$

die Determinante von A .

□

Welche Art von Information über die Matrix in der Determinante der Matrix enthalten ist, lässt sich ohne Arbeit, durch bloßen Blick auf die Definition, nicht ohne weiteres erkennen. Sehr nahe an der Definition, und daher leicht zu entschlüsseln, ist was das Verschwinden oder Nichtverschwinden der Determinante für die Matrix bedeutet:

Lemma 4: Die folgenden Aussagen über eine $n \times n$ -Matrix A sind alle gleichbedeutend:

- (1) $\det A \neq 0$
- (2) die Spalten sind linear unabhängig
- (3) $\operatorname{rg} A = n$
- (4) $\operatorname{Kern} A = \{0\}$
- (5) A ist invertierbar
- (6) $A\vec{x} = \vec{b}$ ist stets eindeutig lösbar.

BEWEIS: (1) $\Rightarrow$ (2): Wären die Spalten linear *abhängig*, so würde $\det$, wie jede alternierende Abbildung, mit Null antworten, aber $\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) =: \det A \neq 0$. (1) $\Rightarrow$ (2) □

(2) $\Rightarrow$ (1): Jetzt ist $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ als Basis von $\mathbb{R}^n$ vorausgesetzt, und $\det A$ ist also der Koeffizient $\det_{12\dots n}$ bezüglich dieser Basis. Wäre daher $\det A = 0$, so wäre $\det \equiv 0$, im Widerspruch zu $\det(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = 1$. (2) $\Rightarrow$ (1) □

Damit sind wir mit dem Beweis aber schon fertig, denn (2) $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow$ (6) wissen wir eh' aus dem Kapitel 9. □

Sie wollen natürlich Determinanten auch ausrechnen können. Eine Formel! Bekommen Sie, freilich. Mehrere! Nur jetzt noch nicht.

Lemma 5: Für $n \times n$ -Matrizen gilt

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B,$$

insbesondere für invertierbare Matrizen wegen $AA^{-1} = E$ und $\det E = 1$ also

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$$

BEWEIS: Für jede Matrix A definieren wir eine alternierende multilineare Abbildung $\omega : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\omega(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) := \det(AB).$$

Ja? Ist ω wirklich multilinear? Natürlich, die j -te Spalte von AB ist doch nichts anderes als $AB\vec{e}_j = A\vec{b}_j$, also

$$\omega(\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n) = \det(A\vec{b}_1, \dots, A\vec{b}_n),$$

und $\vec{b}_i \mapsto A\vec{b}_i$ ist linear, die Multilinearität von ω folgt also aus der von $\det$, und ebenso das Alternieren, denn ω reagiert auf Vertauschen zweier Variablen mit Vorzeichenumkehr, weil $\det$ es tut. Also ist $\omega : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine n -lineare Abbildung mit dem Koeffizienten $\omega(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = \det(A\vec{e}_1, \dots, A\vec{e}_n) = \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \det A$ — genau wie das $(\det A)$ -fache von $\det : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$! Also ist $\omega = \det A \cdot \det$, insbesondere $\omega(B) = \det A \cdot \det B$, was zu zeigen war. $\square$

So haben wir die wichtige Multiplikativität $\det(AB) = \det A \det B$ durch bloßes Denken bewiesen, wenn ich Ihnen schon eine Formel für $\det A$ gegeben hätte, hätten Sie natürlich die Multiplikativität von $\det$ *ausrechnen* wollen.

Sie brauchen aber, zu anderen Zwecken, auch Rechenformeln. Direkt aus der Definition, die sich ja auf das Lemma 2 berief, folgt:

Lemma 6: (Leibniz-Formel): Für $n \times n$ -Matrizen gilt:

$$\det A = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn} \tau \cdot a_{\tau_1 1} a_{\tau_2 2} \cdots a_{\tau_n n},$$

wobei S_n die Menge aller Permutationen $\tau : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ bezeichnet und zur Abkürzung τ_i statt $\tau(i)$ geschrieben ist.

BEWEIS: In unserem Falle ist $V = \mathbb{R}$ und $\vec{v} = 1$, und die Entwicklungskoeffizienten $\lambda_1^{(j)}, \dots, \lambda_n^{(j)}$ der j -ten Spalte $\vec{a}_j$ von A bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ sind die Komponenten der Spalte, also $a_{1j}, \dots, a_{nj}$, und so ergibt sich die Leibniz-Formel. $\square$

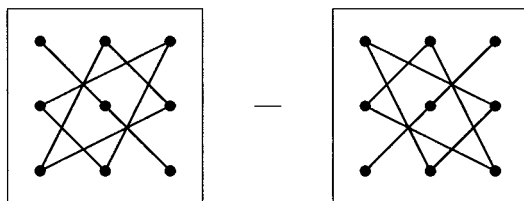
Für kleine Matrizen ist die Leibniz-Formel zum Berechnen der Determinante schon zu gebrauchen, doch, doch. Sie sagt uns

$$\det(a) = a$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

aber um sich die letzte Formel zu merken, braucht man schon eine kleine graphische Gedächtnisstütze, zum Beispiel diese:



Merkregel zur Determinantenberechnung für 3×3 -Matrizen

Für $n \geq 4$ wird es aber bedenklich, denn die Leibniz-Formel will, dass wir die Determinante als eine Summe von $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n =: n!$ Produkten von je n Faktoren berechnen. Wenn Sie also meinen, unbedingt die Determinante einer konkreten großen, ziemlich vollgeschriebenen Matrix numerisch berechnen zu sollen, dann wird es gut sein, sich nach einer intelligenteren Rechenmethode umzusehen, wovon gleich mehr. Vorerst legen wir aber die Leibnizformel noch nicht aus der Hand, denn sie verhilft uns zu wichtigen theoretischen Einsichten in das Wesen der Determinante.

Schreibt man die Spalten einer Matrix in derselben Reihenfolge als *Zeilen*, versetzt oder *transponiert* man also jede Komponente a_{ij} von ihrem Platz (i, j) auf den Platz (j, i) , so erhält man eine neue Matrix mit einem besonderen Namen:

Definition: Ist A eine $m \times n$ -Matrix, so heißt die durch $a_{ij}^t := a_{ji}$ definierte $n \times m$ -Matrix A^t die zu A **transponierte** Matrix.

Aus Spalten sind jetzt also Zeilen, aus Zeilen Spalten geworden. Um nicht vom Hundertsten ins Tausendste zu kommen, kann ich Ihnen jetzt nicht erzählen, weshalb es mathematisch interessant ist, diesen Vorgang zu betrachten, es schadet nichts, wenn Sie ihn einstweilen als eine Spielerei ansehen. Natürlich gilt $(A + B)^t = A^t + B^t$, aber $(AB)^t = B^t A^t$, denn ist $C = AB$ eine Produktmatrix, also $c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$, so folgt $c_{ji} = \sum_{k=1}^m a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^m b_{ik}^t a_{kj}^t$. Für die Einheitsmatrix gilt natürlich $E^t = E$, sind also A und B invers zueinander, so auch A^t und B^t , oder $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

Aus diesen Rechenregeln und dem Rangsatz folgt übrigens, dass A und A^t immer denselben Rang haben, denn ist $A = \Psi E_r^{m \times n} \Phi^{-1}$ für geeignete Isomorphismen Φ und Ψ , und so lässt sich nach dem Rangsatz ja jede Matrix vom Rang r schreiben, so ist auch $A^t = \Psi^t E_r^{n \times m} (\Phi^{-1})^t$ und hat deshalb ebenfalls den Rang r , wir haben also das

Korollar aus dem Rangsatz: Für $m \times n$ -Matrizen gilt

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^t .$$

□

Man sagt dafür auch *Spaltenrang ist Zeilenrang*, denn die Aussage des Korollars bedeutet, dass auch die Maximalzahl linear unabhängiger *Zeilen* gleich dem Rang der Matrix ist.

Aus der Leibnizformel läßt sich nun auch *Spaltendeterminante ist Zeilendeterminante* schließen, nämlich:

Korollar aus der Leibnizformel: Für $n \times n$ -Matrizen gilt

$$\det A = \det A^t .$$

BEWEIS: Aus der Leibnizformel lesen wir eine sozusagen *transponierte Leibnizformel* ab: für $n \times n$ -Matrizen gilt auch

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma_n}.$$

Das ist nur eine andere Sortierung der Summanden, in jedem Summanden der Leibnizformel können wir die Faktoren auch nach dem ersten Index anordnen:

$$a_{\tau_1 1} \cdot \dots \cdot a_{\tau_n n} =: a_{1\sigma_1} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma_n},$$

nämlich mit $\sigma = \tau^{-1}$, und es gilt $\operatorname{sgn} \tau = \operatorname{sgn} \tau^{-1}$, denn mit derselben Anzahl von Vertauschungen, mit denen wir die Bücher durcheinander gebracht hatten, können wir sie auch wieder aufräumen. Die rechte Seite dieser damit bewiesenen transponierten Leibnizformel ist aber dasselbe wie die rechte Seite der gewöhnlichen Leibnizformel für A^t , also gilt $\det A = \det A^t$. $\square$

Insbesondere ist die Determinante als Abbildung, die jeder $n \times n$ -Matrix eine Zahl zuordnet, nicht nur multilinear in den *Spalten* der Matrix, wie es ja die Definition schon ausspricht, sondern auch in den *Zeilen*!

Aus der Leibnizformel folgen auch die sogenannten *Entwicklungsformeln* für die Determinante. Als Rechenrezepte für große Zahlenbeispiele sind sie wie die Leibnizformel selbst nur von begrenztem Wert, aber anderweitig nützlich. Ich erkläre es exemplarisch am Beispiel der Entwicklung der Determinante *nach der ersten Spalte*.

Dazu schreiben wir $\det A$ als die Summe $\sum_{i=1}^n X_i$ die man erhält, wenn man im i -ten Summanden alle Terme der Leibnizformel zusammenfasst, die den Faktor a_{i1} enthalten. Wie sieht das aus?

$$X_i = a_{i1} \sum_{\substack{\tau \in S_n \\ \tau(1)=i}} \operatorname{sgn} \tau \cdot a_{\tau_2 2} \cdot \dots \cdot a_{\tau_n n}$$

Die hier auftretende Summe über alle Permutationen mit $\tau(1) = i$ sieht selbst fast wie eine mit der Leibnizformel berechnete Determinante einer $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix aus, nämlich der Matrix, die man

aus A gewinnt, wenn man die erste Spalte, nach der wir entwickeln, und die i -te Zeile streicht. Für solche aus Zeilen- und Spaltenstreichung hervorgehende *Untermatrizen* gibt es eine eigene Notation:

Schreibweise: Ist A eine $n \times n$ -Matrix, so wird die durch Weglassen der i -ten Zeile und j -ten Spalte daraus hervorgehende $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix mit A_{ij} bezeichnet. $\square$

Wir ahnen schon, dass $X_i = \pm a_{i1} \det A_{i1}$ sein muss, und vertieft man sich in die Beziehung zwischen dem Signum von τ und dem Signum der Permutation der Zeilenindizes von A_{i1} , die durch τ bewirkt wird, so findet man, dass es mit dem Vorzeichen $(-1)^{i+1}$ richtig wird, also $\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1}$ gilt. Das ist die Formel für die Entwicklung nach der ersten Spalte, und analog ergeben sich Formeln für die Entwicklung nach der j -ten Spalte und wegen $\det A = \det A^t$ auch nach der i -ten Zeile und wir erhalten aus der Leibnizformel:

Entwicklungsformeln: Für jede $n \times n$ -Matrix A gilt

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij},$$

was die Entwicklung nach der j -ten Spalte genannt wird, und analog

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij},$$

als Entwicklung nach der i -ten Zeile. $\square$

Enthält eine Zeile oder Spalte viele Nullen, so kann es ein Rechenvorteil sein, danach zu entwickeln. Ein gewichtigerer Nutzen der Entwicklungsformeln besteht darin, dass sie oft ermöglichen, Aussagen über Determinanten durch Induktion nach der Größe der Matrix zu führen. Aber der Hauptgrund, weshalb ich die Entwicklungsformeln mit in das Programm dieses ohnehin übervollen Determinanten-Abschnitts aufnehme, ist die daraus hergeleitete Formel für die inverse Matrix:

Korollar (Inversionsformel): Definiert man zu A eine Matrix B durch

$$b_{ij} := (-1)^{i+j} \det A_{ji},$$

so gilt

$$AB = \begin{pmatrix} \det A & & \\ & \ddots & \\ & & \det A \end{pmatrix}$$

für Matrizen mit $\det A \neq 0$ also

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} B.$$

Beweis: $C = AB$ bedeutet $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$, für $i = j$ ist das gerade die Entwicklungsformel für $\det A$ nach der i -ten Zeile, also $c_{ii} = \det A$. Für $i \neq j$ ist's aber auch als Entwicklungsformel nach der j -ten Zeile für die Determinante einer Matrix zu lesen, allerdings nicht von A . Von welcher Matrix denn? In A_{jk} geht die j -te Zeile von A nicht ein, die wurde ja gerade gestrichen. Deshalb merkt es A_{jk} gar nicht, wenn wir *vor* dem Wegstreichen der j -ten Zeile diese j -te Zeile von A durch die i -te ersetzen, auf diese Weise eine Matrix $\tilde{A}$ herstellend! Dann ist aber

$$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj} = \sum_k (-1)^{j+k} a_{ik} \det A_{jk} = \det \tilde{A}$$

die Entwicklungsformel nach der j -ten Zeile von

$$\tilde{A} = \begin{array}{ccc|l} & & & \\ \hline a_{i1} & \dots & a_{in} & i\text{-te Zeile} \\ \hline & & & \\ a_{i1} & \dots & a_{in} & j\text{-te Zeile, fehlt sowieso in } A_{jk} \\ \hline & & & \end{array}$$

Aber $\det \tilde{A} = 0$, weil $\tilde{A}$ zwei gleiche Zeilen hat und die Determinante multilinear und alternierend in den Zeilen ist. $\square$

Diese Inversionsformel ist für größere Matrizen kein praktisches Rechenverfahren, dazu ist sie auch nicht da, aber sie zeigt ganz explizit die Natur der Zuordnung $A \mapsto A^{-1}$, z.B. dass dies eine C^∞ -Abbildung ist, und man kann sich in solchen in der Analysis sehr wichtigen Fragen immer darauf berufen (“das sieht man aus der Inversionsformel”), wo man sonst in Verlegenheit käme.

Für *kleine*, jedenfalls für 2×2 - und 3×3 -Matrizen ist die Inversionsformel auch zum Rechnen gut: 1) Jedes a_{ij} durch $\det A_{ij}$ ersetzen, also durch die Determinante der kleineren Matrix, die durch Wegstreichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte entsteht, 2) Matrix $(\det A_{ij})$ zu $(\det A_{ji})$ kippen, 3) Schachbrettvorzeichen anbringen:

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$$

4) Jedes Matrixelement b_{ij} durch $\det A$ dividieren — fertig ist die inverse Matrix. Aber wozu sage ich das? Genau das spricht ja die Inversionsformel auch alleine aus. Vom Invertieren großer Matrizen soll am Ende des Abschnitts 12.1 die Rede sein.

Zuletzt aber wie versprochen ein praktisches Verfahren zur Berechnung der Determinante großer Matrizen. Eigentlich kennen Sie es schon, nämlich vom Rangbestimmungsverfahren her. Was wir dort die *Rangablesegestalt* genannt hatten, ist für quadratische Matrizen auch eine *Determinantenablesegestalt*, genauer:

Bemerkung: Ist die $n \times n$ -Matrix A eine obere **Dreiecksmatrix**,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

d.h. ist $a_{ij} = 0$ für alle $i < j$, so gilt

$$\det A = a_{11} \cdot \dots \cdot a_{nn},$$

denn alle anderen Produkte in der Leibnizformel enthalten einen Faktor Null. Analog für untere Dreiecksmatrizen. □

Durch Entwicklung nach der letzte Zeile und Induktion nach n sieht man's natürlich auch.

Vom Rangbestimmungsverfahren her wissen wir, dass man eine quadratische Matrix immer durch elementare Spalten- und Zeilenumformungen in Dreiecksgestalt bringen kann (Stichwort *Killerzeile*). Wie reagiert die Determinante auf elementare Umformungen? Jedenfalls auf Spalten- und Zeilenumformungen auf gleiche Weise, wegen $\det A = \det A^t$. Multiplikation einer Spalte mit $\lambda \neq 0$ bewirkt auch die Multiplikation der Determinante mit λ , weil die Determinante linear in den Spalten ist. Information geht also nicht verloren. In der Tat brauchen wir diesen Typ der Umformung aber gar nicht zu benutzen, wir kommen ja auch mit den anderen beiden aus:

- Addition des λ -fachen einer Spalte (Zeile) zu einer anderen Spalte (Zeile).
- Vertauschung zweier Spalten (Zeilen).

Addition des λ -fachen der j -ten Spalte zur i -ten ändert für $i \neq j$ die Determinante aber nicht, denn

$$\begin{aligned} \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i + \lambda \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n) \\ = \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) + \lambda \det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n) \end{aligned}$$

wegen der Linearität in der i -ten Spalte ist und

$$\det(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n) = 0$$

wegen des Alternierens.

Das Vertauschen zweier Spalten oder Zeilen ändert aber nur das Vorzeichen der Determinante. Bringt man also eine Matrix mit Hilfe der oben genannten Typen elementarer Umformungen in Dreiecksgestalt, so ist ihre Determinante bis auf's Vorzeichen gleich der Determinante dieser Dreiecksmatrix, und um auch dieses Vorzeichen zu wissen, braucht man sich nur gemerkt haben, ob man eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Vertauschungen durchgeführt hat. Das ist das Determinantenberechnungsverfahren für große Matrizen.

11.4 Übungsaufgaben

Aufgabe R11.1: Sei $c_1, c_2, \dots$ eine Folge reeller Zahlen und $A^{(n)}$ die $n \times n$ -Matrix mit den Komponenten $a_{ii} = c_i$ für $i = 1, \dots, n$, $a_{i,i+1} = +1$, $a_{i+1,i} = -1$ für $i = 1, \dots, n-1$ und $a_{ij} = 0$ sonst. Bestimmen Sie eine *Rekursionsformel* für die Determinante $D_n := \det A^{(n)}$, mit der Sie D_n aus $D_1, \dots, D_{n-1}$ berechnen können.

Aufgabe R11.2: Berechnen Sie die Determinanten und bilden Sie die Inversen der Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe R11.3: Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

Aufgabe T11.1: Benutze $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ zur Bezeichnung der Vektoren $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$. Sei $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ eine bilineare Abbildung. a) Beweisen Sie, dass es eine Konstante C gibt, so dass $\|B(\vec{x}, \vec{y})\| \leq C \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ für alle $\vec{x}, \vec{y}$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung B differenzierbar und das Differential durch $dB_{(\vec{x}, \vec{y})}(\vec{v}, \vec{w}) = B(\vec{x}, \vec{w}) + B(\vec{v}, \vec{y})$ gegeben ist.

Aufgabe T11.2: Gegeben seien eine multilineare Abbildung

$$\omega : \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_r} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

und differenzierbare Kurven $t \mapsto \vec{\alpha}_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$ mit gemeinsamem Definitionsbereich. Bestimmen Sie

$$\frac{d}{dt} \omega(\vec{\alpha}_1(t), \dots, \vec{\alpha}_r(t)).$$

(Vielleicht betrachten Sie erst einmal den Fall $r = 1$, sodann $r = 2$.)

Aufgabe T11.3: Es sei $\varphi : U \rightarrow U$ linear und A die Matrix von φ bezüglich einer Basis $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ von U . Bezüglich einer anderen Basis $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ werde φ durch eine Matrix B beschrieben. Beweisen Sie $\det A = \det B$. (Setze $\Phi_{(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)}^{-1} \circ \Phi_{(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)} =: C$.)

12.1 Quadratische Formen

Wir wollen jetzt die *symmetrischen Bilinearformen* betrachten, zu denen auch das übliche innere Produkt $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y}$ gehört. Sie hängen eng mit den *quadratischen Formen* zusammen, und bevor es richtig los geht, wollen wir diese Beziehung klarstellen:

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ ein Untervektorraum. Die bilinearen Abbildungen $\beta : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man ***Bilinearformen***, und ist β eine *symmetrische* Bilinearform, so heißt

$$\begin{aligned} q : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{u} &\longmapsto \beta(\vec{u}, \vec{u}) \end{aligned}$$

die zu β gehörige ***quadratische Form***. □

Auf den ersten Blick möchte es scheinen, als ob die quadratische Form nur einen Teil der Information über β enthielte, weil sie nur weiß, wie β auf zwei *gleiche* Einträge antwortet, aber tatsächlich läßt sich jede symmetrische Bilinearform $\beta : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ aus ihrer quadratischen Form $q : U \rightarrow \mathbb{R}$ rekonstruieren:

$$\beta(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2} (q(\vec{u} + \vec{v}) - q(\vec{u}) - q(\vec{v})) ,$$

denn offenbar ist $q(\vec{u} + \vec{v}) := \beta(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) = \beta(\vec{u}, \vec{u}) + \beta(\vec{u}, \vec{v}) + \beta(\vec{v}, \vec{u}) + \beta(\vec{v}, \vec{v}) = q(\vec{u}) + 2\beta(\vec{u}, \vec{v}) + q(\vec{v})$ wegen der Symmetrie. Man nennt diesen Übergang von der quadratischen Form zurück zur symmetrischen Bilinearform auch die *Polarisierung*¹ der quadratischen Form.

Quadratische Formen und symmetrische Bilinearformen sind also eigentlich nur zwei verschiedenen Weisen von derselben Sache zu sprechen. Eine symmetrische Bilinearform und ihre quadratische Form heißen **positiv definit**, wenn $q(\vec{u}) > 0$ für alle $\vec{u} \neq 0$, und **positiv semidefinit**, wenn $q(\vec{u}) \geq 0$ für alle $\vec{u} \in U$ gilt, analog sind die Begriffe *negativ definit* und *negativ semidefinit* erklärt, und wenn eine quadratische Form sowohl positive als auch negative Werte hat, heißt sie **indefinit**.

Wozu braucht man quadratische Formen? In der Analysis haben wir bisher immer die *lineare Approximation* durch das Differential betrachtet. Einen Schritt weiter gehend gelangt man zur *quadratischen Approximation* oder Approximation *zweiter Ordnung* einer C^2 -Funktion von n Variablen, für festes $\vec{x}$ sieht das so aus:

$$f(\vec{x} + \vec{v}) = f(\vec{x}) + A\vec{v} + \frac{1}{2}q(\vec{v}) + a(\vec{v})$$

wobei der jetzt noch übrig bleibende Fehlerterm oder das *Restglied* $a(\vec{v})$, wie man auch sagt, für $\vec{v} \rightarrow 0$ so rapide gegen Null gehen soll, dass sogar $\lim_{\vec{v} \rightarrow 0} a(\vec{v})/\|\vec{v}\|^2 = 0$ gilt. Man nennt diese wohlbestimmte quadratische Form q dann die *Hesseform* von f an der Stelle $\vec{x}$, sie wird konkret mittels der *Hesse-Matrix*, der Matrix der zweiten partiellen Ableitungen ausgerechnet:

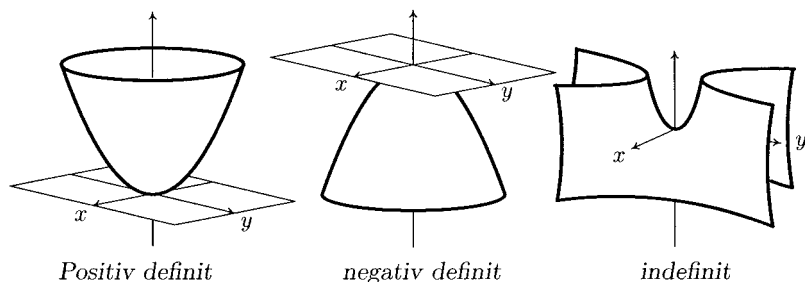
$$q(\vec{v}) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}) v_i v_j$$

Sie können jetzt nicht ohne weiteres sehen, weshalb das wahr sein soll; wenn wir später die Approximation r -ter Ordnung (Taylorformel) behandeln, kommt es als der Spezialfall $r = 2$ ganz nebenbei mit heraus.

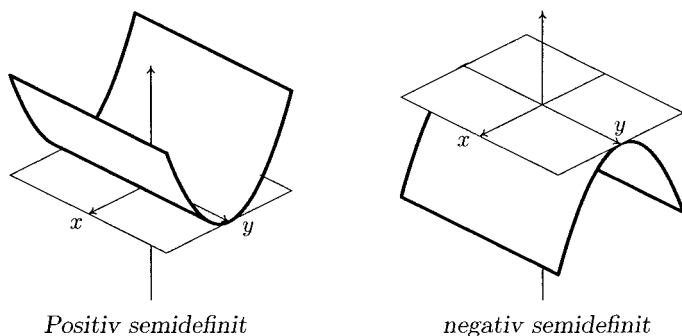
Das wäre nun also eine Verfeinerung der linearen Approximation und als solche schon eine gute Sache. Besondere Bedeutung gewinnt die quadratische Approximation aber an den Stellen $\vec{x}$, an

denen die lineare Approximation Null, d.h. $\text{grad}_{\vec{x}} f = 0$ ist, an den sogenannten *kritischen Stellen*. Das sind oftmals auch die physikalisch interessantesten Stellen, Gleichgewichtspunkte eines Systems, man möchte das Verhalten der Funktion in der Nähe der Stelle kennen, und in Abwesenheit des linearen Terms spielt nun die Hesseform dabei die erste Geige.

Die lineare Algebra, in deren Zuständigkeitsbereich die symmetrischen Bilinearformen und die quadratischen Formen gehören, leistet der Analysis deshalb einen nützlichen Dienst durch die *Klassifikation* der quadratischen Formen, d.h. deren Einteilung in 'Typen', wie ich vorläufig etwas ungenau sage. Im Falle $n = 2$ gibt es zum Beispiel abgesehen vom uninteressanten Fall $q \equiv 0$ die folgenden Typen.



Das sind die typischen Graphen der *nichtentarteten* quadratischen Formen auf $\mathbb{R}^2$, daneben gibt es noch zwei Typen *entarteter* quadratischer Formen:



Dementsprechend sieht dann auch die Funktion aus, obwohl im semidefiniten Fall, wegen der Entartung, der Fehlerterm doch noch die Kraft behält, über Extremum oder Sattel zu entscheiden, weil die Hesseform längs der Entartungsachse gar keinen Widerstand etwa gegen einen Term $\pm y^4$ leisten kann.

Soviel einstweilen über einen Aspekt der Brauchbarkeit der quadratischen Formen. Jetzt wollen wir sie als mathematische Objekte etwas näher in Augenschein nehmen.

Die Koeffizientenfamilie einer Bilinearform β bezüglich einer Basis $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ von U hat nur zwei Indices und bildet deshalb eine $n \times n$ -Matrix B , gegeben durch

$$b_{ij} := \beta(\vec{u}_i, \vec{u}_j),$$

die man natürlich **die Matrix der Bilinearform** bezüglich der Basis nennt, und unter der **Matrix einer quadratischen Form** bezüglich einer Basis versteht man die Matrix ihrer symmetrischen Bilinearform. Ersichtlich ist eine Bilineareform genau dann symmetrisch, wenn ihre Matrix bezüglich einer Basis symmetrisch ist, wenn also $B = B^t$, d.h. $b_{ij} = b_{ji}$ gilt.

Die Beschreibung einer Bilinearform durch ihre Matrix besteht zunächst einmal einfach in der Formel

$$\beta(x_1\vec{u}_1 + \dots + x_n\vec{u}_n, y_1\vec{u}_1 + \dots + y_n\vec{u}_n) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}x_iy_j,$$

die sich aus der Bilinearität ergibt. Wenn wir aber den Koeffizientenvektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ durch Transposition aus einer Spalte, also einer $n \times 1$ -Matrix, in eine $1 \times n$ -Matrix $\vec{x}^t$, also eine Zeile verwandeln, dann lässt sich die rechte Seite als ein ganz regelrechtes Produkt aus drei Matrizen schreiben:

$$\sum_{i,j=1}^n x_i b_{ij} y_j = \boxed{\vec{x}^t} \quad \boxed{B} \quad \boxed{\vec{y}} = \vec{x}^t B \vec{y},$$

eine für den Umgang mit Bilinearformen und quadratischen Formen sehr nützliche Schreibweise. Im symmetrischen Falle ist dann

$q(x_1\vec{u}_1 + \cdots + x_n\vec{u}_n) = \vec{x}^t B \vec{x}$, und wenn Sie eine symmetrische Matrix B mit dieser Eigenschaft kennen, dann *ist* das auch die Matrix der quadratischen Form, da brauchen Sie die symmetrische Bilinearform β aus q nicht erst explizit zu rekonstruieren um sich von $\beta(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = b_{ij}$ zu überzeugen, denn wenn für zwei symmetrische Matrizen $\vec{x}^t B \vec{x} = \vec{x}^t B' \vec{x}$ für alle $\vec{x}$ gilt, dann folgt aus der bloßen Möglichkeit der Polarisierung schon $\vec{x}^t B \vec{y} = \vec{x}^t B' \vec{y}$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und damit natürlich $B = B'$, keine Verwechslung möglich.

Die Beziehung zwischen einer quadratischen Form q und ihrer Matrix B bezüglich einer Basis wird auch durch das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{q} & \mathbb{R} \\ \Phi \uparrow \cong & \nearrow Q_B & \\ \mathbb{R}^n & & \end{array}$$

ausgedrückt, in dem der Basisisomorphismus und die durch B definierte quadratische Form $Q_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x} \mapsto \vec{x}^t B \vec{x}$ auf dem $\mathbb{R}^n$ figurieren.

Nun wollen wir den Klassifikationssatz von Sylvester für quadratische Formen beweisen.

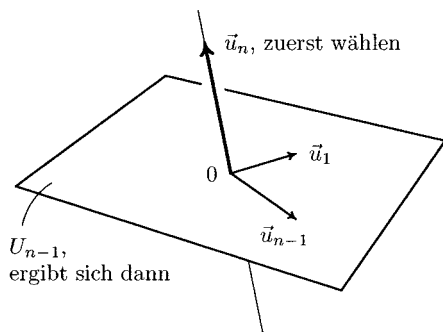
Satz und Definition: Sei $q : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine quadratische Form und $\dim U = n$. Dann gibt es eine Basis $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ von U , in der die Matrix von q die **Sylvestersche Normalform**

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

hat (**Sylvesterbasis**). Die Anzahlen p^+ und p^- der positiven und negativen Einträge sind unabhängig von der Wahl der Basis (es gibt nämlich viele solcher Basen!) und man nennt $p^+ - p^-$ die **Signatur** und $p^+ + p^- = \text{rg } D$ den **Rang** der quadratischen Form.

Beweis: Induktion nach der Dimension von U . *Induktionsbeginn* $n = 1$: sei $\vec{u} \in U \setminus 0$. Ist $q(\vec{u}) = 0$, so ist sowieso $q \equiv 0$. Sonst richte

$\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$ so ein, dass $q(\lambda \vec{u}) = \lambda^2 q(\vec{u}) = \pm 1$ ist und setze dann $\vec{u}_1 := \lambda \vec{u}$. *Induktionsschluss von $n-1$ auf n* : sei die Behauptung des Satzes richtig für quadratische Formen auf $n-1$ -dimensionalen Räumen. Sei β die symmetrische Bilinearform unserer quadratischen Form q auf dem n -dimensionalen Raum U . Entweder $q \equiv 0$ oder es gibt ein $\vec{u}_n \in U$ mit $q(\vec{u}_n) = \pm 1$. Definiere jetzt $U_{n-1} \subset U$ durch $U_{n-1} := \{\vec{u} \in U \mid \beta(\vec{u}, \vec{u}_n) = 0\}$.



Induktionsschritt beim Beweis des Satzes von Sylvester

Nach der Dimensionsformel für die lineare Abbildung $U \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{u} \mapsto \beta(\vec{u}, \vec{u}_n)$ hat U_{n-1} , das ja der Kern dieser Abbildung ist, die Dimension $n-1$. Wähle eine, nach Induktionsannahme vorhandene, Sylvesterbasis $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{n-1})$ für $q|_{U_{n-1}}$. Dann ist auch $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ eine Basis von U , denn u_n kann wegen $\beta(\vec{u}_n, \vec{u}_n) = \pm 1$ nicht aus den anderen $\vec{u}_i$ linearkombiniert werden. Bezüglich dieser Basis hat die Matrix von q die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & -1 & \dots & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 & \dots & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

und die Basis geht also durch eine einfache Vertauschung von Basisvektoren in eine Sylvesterbasis für q über. Damit ist die Existenz einer Sylvesterbasis bewiesen. Die Zahlen $p^\pm$ sind wohlbestimmt,

weil sie, wie man leicht aus der Dimensionsformel für Untervektorräume folgert, die folgende basisunabhängige Bedeutung haben: p^+ ist die größte Dimension eines Untervektorraums $U^+ \subset U$ mit positiv definitem $q|_{U^+}$, analog für p^- . $\square$

In Bezug auf eine Sylvesterbasis schreibt sich die quadratische Form einfach als $q(x_1\vec{u}_1 + \cdots + x_n\vec{u}_n) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2$, wenn $p^+ =: k$ und $p^- =: \ell$ ist. Betrachten wir jetzt auch einmal $U := \mathbb{R}^n$ als einen interessanten Spezialfall. Sei B eine symmetrische $n \times n$ -Matrix und $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch $Q(\vec{x}) = \vec{x}^t B \vec{x}$ gegeben. Eine Basis ist genau dann Sylvesterbasis für Q , wenn ihr Basisisomorphismus $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, also die $n \times n$ -Matrix mit den Basisvektoren als Spalten, die Eigenschaft

$$Q(S\vec{x}) = \vec{x}^t S^t B S \vec{x} = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+\ell}^2$$

hat, kurz wenn sie Q in die Normalform transformiert. Für die beteiligten Matrizen heißt das nichts anderes, als dass $S^t B S =: D$ in der Sylvesterschen Normalform ist.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{Q_B} & \mathbb{R} \\ S \uparrow \cong & \nearrow Q_{S^t B S} & \\ \mathbb{R}^n & & \end{array}$$

Eine solche invertierbare Matrix S zu finden ist daher die praktische Aufgabe, die sich stellt, wenn man eine durch B gegebene quadratische Form in Normalform ‘bringen’ will. Dafür gibt es eine Rechenmethode mittels elementarer Umformungen, die ich rasch noch erklären will. Zu Grunde liegt die einfache Beobachtung über elementare Umformungen von $n \times n$ -Matrizen, dass es zu jeder elementaren Spaltenumformung eine invertierbare Matrix X mit der Eigenschaft gibt, dass die Anwendung dieser Spaltenumformung auf eine beliebige Matrix A immer das Matrizenprodukt AX ist.

Gehen Sie die drei Typen elementarer Spaltenumformungen der Reihe nach durch, so erkennen Sie jedesmal leicht, wie diese sogenannten *Elementarmatrizen* aussehen, sie entstehen eben, wenn

Sie die Umformung auf die Einheitsmatrix anwenden, denn EX ist ja X . Es kommt aber gar nicht darauf an, dass Sie sich merken, wie diese Elementarmatrizen aussehen, das Faktum nur zu wissen genügt schon.

Weil die Transposition Zeilen und Spalten vertauscht, verwandelt die entsprechende *Zeilenumformung* die Matrix A in $(A^t X)^t$, das ist $X^t A$. Wenn Sie nun auf eine symmetrische Matrix B beide Umformungen anwenden, wird daraus $X^t B X$, was wieder eine symmetrische Matrix ist. Es ist aber stets möglich (Stichwort Killerzeile usw.) eine symmetrische Matrix B durch endlich viele solcher beidseitigen Umformungen in Sylvestersche Normalgestalt

$$X_m^t (\dots (X_2^t (X_1^t B X_1) X_2) \dots) X_m = D$$

zu bringen, und dann ist $S := X_1 \dots X_m$ offenbar die gesuchte Transformationsmatrix. Wie rechnen Sie sie aber aus, wenn Sie sich das Aussehen der X_i gar nicht merken sollen? Indem Sie parallel zu den beidseitigen Umformungen an B die bloßen einseitigen *Spaltenumformungen* auch an der Einheitsmatrix E ausführen, woraus Sie $EX_1 \dots X_m = S$ als Ergebnis bekommen.

Da wir einmal von dieser Methode sprechen: Sie sehen jetzt auch, wie man eine invertierbare Matrix A mittels elementarer Umformungen praktisch invertieren kann. Verwandelt man A mittels elementarer (sagen wir) Spaltenumformungen in die Einheitsmatrix, $AX_1 \dots X_m = E$, dann ist offenbar $A^{-1} = X_1 \dots X_m = EX_1 \dots X_m$, d.h. dieselben Spaltenumformungen führen die Einheitsmatrix in die gesuchte Inverse A^{-1} über. Probieren Sie es einmal aus.

12.2 Skalarprodukte

Im $\mathbb{R}^3$ kennt man ein sogenanntes **inneres Produkt** $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} \cdot \vec{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$, analog erklärt man das innere Produkt im $\mathbb{R}^N$ durch $\vec{x} \cdot \vec{y} := x_1 y_1 + \dots + x_N y_N$, und somit ist das innere Produkt auch auf jedem Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^N$ definiert.

Ersichtlich ist dieses innere Produkt $U \times U \rightarrow \mathbb{R}$, $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \cdot \vec{v}$ eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf U . In der Mathematik nennt man jede solche Bilinearform ein *Skalarprodukt*.

Definition: Unter einem *Skalarprodukt* auf einem Untervektorraum U eines $\mathbb{R}^N$ versteht man eine positiv definite symmetrische Bilinearform. Einen Buchstaben wie etwa β verwendet man dafür nur in Fällen dringender Verwechslungsgefahr, sonst schreibt man lieber $U \times U \rightarrow \mathbb{R}$, $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$. Das innere Produkt auf dem $\mathbb{R}^N$ oder auf einem seiner Untervektorräume nennt man auch das *Standard-Skalarprodukt*. $\square$

Das Standard-Skalarprodukt ist nur ein Skalarprodukt unter vielen. Dieser Abschnitt soll von *beliebigen* Skalarprodukten handeln, und deshalb sei nun im Folgenden U ein Untervektorraum eines $\mathbb{R}^N$ und

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$$

irgend ein fest gewähltes Skalarprodukt auf U .

‘Als Physiker interessiert mich nur das innere Produkt’, höre ich einen denken, ‘was gehen mich die Skalarprodukte der Mathematiker an?’ — Darf man so fragen? Natürlich, und je schwerer die Antwort, desto berechtigter die Frage. Zunächst einmal könnte ich, so gefragt, darauf hinweisen, dass alles, was hier über ein beliebiges Skalarprodukt gesagt werden soll, insbesondere für das innere Produkt gilt, und es steht dem Leser ja frei, immer an dieses zu denken. Dass wir bei allen Definitionen und Beweisen statt der konkreten Formel $\sum x_i y_i$ nur die Bilinearität, Symmetrie und positive Definitheit ausnutzen, macht die Sache kein bisschen komplizierter, eher übersichtlicher.

Diese letzte Beteuerung wird der Fragesteller vielleicht im Stillen bezweifeln, und außerdem sind meine beschwichtigenden Worte keine direkte Antwort auf die Frage. Besser sollte ich ein Beispiel angeben, das den Nutzen allgemeiner Skalarprodukte belegt, etwa die simultane Diagonalisierung von kinetischer und potentieller Energie von gekoppelten Oszillatoren. Dabei hat man es nämlich

mit zwei quadratischen Formen zu tun, wovon die eine (die kinetische) als positiv definit bekannt ist, und gesucht ist eine Basis, bezüglich der die positiv definite Form die Gestalt $x_1^2 + \cdots + x_n^2$ und gleichzeitig die andere die Normalform $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$ annimmt. Geht das überhaupt, und woher bekommt man so eine Basis? Weiß man mit allgemeinen Skalarprodukten umzugehen, so nimmt man das durch die erste Form gegebene Skalarprodukt und führt mit ihm die Hauptachsentransformation² der zweiten aus, fertig.

Das ist zwar ein ganz gutes Beispiel, aber der entscheidende Gesichtspunkt ist doch ein anderer. Untervektorräume eines $\mathbb{R}^N$ betrachten wir vor allem deshalb, weil es vorläufig die einzigen *Vektorräume* sind, die Sie kennen. Es gibt aber noch viele andere Vektorräume mit Skalarprodukten. Die ‘Vektoren’, also die Elemente dieser Vektorräume, sind keine N -Tupel, sondern etwa Funktionen, Abbildungen, Polynome und dergleichen, zum Beispiel die periodischen Funktionen, speziell die trigonometrische Polynome, die uns schon im nächsten Kapitel über die Fourierreihen begegnen werden. Die Skalarprodukte sind dann natürlich auch ganz anders definiert, zum Beispiel mittels Integration. Alle Argumente, die auf die N -Tupeligkeit der Vektoren Bezug nehmen, gelten dann nichts mehr. Aber Bilinearität, Symmetrie und positive Definitheit bestehen noch in alter Frische, und was Sie gelernt haben daraus herzuleiten, behält auch in der weiten Welt der Vektorräume seine Gültigkeit. Deshalb also wollen wir uns nicht an die ‘Tupelformel’ $\sum x_i y_i$ anklammern, sondern gleich beliebige Skalarprodukte betrachten. Bereit?

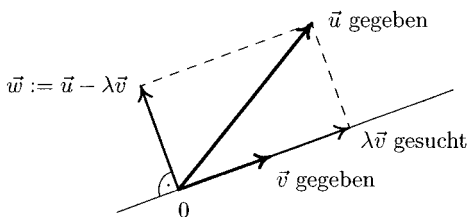
Jedes Skalarprodukt in U führt gewissermaßen seine eigene Geometrie mit sich. Unter der Länge oder der **Norm** eines Vektors $\vec{u} \in U$ versteht das Skalarprodukt die Zahl

$$\|\vec{u}\| := \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle},$$

und zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in U$ sieht es als **orthogonal** oder **senkrecht zueinander** an, wenn $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ wie beim Satz von Pythagoras gilt, was wegen $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ ja nichts anderes als $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ bedeutet, weshalb also

$$\vec{u} \perp \vec{v} : \Longleftrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$$

definiert wird. Wir wollen gleich einmal zum daran Gewöhnen einen nützlichen kleinen Handgriff üben, nämlich zu einem gegebenen Vektor $\vec{v} \neq 0$ einen beliebigen anderen Vektor $\vec{u}$ in einen Anteil in Richtung $\vec{v}$ und einen dazu senkrechten Anteil zerlegen.



Zerlegung von $\vec{u}$ in einen Anteil $\lambda\vec{v}$ und einen zu $\vec{v}$ senkrechten Anteil $\vec{w} = \vec{u} - \lambda\vec{v}$

Weil $(\vec{u} - \lambda\vec{v}) \perp \vec{v}$ gerade $\langle \vec{u} - \lambda\vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ bedeutet, sehen wir sofort, wie λ gewählt werden muss, nämlich als $\lambda := \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle / \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$, genau dann ist der zweite Summand in $\vec{u} = \lambda\vec{v} + (\vec{u} - \lambda\vec{v}) =: \lambda\vec{v} + \vec{w}$ senkrecht zu $\vec{v}$.

Eine Abschätzung, die man beim Umgang mit Skalarprodukten auf Schritt und Tritt braucht, ist die so genannte *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*.

Satz (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung): Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt in U , so gilt

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

für alle $\vec{u}, \vec{v} \in U$.

BEWEIS: Sei oBdA $\vec{u} \neq 0$ und $\vec{v} \neq 0$, ja sogar oBdA $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$. Dann folgt's, nämlich das Gewünschte

$$\pm \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \leq 1,$$

aus $\langle \vec{u} \pm \vec{v}, \vec{u} \pm \vec{v} \rangle \geq 0$.

□

Korollar (Dreiecksungleichung): Es gilt stets

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|,$$

denn $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2$, nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist das aber kleiner oder gleich $\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2$. $\square$

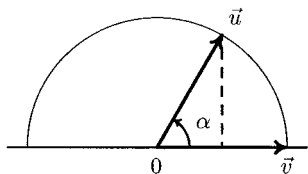
Auch bei der folgenden Definition des *Winkels* zwischen zwei Vektoren machen wir von der Schwarzschen Ungleichung Gebrauch.

Definition: Sind $\vec{u}, \vec{v} \neq 0$ in U , so heißt

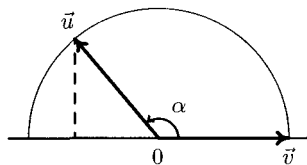
$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) := \arccos \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \in [0, \pi]$$

der Winkel zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$. $\square$

Wir könnten den Arcuscosinus nicht anwenden, wenn wir nicht aus der Schwarzschen Ungleichung wüssten, dass $\frac{|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} \leq 1$ ist.



Wenn $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \geq 0$, dann $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$



Wenn $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \leq 0$, dann $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$

*Zur anschaulichen Motivation der Definition
des Winkels, oBdA für $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$.*

Die nun eingeführten Symbole $\|\dots\|$ (*Norm*), $\perp$ (*senkrecht zu*) und $\angle$ (*Winkel*) bezeichnen von der Wahl des Skalarproduktes *abhängige* Begriffe und müssten deshalb eigentlich dementsprechend gekennzeichnet werden, etwa als $\|\dots\|_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$, $\perp_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ und $\angle_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$, wenn Verwechslungsgefahr, zum Beispiel mit dem Spezialfall des Standardskalarprodukts bestünde. Besteht aber nicht, weil wir das Standardskalarprodukt in diesem Abschnitt keiner besonderen Aufmerksamkeit

würdigen, es läuft als ein möglicher anonymer Spezialfall einfach so mit.

Haben die Vektoren einer Basis alle die Länge Eins und stehen paarweise senkrecht aufeinander, dann spricht man von einer *Orthonormalbasis*:

Definition: Eine *Orthonormalbasis* oder kurz *ON-Basis* von U bezüglich des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist eine Basis $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ mit der Eigenschaft

$$\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij}.$$

□

Die Matrix des Skalarprodukts bezüglich einer ON-Basis ist also die Einheitsmatrix. Solche Basen haben große Vorteile. Will man nämlich eine Basis wirklich benutzen, so steht man oft vor der Notwendigkeit, einen gegebenen Vektor nach der Basis zu *entwickeln*. Freilich, wenn die Entwicklungskoeffizienten nur zum Zwecke einer abstrakten Argumentation *benannt* werden müssen, dann ist es kein Problem zu sagen: Sei $\vec{u} = c_1\vec{v}_1 + \dots + c_n\vec{v}_n$. Wenn aber, etwa im $\mathbb{R}^n$, die Basisvektoren und $\vec{u}$ explizit gegeben sind, und es kommt auf die numerischen Werte der c_i wirklich an, dann ist damit Arbeit verbunden, denn dann muss man ja ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten $c_1, \dots, c_n$ lösen. Die Theorie versichert zwar, dass es genau eine Lösung gibt, aber finden muss man sie selbst. Bei der Entwicklung nach einer ON-Basis ist das ganz anders.

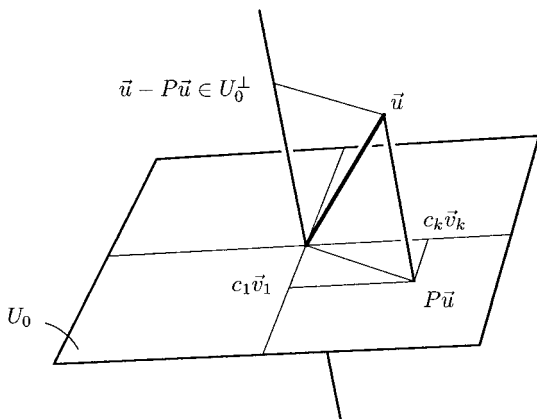
Lemma (Entwicklung nach einer ON-Basis): Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf U und $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ eine Orthonormalbasis dafür, so gilt für alle $\vec{u} \in U$ die *Entwicklungsformel*

$$\vec{u} = \langle \vec{u}, \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1 + \dots + \langle \vec{u}, \vec{v}_n \rangle \vec{v}_n.$$

BEWEIS: Jedenfalls hat $\vec{u}$ ja irgendwelche Entwicklungskoeffizienten, also $\vec{u} = c_1\vec{v}_1 + \dots + c_n\vec{v}_n$, und bilden wir nun auf beiden Seiten das Skalarprodukt mit $\vec{v}_i$, so werden wegen $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij}$ rechts alle

Terme bis auf einen zu Null und wir lesen $\langle \vec{u}, \vec{v}_i \rangle = c_i \langle \vec{v}_i, \vec{v}_i \rangle = c_i$, das aber war zu zeigen. $\square$

Das Skalarprodukt selbst liefert also eine einfache Rechenformel für die Entwicklungskoeffizienten, die das Leben in Räumen mit Skalarprodukt und ON-Basis sehr erleichtert. Ein Beispiel ist die einfache Angabe der sogenannten *orthogonalen Projektion* $P : U \rightarrow U_0 \subset U$ auf einen Untervektorraum $U_0 \subset U$, in dem man eine ON-Basis hat. Zu jedem Untervektorraum $U_0 \subset U$ kann man ja das sogenannte **orthogonale Komplement** betrachten, das ist der Untervektorraum $U_0^\perp := \{ \vec{u} \in U \mid \vec{u} \perp \vec{v} \text{ für alle } \vec{v} \in U_0 \}$.



Zur orthogonalen Projektion

Die Anschauung, die von dieser Terminologie suggeriert wird, versichert ohne weiteres $U = U_0 \oplus U_0^\perp$, aber ist es auch wahr? Natürlich ist $U_0 \cap U_0^\perp = \{0\}$, denn ein in beiden Untervektorräumen enthaltener Vektor muss senkrecht auf sich selbst stehen, $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$, kann also wegen der positiven Definitheit des Skalarproduktes nur der Nullvektor sein. Aber läßt sich jeder Vektor $\vec{u} \in U$ als Summe $\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{w}$ mit $\vec{u}_0 \in U_0$ und $\vec{w} \perp U_0$ schreiben? Wie macht man das? Mit einer ON-Basis $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ von U_0 ginge das ganz einfach. Wir machen den Ansatz $\vec{u}_0 = c_1 \vec{v}_1 + \dots + c_k \vec{v}_k$ und sehen, dass $\vec{u} - \vec{u}_0 \perp U_0$, was ja dasselbe wie $\vec{u} - \vec{u}_0 \perp \vec{v}_i$ für $i = 1, \dots, k$ bedeutet, genau dann eintritt, wenn $c_i = \langle \vec{u}, \vec{v}_i \rangle$ für alle $i = 1, \dots, k$ gilt.

Lemma und Definition: Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt in U und $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ eine ON-Basis eines Untervektorraums $U_0 \subset U$, so ist $U = U_0 \oplus U_0^\perp$, und durch $P(\vec{u}) := \sum_{i=1}^k \langle \vec{u}, \vec{v}_i \rangle \vec{v}_i$ ist die Projektion $P : U \rightarrow U_0 \subset U$ auf U_0 längs $U_0^\perp$, die sogenannte **Orthogonalprojektion** auf U_0 gegeben. $\square$

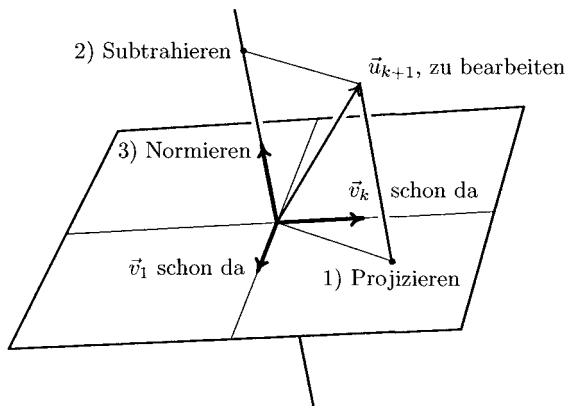
Woher bekommen wir aber eine ON-Basis? Wir wissen zwar, dass jeder Untervektorraum eines $\mathbb{R}^N$ Basen besitzt, warum aber ON-Basen? Nun, eben mit Hilfe des Orthogonalprojektionslemmas kann man jede gegebene Basis $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ gleichsam *orthonormalisieren*:

Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren:

Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt in U und $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ eine beliebige Basis von U , so gewinnt man iterativ durch $\vec{v}_1 := \vec{u}_1 / \|\vec{u}_1\|$ und

$$\vec{v}_{k+1} := \frac{\vec{u}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle \vec{u}_{k+1}, \vec{v}_i \rangle \vec{v}_i}{\|\vec{u}_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle \vec{u}_{k+1}, \vec{v}_i \rangle \vec{v}_i\|}$$

eine ON-Basis $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ von U , die auch noch $\text{Lin}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = \text{Lin}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k) =: U_k$ für alle k erfüllt. $\square$



Verlauf des Iterationsschrittes im Gram-Schmidt-Verfahren:

- 1) $P(\vec{u}_{k+1})$ ausrechnen. 2) $P(\vec{u}_{k+1})$ von $\vec{u}_{k+1}$ subtrahieren, um das Senkrechtstehen auf U_k zu erreichen, 3) Normieren.

12.3 Geometrische Bedeutung der Determinante

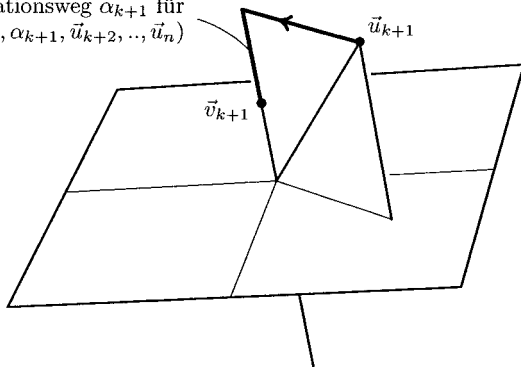
Wir wissen schon, was das Verschwinden oder Nichtverschwinden der Determinante einer Matrix bedeutet. Die Determinante enthält aber noch mehr Information. Wenden wir uns zuerst dem *Vorzeichen* der Determinante zu:

Definition: Eine Basis $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ des $\mathbb{R}^n$ heißt **positiv orientiert** oder **rechtshändig**, wenn $\det A > 0$, und analog **negativ orientiert** oder **linkshändig**, wenn $\det A < 0$ ist. $\square$

Die Standard-Basis $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ ist wegen $\det E = 1 > 0$ rechtshändig, während die Basis $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1}, -\vec{e}_n)$ zum Beispiel linkshändig ist.

Eine Basis mit Matrix A in eine mit Matrix B zu **deformieren** soll heißen, einen stetigen Weg $t \mapsto A(t)$, $t \in [0, 1]$ im Raum $\mathbb{R}^{n \times n}$ der Matrizen zu finden, so dass $A(0) = A$ und $A(1) = B$ ist und in der Zwischenzeit, also für jedes $0 < t < 1$, die Matrix $A(t)$ immer invertierbar ist, ihre Spaltenvektoren also eine Basis bilden.

Deformationsweg α_{k+1} für
 $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \alpha_{k+1}, \vec{u}_{k+2}, \dots, \vec{u}_n)$



Induktionsschritt der Deformation einer beliebigen Basis $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ in ihre Gram-Schmidt-Orthonormalisierte $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$

Denkt man sich also die Basisvektoren stetig beweglich und auch in ihrer Länge veränderlich, so bleibt als einzige Bedingung, dass zu jedem Zeitpunkt die lineare Unabhängigkeit gewahrt bleibt.

Eine solche Deformation kann die Händigkeit der Basis nicht ändern, weil dabei auch $t \mapsto \det A(t)$ eine stetige Funktion auf $[0, 1]$ ist, die wegen $\det A(t) \neq 0$ ihr Vorzeichen nicht wechseln kann.

Aber jede Basis läßt sich in ihre Gram-Schmidt-Orthonormalisierte deformieren, der Induktionsschritt ist dabei die Deformation von $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{u}_{k+1}, \dots, \vec{u}_n)$ in $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k, \vec{v}_{k+1}, \dots, \vec{u}_n)$, bei der man außer dem $(k+1)$ -ten alle Vektoren festhält.

Eine ON-Basis wiederum kann man durch Drehung in eine der beiden oben als Beispiele erwähnten Basen $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1}, \pm \vec{e}_n)$ deformieren, und deshalb gilt:

Bemerkung: Eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann positiv orientiert oder rechtshändig, wenn sie sich in die Standard-Basis deformieren läßt. $\square$

Insofern können wir mit der Orientierung, also dem Vorzeichen der Determinante, nun auch eine anschauliche Vorstellung verbinden.

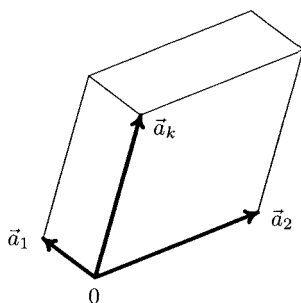
Was bedeutet aber der *Betrag* der Determinante einer Matrix? Diese Frage führt uns in den Bereich der elementargeometrischen Volumenmessung im $\mathbb{R}^n$.

Definition: Sind $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$, so heißt

$$\text{Spat}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) := \left\{ \sum_{i=1}^k x_i \vec{a}_i \mid 0 \leq x_i \leq 1 \text{ alle } i \right\}$$

das von $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ aufgespannte ***k-Spat*** oder ***Parallelepipiped***. $\square$

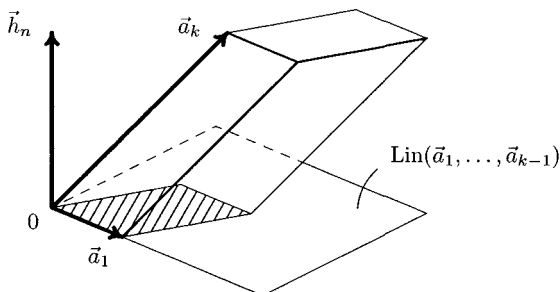
Für $k = 1$ ist das also einfach die Strecke zwischen 0 und dem Vektor $\vec{a}_1$, für $k = 2$ die von $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ aufgespannte Parallelogrammfläche, für $k = 3$ das Parallelotop mit den Kantenvektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$.



Spats oder verallgemeinertes Parallelogramm

Wir definieren nun das k -dimensionale Volumen eines k -Spats induktiv nach dem Prinzip ‘Grundfläche mal Höhe’.

Definition: Das **k -dimensionale Volumen** $\text{Vol}_k(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ des von den Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$ aufgespannten k -Spats definieren wir induktiv durch $\text{Vol}_1(\vec{a}_1) := \|\vec{a}_1\|$ und $\text{Vol}_k(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) = h_k \text{Vol}_{k-1}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1})$, wobei h_k die Norm des ‘Höhenvektors’ $\vec{h}_k := \vec{a}_k - P_{k-1}(\vec{a}_k)$ bezeichnet, P_{k-1} die Orthogonalprojektion auf die lineare Hülle $\text{Lin}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1})$. $\square$



k -dimensionales Volumen eines k -Spats

Schon beim Integrieren von Funktionen einer Variablen wird man gewahr, dass Volumina manchmal negativ gezählt werden müssen: die Vorstellung, das Integral messe den *Flächeninhalt*, also das zwei-dimensionale Volumen der Fläche zwischen dem Graphen und der x -Achse, ist nur korrekt, wenn man die Anteile unterhalb der Achse

als negativ verbucht. Aus ähnlichen Gründen ist es manchmal von Interesse, dem n -dimensionalen Spatvolumen im $\mathbb{R}^n$ ein Vorzeichen zu erteilen:

Definition: Für $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$ definieren wir das **orientierte Spatvolumen** als $\text{orVol}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \pm \text{Vol}_n(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$, wobei das Vorzeichen die Orientierung des n -tupels der Kantenvektoren ausdrückt, d.h. positiv für eine rechtshändige, negativ für eine linkshändige Basis $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ des $\mathbb{R}^n$ ist. Bilden die Vektoren überhaupt keine Basis, sind also linear abhängig, so spielt das Vorzeichen sowieso keine Rolle weil, wie die Anschauung verspricht und Induktion nach k sofort zeigt, das k -dimensionale Spatvolumen eines linear abhängigen k -tupels im $\mathbb{R}^n$ immer Null ist. $\square$

Und damit sind wir an der Nahtstelle zwischen Volumenmessung und multilinearer Algebra angekommen, denn das orientierte Spatvolumen ist nun ohne weiteres Zutun multilinear:

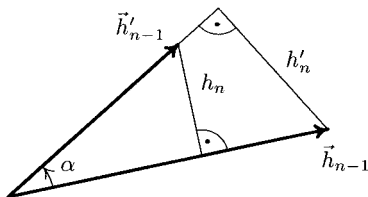
Lemma: Das orientierte n -dimensionale Spatvolumen im $\mathbb{R}^n$ ist als Abbildung $\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ multilinear und alternierend.

BEWEIS: Direkt zu sehen ist die Linearität in der letzten Variablen: sei oBdA $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1})$ linear unabhängig. Das orthogonale Komplement $V_{n-1}^\perp$ der linearen Hülle $V_{n-1} := \text{Lin}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1})$ ist dann eindimensional. Es sei $\vec{v}_n$ derjenige der beiden Vektoren der Länge Eins in $V_{n-1}^\perp$, der $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1})$ zu einer *positiv* orientierten Basis des $\mathbb{R}^n$ ergänzt. Dann ist das orientierte Volumen $\text{orVol}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ durch $\langle \vec{a}_n, \vec{v}_n \rangle \text{Vol}_{n-1}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1})$ gegeben und daher ersichtlich linear in der Variablen $\vec{a}_n$. — Überzeugen wir uns nun davon, dass das n -dimensionale Spatvolumen von der Reihenfolge der Vektoren nicht abhängt. Induktion reduziert diese Aufgabe darauf, die Vertauschbarkeit der beiden letzten Variablen, also

$$\text{Vol}_n(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-2}, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_n) = \text{Vol}_n(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-2}, \vec{a}_n, \vec{a}_{n-1})$$

zu zeigen, oBdA im linear unabhängigen Fall. Nach Definition ist $\text{Vol}_n(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_n) = h_n h_{n-1} \text{Vol}_{n-2}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{n-2})$, also genügt es $h_n h_{n-1} = h'_n h'_{n-1}$ zu zeigen, wenn $\vec{h}'_n$ und $\vec{h}'_{n-1}$ die beiden letzten Höhenvektoren für die vertauschte Anordnung bezeichnen. Diese vier Höhenvektoren liegen alle in dem zweidimensionalen Raum

$V_{n-2}^\perp$ und stehen dort in einem einfachen Verhältnis zueinander: $\vec{h}_n$ ist der zu $\vec{h}_{n-1}$ senkrechte Anteil von $\vec{h}'_{n-1}$ und analog $\vec{h}'_n$ der zu $\vec{h}'_{n-1}$ senkrechte Anteil von $\vec{h}_{n-1}$:



Zur Unabhängigkeit des Spatvolumens von der Reihenfolge der Kantenvektoren

Daraus folgt aber $h_n h_{n-1} = h'_n h'_{n-1}$, denn beides ist

$$h_{n-1} h'_{n-1} \sin \angle(\vec{h}_{n-1}, \vec{h}'_{n-1}).$$

Somit wissen wir jetzt, dass $|\text{orVol}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)|$ von der Reihenfolge nicht abhängt, dass $\text{orVol}(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ in der letzten Variablen linear ist und sein Vorzeichen die Orientierung von $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ angibt, also ist orVol multilinear und alternierend. $\square$

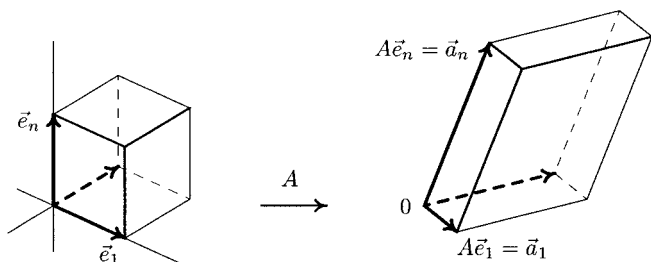
Korollar (Bedeutung der Determinante): Die Determinante einer Matrix ist das orientierte Volumen des von den Spaltenvektoren aufgespannten Spates, insbesondere

$$|\det A| = \text{Vol}_n(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n).$$

Das folgt wegen $\det E = \text{orVol}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = 1$ nun einfach daraus, dass eine alternierende n -lineare Abbildung auf dem $\mathbb{R}^n$ durch ihren Wert auf der Standardbasis schon eindeutig festgelegt ist.

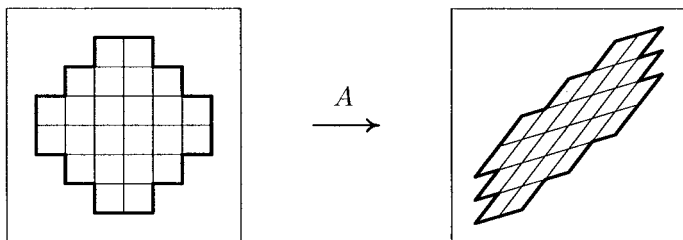
Das war's? Denken Sie vielleicht. Ganz nett, aber wie interessant sind 'Spate'? Nun, Spate haben natürlich nur ein technisches Interesse. Aber bedenken Sie Folgendes. Das von den Spaltenvektoren aufgespannte Spat ist das Bild $A(W^n)$ des Einheitswürfels $W^n := [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ unter $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, der Einheitswürfel ist

ja einfach das von den kanonischen Einheitsvektoren aufgespannte Spat.



Spat als Bild des Einheitswürfels

Wendet man also die Transformation A auf den Würfel an, so verändert sich sein Volumen durch Multiplikation mit dem Zahlenfaktor $|\det A|$. Dasselbe gilt aber für den Würfel irgend einer Kantenlänge ℓ , denn er hat vor der Transformation das Volumen ℓ^n , danach $|\det(\ell A)| = |\det A| \cdot \ell^n$. Genau so deshalb für Aggregate von Würfeln in einem Würfelgitter:



Volumenänderung durch Faktor $|\det A|$

Damit ist plausibel, was sich in weiterer Verfolgung³ dieser Idee mathematisch genau ergibt: $|\det A|$ ist der allgemein gültige Volumenänderungsfaktor der linearen Transformation $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wenn es für eine Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ überhaupt einen Sinn hat, vom n -dimensionalen Volumen $\text{Vol}_n(\Omega)$ zu sprechen, dann gilt auch

$$\text{Vol}_n(A(\Omega)) = |\det A| \text{Vol}_n(\Omega)$$

Wenn Sie also das Volumen der 3-dimensionalen Vollkugel vom Radius Eins als $\frac{4}{3}\pi$ schon kennen, dann brauchen Sie zur Bestimmung des Volumens des Ellipsoids mit den Halbachsen a , b und c nicht wieder anfangen zu integrieren, denn es geht ja durch die lineare Transformation $(x, y, z) \mapsto (ax, by, cz)$ mit der Determinante abc aus der Einheitskugel hervor und hat deshalb das Volumen $\frac{4}{3}\pi abc$.

Seine volle Bedeutung entfaltet die Interpretation der Determinante als Volumenänderungsfaktor aber in der sogenannten *Integraltransformationsformel*, welche beschreibt, wie sich mehrdimensionale Integrale bei *nichtlinearen* Transformationen verhalten. Sie werden erwarten, dass der Betrag der Determinante der Jacobi-matrix als der infinitesimale Volumenänderungsfaktor dabei in Erscheinung tritt, und so ist es auch. Im Kapitel 17 erfahren Sie darüber das Nähere, und es spricht nichts dagegen, jetzt dorthin zu blättern, wenn Sie es gleich wissen wollen.

12.4 Das Kreuzprodukt

Zum vorläufigen Abschluss der multilinearen Algebra begeben wir uns in den ganz gewöhnlichen $\mathbb{R}^3$ und betrachten dort das **Kreuz-** oder **Vektorprodukt**, das Ihnen in der Physik-Vorlesung schon begegnet ist. Darunter versteht man jene schiefsymmetrische bilineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, notiert als $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$, die durch $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 := \vec{e}_3$ und die beiden daraus durch zyklische Permutation hervorgehenden Formeln, also durch die Festsetzungen

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 &:= \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 &:= \vec{e}_1 \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 &:= \vec{e}_2\end{aligned}$$

festgelegt ist. Wir wollen nun die gängigen Formeln und Eigenschaften des Kreuzproduktes aus der Definition herleiten. Direkt aus der Definition bekommen wir die Rechenformel, die oft zur Definition benutzt wird:

Lemma 1: Offenbar ist

$$\begin{aligned}\vec{x} \times \vec{y} &= (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) \times (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3) \\ &= \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

□

Sind Sie bereit, die Entwicklungsformeln für Determinanten formal auf eine Matrix mit einer Spalte *aus Vektoren* anzuwenden, so erhalten Sie durch Entwicklung nach der ersten Spalte eine nette Merkregel für die Rechenformel:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & x_1 & y_1 \\ \vec{e}_2 & x_2 & y_2 \\ \vec{e}_3 & x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

Lemma 2: Für alle $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}).$$

Wenn eine solche Formel überhaupt richtig ist, dann muss sie sich auch durch stures Einsetzen der Rechenformel für das Kreuzprodukt verifizieren lassen, das kann man machen. Etwas übersichtlicher ist es, die obige Merkregel zu benutzen: das Skalarprodukt mit $\vec{z}$ verwandelt die Determinante zunächst in $\det(\vec{z}, \vec{x}, \vec{y})$, aber das ist dasselbe wie $\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, weil *zwei* Spaltenvertauschungen die Determinante wieder unverändert lassen, womit Lemma 2 bewiesen ist. □

Korollar 1:

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = (\vec{y} \times \vec{z}) \cdot \vec{x} = (\vec{z} \times \vec{x}) \cdot \vec{y}.$$

weil $\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \det(\vec{y}, \vec{z}, \vec{x}) = \det(\vec{z}, \vec{x}, \vec{y})$ gilt. □

Korollar 2: $\vec{x}, \vec{y} \perp \vec{x} \times \vec{y}$, denn die Determinante verschwindet, wenn zwei Spalten gleich sind. □

Korollar 3: Ist das Paar $(\vec{x}, \vec{y})$ linear unabhängig, so ist $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y})$ eine rechtshändige Basis von $\mathbb{R}^3$.

BEWEIS: Dazu brauchen wir nur $\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}) > 0$ zu zeigen. Aber $\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \times \vec{y}) = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) = \|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 \geq 0$ nach Lemma 2, und $\vec{x} \times \vec{y} \neq 0$, denn sonst wäre $\det(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = 0$ für alle $\vec{z} \in \mathbb{R}^3$, ebenfalls nach Lemma 2, was aber nicht sein kann, weil wir $\vec{x}, \vec{y}$ nach Voraussetzung zu einer Basis $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ergänzen können. Also $\|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 > 0$. $\square$

Lemma 3: Ist $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ irgend eine positiv orientierte ON-Basis des $\mathbb{R}^3$ (bezüglich des Standard-Skalarprodukts), so ist $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{v}_3$.

BEWEIS: Wir entwickeln $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ nach der ON-Basis $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$. Die Entwicklungskoeffizienten $\lambda_i = (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \cdot \vec{v}_i$ sind nach Lemma 2 durch $\det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_i)$ gegeben, also folgt schon einmal $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = \det(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) > 0$, weil die Basis als rechtshändig vorausgesetzt ist. Das genügt nicht ganz, wir müssen $\lambda_3 = 1$ zeigen. Aber: die Determinante einer $n \times n$ -Matrix A , deren Spalten eine ON-Basis $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ bezüglich des Standard-Skalarproduktes im $\mathbb{R}^n$ bilden, ist immer ± 1 , denn dass $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ eine ON-Basis ist, bedeutet

$$A^t \cdot A = \begin{array}{|c|} \hline \vec{v}_1^t \\ \hline \vdots \\ \hline \vec{v}_n^t \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_n \\ \hline \end{array} = E$$

woraus $\det(A^t A) = \det A^t \det A = (\det A)^2 = 1$ wie behauptet. Für unseren Beweis von Lemma 3 fällt dabei $\lambda_3 = 1$ mit ab. $\square$

Lemma 4: Sind $\vec{x}$ und $\vec{y}$ zwei von Null verschiedene Vektoren im $\mathbb{R}^3$, so ist $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \sin \alpha$, also der Flächeninhalt des von $\vec{x}, \vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms.

BEWEIS: OBdA sei $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = 1$. Die Zerlegung von $\vec{x}$ in einen zu $\vec{y}$ parallelen und einen dazu senkrechten Anteil heißt dann

$$\vec{x} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \vec{y} + (\vec{x} - \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \vec{y}) =: \vec{a} + \vec{b}.$$

Dann gilt jedenfalls $a^2 + b^2 = 1$, und nach Definition des Winkels $\alpha = \angle(\vec{x}, \vec{y})$ ist $a = |\cos \alpha|$ und folglich $b = |\sin \alpha|$, ja sogar $b = \sin \alpha$, weil $\alpha \in [0, \pi]$. Aber $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{b} \times \vec{y}$, und daraus folgt $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = b$, denn für $b = 0$ ist das sowieso klar, und für $b \neq 0$ können wir $\vec{v}_1 := \vec{b}/b$ und $\vec{v}_2 := \vec{y}$ zu einer rechtshändigen ON-Basis $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ ergänzen und haben dann $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{v}_3$ nach Lemma 3, insbesondere $\frac{1}{b} \|\vec{b} \times \vec{y}\| = 1$. $\square$

Damit wissen wir nun, wie im $\mathbb{R}^3$ der Cosinus des Winkels zwischen zwei Vektoren mit dem Skalarprodukt, der Sinus mit dem Kreuzprodukt zusammenhängt, und wegen $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ erhalten wir unter Berufung auf die oBdA-Annahme $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = 1$ das

Korollar:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 + \|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$$

$\square$

Als letzter Punkt steht die *Jacobi-Identität*

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} + \text{zykl. Perm.} = 0$$

auf dem Programm unseres Kreuzprodukt-Abschnitts, oder ausgeschrieben:

Jacobi-Identität: $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} + (\vec{y} \times \vec{z}) \times \vec{x} + (\vec{z} \times \vec{x}) \times \vec{y} = 0$.

BEWEIS: Wer sich daran ergötzen kann, wie sich die $3 \times 12 = 36$ Terme aus der Anwendung der Rechenformel so artig wegheben, soll es ruhig nachrechnen. Indessen hat auch die Einsicht ihren Kick, dass die Summe offenbar eine trilineare alternierende Abbildung definiert, die auf der Standard-Basis verschwindet und deshalb identisch Null sein muss. $\square$

12.5 Übungsaufgaben

Aufgabe R12.1: a) Berechnen Sie den Cosinus des Winkels γ zwischen den Vektoren $\vec{a} = (1, 1, 1)$ und $\vec{b} = (1, 0, 0)$ im $\mathbb{R}^3$.

b) Berechnen Sie den Cosinus des Winkels zwischen den Raumdiagonalen eines Würfels.

Aufgabe R12.2: Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des zweidimensionalen Untervektorraums $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^\perp \subset \mathbb{R}^3$.

Aufgabe R12.3: Die zu einer Basis $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ des $\mathbb{R}^3$ *reziproke* Basis $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ ist durch die Bedingung $\vec{w}_i \cdot \vec{v}_j = \delta_{ij}$ festgelegt. Geben Sie an, wie man die reziproke Basis a) durch Matrizeninversion, b) mittels des Kreuzprodukts erhalten kann. c) Berechnen Sie die reziproke Basis für $\vec{v}_1 = (0, a, a)$, $\vec{v}_2 = (a, 0, a)$, $\vec{v}_3 = (a, a, 0)$ mit $a = 1/2$ explizit.

Aufgabe R12.4: Unter dem von $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ erzeugten Translationsgitter versteht man die Menge der Punkte $\vec{X} = \sum_i n_i \vec{v}_i$, $n_i \in \mathbb{Z}$. Sei $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{v}_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Wie sieht das Gitter aus, das durch diese Basis erzeugt wird? Wie sieht das reziproke Gitter der $\vec{Y} = \sum_i m_i \vec{w}_i$, $m_i \in \mathbb{Z}$ aus? Skizze!

Aufgabe R12.5: Bestimmen Sie eine Sylvester-Basis und die Sylvester-Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe R12.6: Seien $\vec{w}_1 := (0, 1, 1, 1)$, $\vec{w}_2 := (1, 0, 1, 1)$ und $\vec{w}_3 := (1, 1, 0, 1)$. Orthonormalisieren Sie die Basis $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$ von $\text{Lin}(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3) \subset \mathbb{R}^4$ mit dem Gram-Schmidt-Verfahren.

Aufgabe R12.7: a) Sei $\vec{\Omega} \in \mathbb{R}^3$ ein fester Vektor und die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei durch $A\vec{x} := \vec{\Omega} \times \vec{x}$ definiert. Bestimmen Sie Rang und Kern von A sowie die Matrix A selbst. b) Die zeitabhängige 3×3 -Matrix $R(t)$ beschreibe die Drehung um eine feste Achse durch den Nullpunkt im $\mathbb{R}^3$. Für $\vec{x}(t) := R(t)\vec{x}_0$ sei $\vec{v}(t) = d\vec{x}(t)/dt$. Berechnen Sie $d(\vec{x}(t) \cdot \vec{x}(t))/dt$. Welche Richtung hat $\vec{v}(t)$ bezüglich $\vec{x}(t)$? Welche Richtung hat $\vec{v}(t)$ bezüglich der Drehachse? Zeigen Sie, dass $\vec{v}(t) = \vec{\Omega}(t) \times \vec{x}(t)$ mit einem von $\vec{x}_0$

unabhängigen Vektor $\vec{\Omega}(t)$ geschrieben werden kann. Welche physikalische Bedeutung haben Richtung und Betrag von $\vec{\Omega}$?

Aufgabe T12.1: Die 3×3 -Matrix A sei orthogonal, d.h. $A^t A = E$. Was hat $A\vec{x} \times A\vec{y}$ mit $A(\vec{x} \times \vec{y})$ zu tun?

Aufgabe T12.2: Sei U ein Untervektorraum eines $\mathbb{R}^N$, seien $\varphi : U \rightarrow U$ eine lineare Abbildung und $q : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine quadratische Form, die bezüglich einer bestimmten Basis $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ beide durch dieselbe Matrix B beschrieben werden. Sei nun $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$ eine zweite ('neue') Basis und $C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die zugehörige Koordinatentransformation, die also die alten Koordinaten in die neuen überführt, $C := \Psi^{-1} \circ \Phi$, wenn Φ und Ψ die Basisisomorphismen sind. Durch welche Matrizen werden φ und q bezüglich der neuen Basis beschrieben?

Aufgabe T12.3: Sei $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ eine ON-Basis von U . Beweisen Sie $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \vec{u}, \vec{v}_i \rangle^2$ für alle $\vec{u} \in U$.

Aufgabe T12.4: Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt in U und $\varphi : U \rightarrow U$ eine Isometrie, d.h. $\langle \varphi(\vec{v}), \varphi(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ für alle $\vec{v}, \vec{w} \in U$. Zeigen Sie, dass dann $\det A = \pm 1$ für die Matrix A von φ bezüglich einer ON-Basis. Ebenso für andere Basen?

Aufgabe T12.5: Verfeinern Sie für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ den Beweis der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung zu einem Beweis von

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}|^2 + \|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2.$$

13.1 Erzwungene Schwingungen

Die einfachste *Schwingungsgleichung* ist $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, die Gleichung des harmonischen Oszillators. Die allgemeine Lösung lässt sich als $c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ oder als $a \cos \omega_0(t - t_0)$ mit $a \geq 0$ und $t_0 \in [0, 2\pi/\omega_0)$ schreiben. Die Lösungen sind also sinusförmige Schwingungen der Periode $2\pi/\omega_0$ mit konstanter Amplitude und Phasenverschiebung.

Tritt ein *Dämpfungsterm* hinzu, so erhält man die Gleichung

$$\ddot{x} + \frac{2}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

wobei $\tau > 0$, des gedämpften harmonischen Oszillators. Denken wir uns zunächst τ sehr groß, die Dämpfung also sehr schwach, so erwarten wir intuitiv, dass die Lösungen beinahe noch wie vorher aussehen, dass aber die Amplitude nicht mehr konstant sein, sondern im Laufe der Zeit langsam abnehmen wird, und auch die Periode oder Schwingungsdauer wird ein wenig länger sein als im ungedämpften Fall, weil die Bewegung durch die Dämpfung ein bisschen gehemmt ist.

Ob das wahr ist und was es überhaupt genau heißen soll, lässt sich natürlich nur durch Rechnung feststellen. Im Kapitel 5 hatten wir die Gleichung $\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$ für beliebige Konstanten a_0 und

a_1 vollständig gelöst, für den Spezialfall des schwach gedämpften harmonischen Oszillators kommt dabei

$$x(t) = ae^{-t/\tau} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}(t - t_0)\right)$$

als allgemeine Lösung heraus, die intuitive Erwartung quantitativ bestätigend: zugrunde liegt immer noch eine Schwingung, aber die Schwingungsdauer ist nicht mehr $2\pi/\omega_0$, sondern der etwas größere Wert $2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$, und die Amplitude nicht mehr konstant a , sondern als $ae^{-t/\tau}$ sanft abklingend.

Im gegenwärtigen Abschnitt geht es um den durch eine sinusförmig schwingende äußere Kraft angetriebenen harmonischen Oszillator mit der Gleichung

$$\ddot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = K \cos \omega t.$$

Um den physikalischen Sinn dieser Gleichung und ihrer Lösungen zu verstehen, wäre es wichtig, die physikalische Bedeutung der Parameter τ , ω_0 , K und ω im Auge zu behalten und deren Einfluss auf das Lösungsverhalten wiederum physikalisch zu deuten. Wir wollen die Gleichung jetzt aber einfach als ein mathematisches Problem betrachten, uns fragen was wir schon darüber wissen und wie wir zur Lösung weiter vorgehen können.

Jedenfalls ist die Gleichung eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, und da wir die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung schon kennen, brauchen wir nur noch eine einzelne Lösung dieser inhomogenen Gleichung zu finden, um die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung zu haben.

Den Parameter K dürfen wir oBdA als Eins annehmen, also vergessen, denn wenn $x(t) = \psi(t)$ die Gleichung mit der Inhomogenität $\cos \omega t$ löst, dann löst $x(t) := K\psi(t)$ die Gleichung mit der Inhomogenität $K \cos \omega t$, also was soll's — mathematisch.

Beim Lösen der homogenen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten im Kapitel 5 war das Rechnen mit komplexen Zahlen und der Eulerformel das elegante Erfolgsrezept gewesen. Die Eulerformel lädt uns ein, die Inhomogenität $\cos \omega t$ als den Realteil von $e^{i\omega t}$ zu lesen und eine komplexe Lösung $x(t) = u(t) + iv(t)$

für die Inhomogenität $e^{i\omega t}$ zu suchen, statt direkt auf $\cos \omega t$ zuzugehen, der Realteil $u(t)$ löst dann die ursprüngliche Gleichung. Die spezielle Gestalt der Koeffizienten, $\frac{2}{\tau}$ und ω_0^2 , und des Exponenten $i\omega$ ist dann aber mathematisch gesehen ein Relikt aus der physikalischen Motivation der Gleichung, den Blick auf die mathematische Natur des Problems eher verstellend, und so finden wir uns mit einem Male auf der Suche nach einer Lösung von

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = e^{\mu t},$$

wobei a_0 , a_1 und μ drei möglicherweise komplexe Zahlen sind, jede nähere Bestimmung dieser Zahlen dürfen wir erst einmal bequem außer Acht lassen.

Für die linke Seite der Gleichung führen wir zur Abkürzung die *Operatorschreibweise* $L[x] := \ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x$ ein und sprechen vom *Differentialoperator* L . Die Anwendung von L auf eine Funktion x ist also wieder eine Funktion $L[x]$, die eben durch $L[x](t) := \ddot{x}(t) + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t)$ definiert ist. Wenn aber die Funktion keinen eigenen Namen führt sondern anonym durch einen Term definiert ist, so werden wir natürlich auch $L[x(t)]$ gutwillig als $L[x](t)$ lesen, wenn es ersichtlich so gemeint ist. Die Benutzung eckiger statt runder Klammern soll dann aber daran erinnern, dass ein Operator im Allgemeinen den Wert $L[x](t_0)$ nicht allein aus dem Wert $x(t_0)$ bestimmen kann, in unserem Falle braucht er ja auch $\dot{x}(t_0)$ und $\ddot{x}(t_0)$ dazu. — Der Operator L ist offensichtlich *linear* in dem Sinne, dass $L[\varphi + \psi] = L[\varphi] + L[\psi]$ und $L[c\varphi] = cL[\varphi]$ für konstantes c gilt.

Die Differentialgleichung lautet nun also $L[x] = e^{\mu t}$. Wir bezeichnen mit $P(\lambda) := \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$ das **charakteristische Polynom** unseres Operators L , dessen Nullstellen eine so wichtige Rolle bei der Lösung der homogenen Gleichung $L[x] = 0$ im Kapitel 5 gespielt hatten, weil für jedes λ offenbar

$$L[e^{\lambda t}] = P(\lambda)e^{\lambda t}$$

gilt und daher $e^{\lambda t}$ genau dann eine Lösung der homogenen Gleichung ist, wenn λ eine dieser Nullstellen ist.

Sie haben vielleicht das Gefühl, wir hätten an der inhomogenen Gleichung noch gar nicht angefangen zu arbeiten, sondern nur,

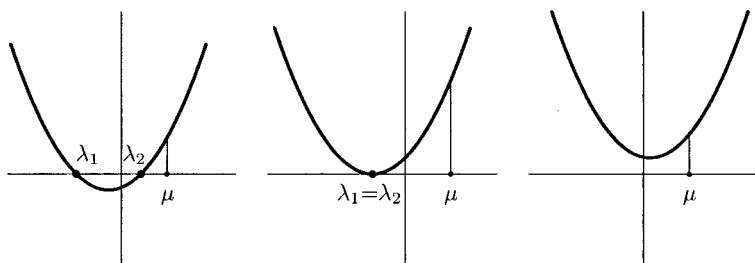
bildlich gesprochen, Bleistifte gespitzt und Papier zurechtgelegt, denn was war's denn? Ein paar Abkürzungen eingeführt und an den homogenen Fall erinnert. Aber $L[e^{\mu t}] = P(\mu)e^{\mu t}$ besagt doch, dass $x(t) := e^{\mu t}$ die inhomogene Gleichung mit der Inhomogenität $P(\mu)e^{\mu t}$ löst, und weil L linear ist, erhalten wir daraus ganz kostenlos das Resultat:

Lemma 1: *Im Falle $P(\mu) \neq 0$ ist*

$$x(t) := \frac{1}{P(\mu)} e^{\mu t}$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = e^{\mu t}$. $\square$

Beachte, dass die Bedingung $P(\mu) \neq 0$ nichts darüber aussagt, von welchem Typ die homogene Gleichung ist, die Nullstellen des charakteristischen Polynoms mögen reell oder komplex, doppelt oder einfach sein: verlangt wird ja nur, dass μ keine dieser Nullstellen ist.



$P(\mu) \neq 0$ schränkt den Typ der homogenen Gleichung nicht ein

Wenn aber $P(\mu) = 0$ ist, so löst $e^{\mu t}$ nur die homogene Gleichung und nützt uns für die inhomogene nichts. Im Abschnitt 5.3 hatte uns, wenn $e^{\lambda t}$ nicht mehr reichte, $te^{\lambda t}$ weitergeholfen. Was ist $L[te^{\mu t}]$? Das könnten wir leicht ausrechnen, es erhöht die Übersichtlichkeit aber ganz ungemein, wenn wir dabei einen kleinen Rechentrick benutzen. Betrachten wir nämlich $e^{\mu t}$ als Funktion von zwei Variablen μ und t , so ist offenbar

$$te^{\mu t} = \frac{\partial}{\partial \mu} e^{\mu t},$$

und wegen der Vertauschbarkeit von $\frac{\partial}{\partial \mu}$ und $\frac{\partial}{\partial t}$ kann man auch $\frac{\partial}{\partial \mu}$ mit L vertauschen und erhält

$$L[te^{\mu t}] = L\left[\frac{\partial}{\partial \mu} e^{\mu t}\right] = \frac{\partial}{\partial \mu} L[e^{\mu t}] = \frac{\partial}{\partial \mu} P(\mu) e^{\mu t} = (P'(\mu) + P(\mu)t) e^{\mu t},$$

woraus wir nun ablesen:

Lemma 2: Ist $P(\mu) = 0$, aber $P'(\mu) \neq 0$, so ist

$$x(t) := \frac{1}{P'(\mu)} te^{\mu t}$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung $L[x] = e^{\mu t}$. $\square$

Der einzige jetzt noch ungelöste Fall ist also der, dass μ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist und zugleich der *Grenzfall* $P(\mu) = P'(\mu) = 0$ vorliegt. Aber auch diesen Fall können wir nach derselben Methode behandeln, denn stets gilt $L[t^2 e^{\mu t}] = L\left[\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} e^{\mu t}\right] = \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} L[e^{\mu t}] = \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} (P'(\mu) + P(\mu)t) e^{\mu t} = (P''(\mu) + 2P'(\mu)t + P(\mu)t^2) e^{\mu t}$, und wegen $P'' \equiv 2$ folgt daraus

Lemma 3: Ist $P(\mu) = P'(\mu) = 0$, so ist

$$x(t) := \frac{1}{2} t^2 e^{\mu t}$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung $L[x] = e^{\mu t}$. $\square$

Diese Methode, $t^k e^{\mu t}$ als $\frac{\partial^k}{\partial \mu^k} e^{\mu t}$ zu lesen und die Vertauschbarkeit von $\frac{\partial}{\partial t}$ und $\frac{\partial}{\partial \mu}$ auszunutzen, hat übrigens den Vorteil, bei Differentialgleichungen n -ter Ordnung genau so zu funktionieren. Als nächsten Fall hätte man dort $P(\mu) = P'(\mu) = P''(\mu) = 0$, $P'''(\mu) \neq 0$ zu behandeln, bei uns kommt dieser wegen $P'' \equiv 2$ natürlich nicht vor.

Haben wir uns inzwischen meilenweit von der physikalisch interessanten Gleichung $\ddot{x} + \frac{2}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = \cos \omega t$ entfernt? Aber gar

nicht. Seien also τ , ω_0 und ω drei positive reelle Werte und

$$L[x] := \ddot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x$$

und $\mu = i\omega$. Dann ist $P(i\omega) = -\omega^2 + \frac{2}{\tau}i\omega + \omega_0^2 = \omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{2\omega}{\tau}$ und deshalb jedenfalls $P(\mu) \neq 0$, wir erhalten daher aus Lemma 1 eine komplexe Lösung von $L[x] = e^{i\omega t}$ und als deren Realteil die reelle Lösung

$$x(t) := \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\omega/\tau} e^{i\omega t} \right]$$

von $\ddot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \cos \omega t$, und damit sind wir im Prinzip schon fertig.

Wenn Sie im Rechnen mit komplexen Zahlen schon so versiert wären, wie Sie es, sagen wir, in einem Jahre sein werden, dann wüssten Sie sowieso ohne weitere Anleitung, wie man diesen Realteil am besten ausrechnet. Lassen Sie mich Ihnen für jetzt ein wenig Anleitung geben.

Zum Berechnen eines Kehrwertes $\frac{1}{a+ib}$, mit $a, b \in \mathbb{R}$ und nicht beide Null, besteht grundsätzlich immer die Möglichkeit, den Bruch mit $a - ib$ zu erweitern, dann hat man im Nenner die reelle Zahl $(a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$, weil ja $i^2 = -1$ ist, und damit

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i \frac{b}{a^2+b^2}$$

In unserer speziellen Situation ist aber eine andere Methode angebrachter, die uns nämlich unseren Faktor gleich in die Form

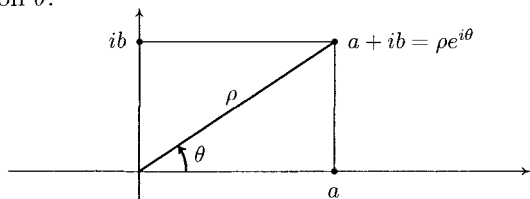
$$\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\omega/\tau} =: \frac{1}{a+ib} = Ae^{i\varphi}$$

bringt und wir wegen $Ae^{i\varphi} e^{i\omega t} = Ae^{i(\omega t + \varphi)}$ den gesuchten Realteil als $x(t) := A \cos(\omega t + \varphi)$ direkt hinschreiben können.

Dazu drücken wir erst einmal $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten aus, das heißt wir suchen ein $\rho > 0$ und ein $\theta \in \mathbb{R}$ mit $a = \rho \cos \theta$ und $b = \rho \sin \theta$, oder durch die Eulerformel ausgedrückt, mit $a+ib = \rho e^{i\theta}$. Dann ist

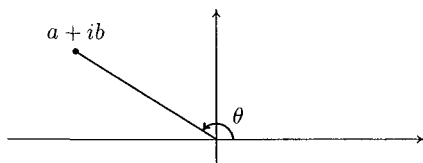
$$\frac{1}{a+ib} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta} =: Ae^{i\varphi},$$

wie wir es haben wollten. Wie berechnen wir ρ und θ ? Dass wir wegen $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ keine andere Wahl haben als $\rho := \sqrt{a^2 + b^2}$ zu setzen, ist klar, und eine Skizze gibt uns die anschauliche Bedeutung von θ .



Allerdings muss man bei der Bestimmung des *Polarwinkels* von (a, b) oder *Arguments* von $a + ib$, wie man θ auch nennt, immer ein wenig denken. Eine schöne Formel der Art $\theta = \theta(a, b)$, die allen Anwendungssituationen gerecht würde, gibt es nämlich nicht.¹

Natürlich fallen Ihnen angesichts der Skizze gleich solche Formeln ein, Sie wollen mir $\theta = \arctan(b/a)$ oder $\theta = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ usw. vorschlagen. Aber die Zweige der Arcusfunktionen, wie Sie sich aus dem Kapitel 1 erinnern, haben immer nur Bildintervalle der Länge π , beim Hauptzweig des Arcussinus war es $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, bei dem des Arcuscosinus $[0, \pi]$, sowie $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $(0, \pi)$ bei den Hauptzweigen des Arcustangens und -cotangens. Schon deshalb kann nicht eine einzige Arcusfunktion alle Punkte (a, b) der Ebene bedienen.



$\theta = \arctan(b/a)$ falsch, obwohl $\tan \theta = b/a$ richtig ist: der Hauptzweig ist hier der falsche Zweig.

Wenn Sie daran nicht denken, und zum Beispiel für $a \neq 0$ einfach $\theta = \arctan(b/a)$ setzen, weil ja $\tan \theta = b/a$ sein muss und der arme Arcustangens sich nicht wehren kann, dann erhalten Sie einen Winkel $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, dessen Cosinus jedenfalls positiv ist und der für negatives a daher die Forderung $a = \rho \cos \theta$ nie und nimmer erfüllen kann!

In unserem Anwendungsbeispiel $a + ib := \omega_0^2 - \omega^2 + i2\omega/\tau$ ist aber nach den Voraussetzungen jedenfalls $b \geq 0$, und deshalb ge-

ben sowohl $\operatorname{arccot}(a/b)$ als auch $\arccos(a/\sqrt{a^2+b^2})$ den richtigen Winkel θ , insgesamt erhalten wir als

Korollar: Sind τ , ω_0 und ω drei positive reelle Werte, so ist $x(t) := A \cos(\omega t + \varphi)$ mit

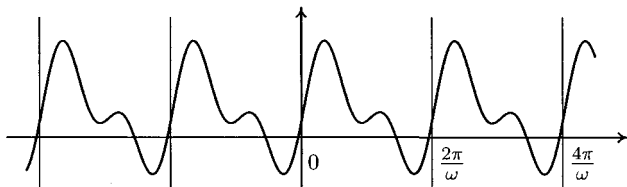
$$A := \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\omega/\tau)^2}} \quad \text{und} \quad \varphi := -\operatorname{arccot} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\omega/\tau}$$

eine Lösung von $\ddot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \cos \omega t$. □

Ebenso ist nun durch $x(t) := A \sin(\omega t + \varphi)$ mit A und φ wie oben eine Lösung von $\ddot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \sin \omega t$ definiert, was wegen $\sin \alpha = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})$ aus dem Korollar hervorgeht, aber auch in dessen Herleitung schon enthalten ist, da ja $A \sin(\omega t + \varphi)$ der Imaginärteil von $Ae^{i(\omega t + \varphi)}$ ist.

13.2 Fourierreihen

Stellen wir uns die Frage nach der Lösung der inhomogenen Gleichung $\ddot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$, für eine vorerst *beliebige* periodische Funktion $f(t)$ der Periode oder *Schwingungsdauer* $\frac{2\pi}{\omega}$.



Sei $f(t + \frac{2\pi}{\omega}) = f(t)$, wie bei $\cos \omega t$.

Funktionen dieser Art, für die wir eine Lösung schon kennen, sind außer $\cos \omega t$ und $\sin \omega t$ natürlich auch alle $\cos k\omega t$ und $\sin k\omega t$, $k \in \mathbb{N}$, und sowieso die Konstanten, und somit auch die *trigonometrischen Polynome*, genauer:

Definition: Unter einem *trigonometrischen Polynom* oder einem *Fourierpolynom* N -ten Grades mit der Periode $\frac{2\pi}{\omega}$ versteht man eine Funktion der Gestalt

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$$

mit konstanten **Koeffizienten** a_0 und $a_k, b_k, k = 1, \dots, N$.

Der unмотivierte Faktor $\frac{1}{2}$, mit dem man konventionellerweise den konstanten Term eines Fourierpolynoms notiert, stört Sie vielleicht, gewiß hätten Sie eher den Faktor $\cos 0\omega t \equiv 1$ erwartet. Sie werden aber bald überzeugt sein, dass der Faktor besser $\frac{\sqrt{2}}{2}$ heißen sollte und etwas später verstehen, weshalb sich doch die traditionelle Wahl $\frac{1}{2}$ erhalten hat. Denken Sie aber jetzt nicht darüber nach, Sie erraten es nicht. — Aus der Linearität des Differentialoperators folgt nun:

Korollar: Ist $f(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$ und setzt man

$$A_k := \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - k^2\omega^2)^2 + (2k\omega/\tau)^2}} \quad \text{und}$$

$$\varphi_k := -\operatorname{arccot} \frac{\omega_0^2 - k^2\omega^2}{2k\omega/\tau}$$

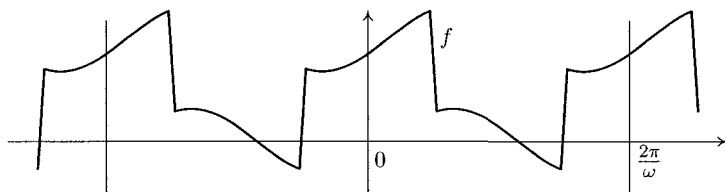
so ist

$$x(t) = \frac{a_0}{2\omega_0^2} + \sum_{k=1}^N (A_k a_k \cos(k\omega t + \varphi_k) + A_k b_k \sin(k\omega t + \varphi_k))$$

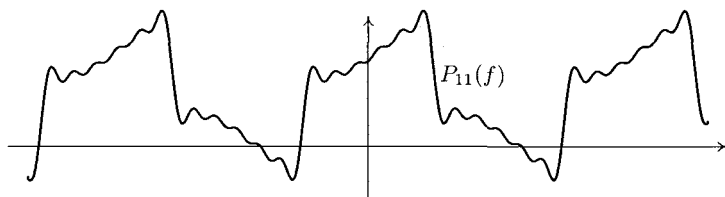
eine Lösung von $\ddot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$. □

Beachte, dass wegen der Additionstheoreme auch diese Lösung wieder ein trigonometrisches Polynom N -ten Grades mit der Periode $\frac{2\pi}{\omega}$ ist.

Trigonometrische Polynome mögen Ihnen vielleicht als eine immer noch sehr spezielle Klasse $\frac{2\pi}{\omega}$ -periodischer Funktionen vorkommen, in der Tat kann man aber erstaunlich viele periodische Funktionen, wenn auch vielleicht ein bisschen zittrig, durch Fourierpolynome approximieren:



$2\pi/\omega$ -periodische Funktion f



Trigonometrisches Polynom $P_{11}(f)$ elften Grades

Und da in der Analysis so vielfach erfolgreich mit unendlichen Reihen gearbeitet wird, liegt die Frage nahe, ob man nicht auch hier von der bloßen *Approximation* durch endliche Summen zur exakten Darstellung durch eine unendliche Reihe übergehen kann.

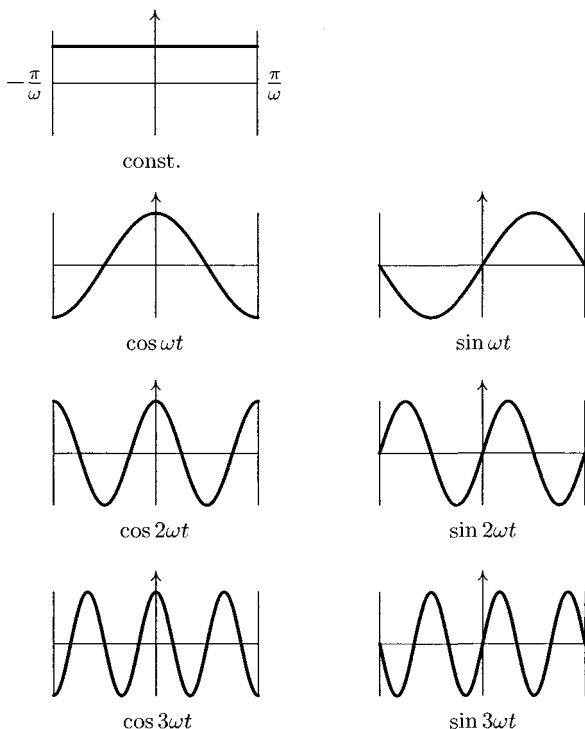
Definition: Unter einer **Fourierreihe** der Periode $\frac{2\pi}{\omega}$ versteht man eine unendliche Reihe der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t),$$

sie mag nun konvergieren oder nicht. Die Konstanten a_0 , a_k , b_k heißen die **Koeffizienten** der Fourierreihe. $\square$

Reihenentwicklungen werfen eine Existenz- und eine Eindeutigkeitsfrage auf. Welche $\frac{2\pi}{\omega}$ -periodischen Funktionen $f(t)$ lassen sich durch eine konvergente Fourierreihe darstellen? Und wenn sich eine Funktion $f(t)$ so darstellen lässt, sind dann die Koeffizienten der Fourierreihe *eindeutig bestimmt*, oder ist es etwa vielmehr so, dass sich die willkürliche Abänderung einiger Koeffizienten immer durch geschicktes Justieren der übrigen wieder ausgleichen lässt?

Haben wir eine intuitive Antwort auf diese Fragen? Nein? Vielleicht sollten wir uns die an der Entwicklung beteiligten trigonometrischen Funktionen einmal anschauen:

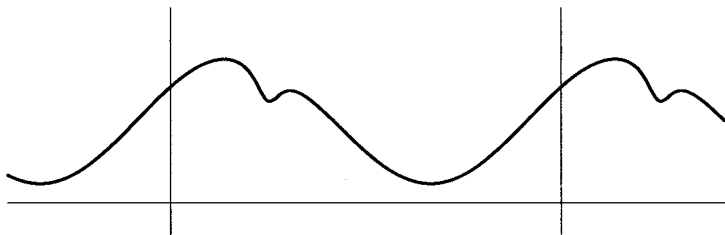


Ist es plausibel, dass sich eine mehr oder weniger 'beliebige' periodische Funktion als eine Überlagerung derart spezieller Summanden aufbauen lässt und dass dabei jeder Summand nur mit einer ein-

deutig feststehenden, unverwechselbaren Amplitude beteiligt sein kann?

Ja, ja, sagen Sie, das ist uns ganz plausibel, das ist eben wie bei der Zerlegung des Klangs einer schwingenden Saite in den Grundton und die verschiedenen Obertöne, das weiß doch jeder.

Nichts dergleichen wissen Sie. Sie verstehen, weshalb eine Funktion mit positiver Ableitung monoton steigt, sie sehen beim Anblick des Richtungsfeldes die Lösungen einer Differentialgleichung vor Ihrem geistigen Auge, das will ich Ihnen zugestehen, aber Sie haben nicht den blassesten Schimmer, *weshalb* selbst eine schöne Funktion wie etwa diese



Entwickelbar in eine Fourierreihe?

in eine Fourierreihe entwickelbar sein sollte, und zwar nur auf eine Weise. Bald werden Sie es aber wissen, und Sie werden dann insbesondere gesehen haben, welche entscheidende Rolle die höherdimensionale lineare Algebra beim intuitiven Erfassen der Theorie der Fourierreihen spielt.

Legen wir uns nun das Handwerkszeug zurecht, um das Problem in Angriff zu nehmen. OBdA setzen wir $\omega = 1$, zur Entlastung der Notation. Es ist klar, dass wir mathematisch² dadurch nichts verlieren: wenn wir über die Fourierentwicklung 2π -periodischer Funktionen etwas wissen und bekommen eine $\frac{2\pi}{\omega}$ -periodische Funktion $f(t)$ vorgelegt, so ist ja $f(\frac{t}{\omega})$ eine 2π -periodische Funktion, auf die wir unsere Sätze anwenden können.

Sodann entscheiden wir uns für eine Klasse 2π -periodischer Funktionen, mit denen wir arbeiten wollen. Größtmögliche Allgemeinheit

streben wir nicht an, aber wir wollen doch den in den Anwendungen vorkommenden Beispielen gewachsen sein und insbesondere zulassen, dass die Funktionen auch Sprünge machen dürfen:

Notation: Es bezeichne V die Menge aller 2π -periodischen beschränkten Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die im Periodenintervall $[-\pi, \pi]$ höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen haben. $\square$

Sie haben wohl nichts dagegen, wenn ich von V als von dem *Vektorraum* dieser Funktionen spreche, womit einstweilen nur daran erinnert werden soll, dass jedenfalls die Nullfunktion $f \equiv 0$ ein Element von V ist und mit $f, g \in V$ immer auch $\lambda f + \mu g \in V$ ist. Was wissen wir noch über V ?

Notiz: Mit $f, g \in V$ ist auch $f \cdot g \in V$, und alle Funktionen in V sind über jedes kompakte Intervall Riemann-integrierbar. $\square$

Dieser Sachverhalt ermöglicht die folgende Definition, mit der wir den Vektorraum intuitiv an die *orthogonale lineare Algebra* anschließen, die wir im Abschnitt 12.2 kennengelernt haben.

Definition: Für $f, g \in V$ definieren wir durch

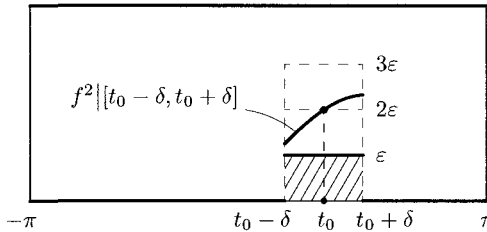
$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) dt$$

das **Skalarprodukt** der Funktionen f und g und dementsprechend durch $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ die **Norm** der Funktion $f \in V$. $\square$

Offensichtlich ist die dadurch gegebene Abbildung $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$ *symmetrisch*, d.h. $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$, und *bilinear*, d.h. $\langle \lambda f_1 + \mu f_2, g \rangle = \lambda \langle f_1, g \rangle + \mu \langle f_2, g \rangle$ und ebenso für die andere Variable. *Positiv definit* dürfen wir dieses Skalarprodukt von Funktionen mit ganz gutem Gewissen zwar nicht nennen, aber fast, denn stets ist $\langle f, f \rangle \geq 0$ und es gilt:

Lemma 1: Für $f \in V$ gilt $\langle f, f \rangle = 0$ genau dann, wenn f im Periodenintervall $[-\pi, \pi]$ nur an endlich vielen Stellen von Null verschieden ist.

BEWEIS: Wenn f nur an endlich vielen Stellen in $[-\pi, \pi]$ ungleich Null ist, dann gilt natürlich $\langle f, f \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt = 0$, beweisbedürftig ist nur die Umkehrung. Sei also $f \in V$ und $\langle f, f \rangle = 0$. Wäre $f(t_0) \neq 0$ an einer Stetigkeitsstelle $t_0 \in [-\pi, \pi]$ von f und daher auch von f^2 , so gäbe es ein δ -Intervall um t_0 , in dem sich $f(t)^2$ von $f(t_0)^2$ nirgends um mehr als $\varepsilon := \frac{1}{2}f(t_0)^2$ unterscheidet. Also wäre $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt > 0$, weil wir $f^2|[-\pi, \pi]$ in eine Zange mit positiver Untersumme nehmen können:



$f(t_0) \neq 0$ an einer Stetigkeitsstelle sichert $\|f\| > 0$

im Widerspruch zur Annahme $\langle f, f \rangle = 0$. Also muss f an allen Stetigkeitsstellen Null sein, und Unstetigkeitsstellen kann es nach Definition von V nur endlich viele haben. $\square$

Aus $\langle f, f \rangle = 0$ folgt also noch nicht, dass f die richtige Nullfunktion ist, sondern nur dass es 'so gut wie Null' ist, wie man etwas lax sagen könnte. Das verpflichtet uns zu etwas erhöhter Wachsamkeit, wenn wir unsere für (wirklich positiv definite) Skalarprodukte in Untervektorräumen eines $\mathbb{R}^N$ gewonnene Anschauung jetzt auch in unserem Funktionenraum V walten lassen. Aber die Anschauung soll uns auch nur Ideen liefern, Behauptungen müssen sowieso bewiesen werden. Und auf Untervektorräumen von V , die nur *stetige* Funktionen enthalten, ist das Funktionen-Skalarprodukt tatsächlich positiv definit, denn eine überall stetige Funktion mit $\langle f, f \rangle = 0$ muss überall Null sein, wie wir oben gesehen haben.

Und nun kommen wir zu einem Sachverhalt, der Ihnen auf der vielleicht noch etwas dämmrigen Bühne der Fourierreihen die großen Scheinwerfer aufdrehen wird:

Lemma 2: Die Funktionen

$$\begin{aligned}\varphi_0(t) &::= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \varphi_k(t) &::= \cos kt, \quad k \geq 1 \\ \varphi_{-k}(t) &::= \sin kt, \quad k \geq 1\end{aligned}$$

bilden zusammen ein Orthonormalsystem $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ in V bezüglich des Skalarprodukts von Funktionen, d.h. es gilt $\langle \varphi_k, \varphi_\ell \rangle = \delta_{k\ell}$ für alle $k, \ell \in \mathbb{Z}$.

BEWEIS: Es ist $\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = \frac{1}{\pi} 2\pi \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$, und für $k \neq 0$ ist $\langle \varphi_0, \varphi_k \rangle = 0$ schon weil φ_0 konstant ist. Da Cosinus und Sinus durch Translation auseinander hervorgehen, ist $\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle = \langle \varphi_{-k}, \varphi_{-k} \rangle$ für alle $k \geq 1$, und wegen $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ gilt $\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle + \langle \varphi_{-k}, \varphi_{-k} \rangle = \frac{1}{\pi} 2\pi = 2$. Für $k \geq 0$ und $\ell < 0$ ist $\varphi_k(t)\varphi_\ell(t)$ eine ungerade Funktion, das Integral darüber von $-\pi$ bis π verschwindet also. Schließlich gilt für $0 < k < \ell$ nach dem Additionstheorem des Cosinus $\varphi_k(t)\varphi_\ell(t) + \varphi_{-k}(t)\varphi_{-\ell}(t) = \cos(k-\ell)t$, also $\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle + \langle \varphi_{-k}, \varphi_{-k} \rangle = 0$, aber nach dem Translationsargument auch $\langle \varphi_k, \varphi_\ell \rangle = \langle \varphi_{-k}, \varphi_{-\ell} \rangle$, also beide gleich Null. $\square$

Als eine erste Anwendung finden wir zu jedem $f \in V$ mühelos das bestapproximierende trigonometrische Polynom n -ter Ordnung: durch orthogonale Projektion.

Notation: Im Folgenden bezeichne $V_n := \text{Lin}(\varphi_{-n}, \dots, \varphi_n) \subset V$ den Untervektorraum der trigonometrischen Polynome vom Grade $\leq n$ und $P_n : V \rightarrow V_n$ die orthogonale Projektion von V auf V_n , also

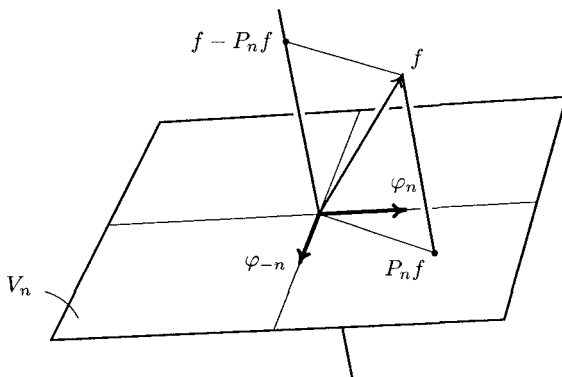
$$P_n f := \sum_{k=-n}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

Wie immer bei orthogonalen Projektionen minimiert $P_n f$ in V_n den Abstand zu f , d.h.:

Lemma 3: Für jedes trigonometrische Polynom $T_n \neq P_n f \in V_n$ gilt

$$\|f - P_n f\| < \|f - T_n\|.$$

BEWEIS: Ersichtlich ist $f - P_n f \perp \varphi_k$ für $k = -n, \dots, n$, so sind die Koeffizienten von $P_n f$ ja gerade eingerichtet. Also steht $f - P_n f$ auf *allen* Elementen von V_n senkrecht, insbesondere auf $P_n f - T_n$, und $\|f - T_n\|^2 = \|f - P_n f + P_n f - T_n\|^2$ ist daher nach Pythagoras gleich $\|f - P_n f\|^2 + \|P_n f - T_n\|^2$, also $\geq \|f - P_n f\|^2$. $\square$



Zerlegung von f in ein trigonometrisches Polynom
 $P_n f \in V_n$ und einen zu V_n senkrechten Anteil $f - P_n f$

Beim Weitergehen von $P_{n-1}f$ zu $P_n f$ kommen nur zwei Terme hinzu: $P_n f = P_{n-1}f + \langle f, \varphi_{-n} \rangle \varphi_{-n} + \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$, die vorher schon vorhandenen Koeffizienten ändern sich nicht. Diese wohlbestimmten Koeffizienten $\langle f, \varphi_{\pm k} \rangle$ sind ja als Integrale explizit gegeben, und schreiben wir das bestapproximierende Fourierpolynom in der klassischen Notation, so wird auch der konventionelle Faktor $\frac{1}{2}$ bei a_0 verständlich, es gilt nämlich:

Bemerkung: Die Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$ und $b_1, \dots, b_n$ des bestapproximierenden Fourierpolynoms

$$(P_n f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

von $f \in V$ sind durch

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt$$

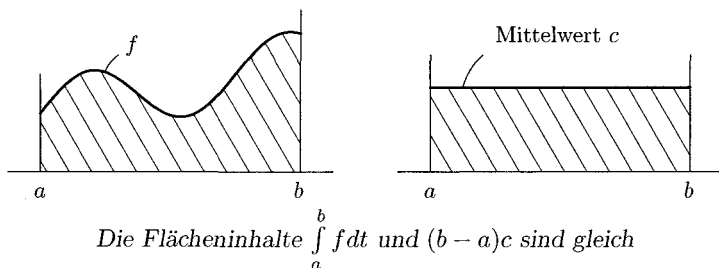
gegeben.

BEWEIS: Nachzurechnen ist nur noch, dass dabei auch der konstante Term $\langle f, \varphi_0 \rangle \varphi_0$ von $P_n f$ richtig mit herauskommt. Aber $\langle f, \varphi_0 \rangle \varphi_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sqrt{2}}{2} dt \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{2} a_0$, wie es sein soll. $\square$

Der Wunsch, die Formel für den Koeffizienten des konstanten Terms an die Cosinusformel anzuschließen, ist auch der ganze Grund für die übliche Konvention, den konstanten Term als $\frac{a_0}{2}$ zu notieren.

Bevor wir nun von den Fourierpolynomen zu den unendlichen Fourierreihen übergehen, wollen wir uns noch einmal vor Augen halten, dass die Norm, mit der wir hier den Approximationsfehler $\|f - P_n f\|$ gemessen haben, mittels Integration über das Quadrat der Fehlerfunktion $f(t) - (P_n f)(t)$ definiert wurde. Es findet dabei also eine gewisse Mittelbildung statt, eine kleine Norm $\|f - P_n f\|$ garantiert nicht, dass der Fehler $f(t) - (P_n f)(t)$ auch an jeder einzelnen Stelle t klein ist.

Das wollen wir auch durch eine Sprechweise anerkennen, die uns daran immer erinnert. Sie verstehen, inwiefern man $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ als den *Mittelwert* einer Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen kann:



In Anlehnung daran nennt man $\sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)^2 dt}$ das **quadratische Mittel** von f über $[a, b]$. In unserem Falle wäre zwar $b - a =$

$\pi - (-\pi) = 2\pi$, und wir haben bei der Definition des Skalarproduktes von Funktionen den Faktor $\frac{1}{\pi}$ statt $\frac{1}{2\pi}$ benutzt — damit die trigonometrischen Funktionen die Norm 1 bekommen — aber bis auf den Faktor $\sqrt{2}/2$ ist unsere Norm schon die des quadratischen Mittels, und deshalb sagt man von Sachverhalten, die sich auf diese Norm beziehen, sie gälten *im quadratischen Mittel*.

Definition: Eine Folge $f_1, f_2, \dots$ von Funktionen in V **konvergiert im quadratischen Mittel** gegen eine Funktion $f \in V$, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0$ gilt. $\square$

Unter der Konvergenz einer unendlichen *Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, es mag sich nun um eine Reihe von Zahlen oder um eine Reihe von Funktionen handeln, versteht man bekanntlich die Konvergenz der Folge $s_1, s_2, \dots$ der zugehörigen Partialsummen $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$. Das ist kein Lemma oder dergleichen, sondern so ist es mit der Konvergenz von Reihen überhaupt gemeint, daran sei erinnert.

Lemma 4: Wenn eine Fourierreihe im quadratischen Mittel gegen eine Funktion $f \in V$ konvergiert, dann ist für jedes $n \geq 0$ die n -te Teilsumme gleich dem im quadratischen Mittel bestapproximierenden Fourierpolynom $P_n f$ von f .

BEWEIS: Bezeichnen wir die n -te Partialsumme der Fourierreihe vorerst mit f_n , weil wir ja noch nicht wissen, ob sie wirklich $P_n f$ ist. Jedenfalls ist dann $f_n - P_n f \in V_n$, also eine Linearkombination der trigonometrischen Funktionen $\varphi_{-n}, \dots, \varphi_n$, wir brauchten daher nur $\langle f_n - P_n f, \varphi_k \rangle = 0$ für alle k mit $-n \leq k \leq n$ zu zeigen, um $f_n - P_n f = 0$ und daher $f_n = P_n f$ zu wissen. Aber $f_n - P_n f = (f_n - f) + (f - P_n f)$ und daher gilt

$$\langle f_n - P_n f, \varphi_k \rangle = \langle f_n - f, \varphi_k \rangle + \langle f - P_n f, \varphi_k \rangle.$$

Über jeden der drei Terme sagt uns die lineare Algebra für $n \geq |k|$ etwas Interessantes. Der Term ganz rechts ist Null, denn $f - P_n f$ steht ja senkrecht auf V_n . Wegen $\|\varphi_k\| = 1$ gilt für den mittleren Term nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung die Abschätzung

$$|\langle f_n - f, \varphi_k \rangle| \leq \|f_n - f\|,$$

und deshalb nach Voraussetzung $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n - f, \varphi_k \rangle = 0$. Aber Halt, dürfen wir denn die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für das Skalarprodukt von Funktionen anwenden, wir haben sie in 12.2 doch nur für Skalarprodukte in Untervektorräumen U von $\mathbb{R}^N$ bewiesen? Berechtigter Einwand, aber schauen Sie die wenigen Beweiszeilen in 12.2 an: sie funktionieren ganz genau so für das Skalarprodukt von Funktionen in V . Also weiter. Jetzt wissen wir über den Term auf der linken Seite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n - P_n f, \varphi_k \rangle = 0,$$

wir wollten aber mehr, wir wollten $\langle f_n - P_n f, \varphi_k \rangle = 0$ für alle $n \geq |k|$ zeigen, was machen wir jetzt? Wir bedenken, dass beim Weitergehen von $f_n - P_n f$ zu $f_{n+1} - P_{n+1} f$ nur Terme hinzukommen, die sowieso auf φ_k senkrecht stehen! Bei festem k haben also die Skalarprodukte $\langle f_n - P_n f, \varphi_k \rangle$ für alle $n \geq |k|$ denselben Wert, und da der Limes Null ist, kann dieser Wert nur Null sein. $\square$

Korollar: Konvergiert eine Fourierreihe im quadratischen Mittel gegen eine Funktion $f \in V$, so gilt

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt$$

für die Koeffizienten dieser Fourierreihe. $\square$

Insbesondere sind die Koeffizienten dadurch wohlbestimmt, und somit haben wir eine Eindeutigkeitsaussage gewonnen, die uns doch, bevor wir die Ideen der orthogonalen linearen Algebra zu Hilfe nahmen, völlig rätselhaft gewesen war.

Noch haben wir keinen *Konvergenzsatz* für Fourierreihen bewiesen, in Lemma 4 war die Konvergenz gegen f einfach vorausgesetzt gewesen. Wie so oft ist auch hier die Eindeutigkeitsaussage leichter zu zeigen als die Existenzaussage. Können wir also auch noch keine Garantie dafür abgeben, ob ein f im quadratischen Mittel überhaupt durch eine Fourierreihe darstellbar ist, so wissen wir doch schon, dass dafür nur eine einzige Fourierreihe überhaupt in Frage kommt, und deshalb sagt man:

Sprechweise: Ist $f(t)$ irgend eine Funktion in V , so nennt man die Zahlen

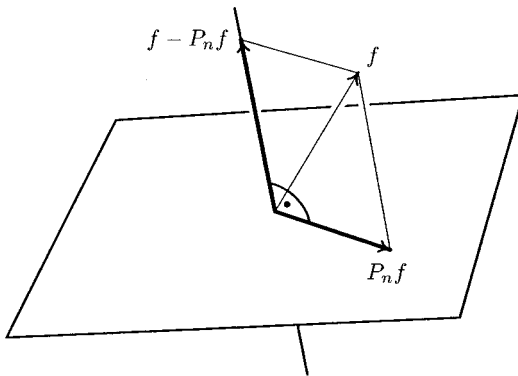
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt$$

die **Fourierkoeffizienten von f** und die damit gebildete Fourierreihe **die Fourierreihe von f** . $\square$

Im nächsten Abschnitt erwartet uns richtige analytische Arbeit beim Beweis einiger Konvergenzsätze, aber auf dem Weg dorthin nehmen wir rasch noch ein paar kostenlose Gaben der orthogonalen linearen Algebra mit.

Offensichtlich ist doch $\|f\|^2 = \|P_n f\|^2 + \|f - P_n f\|^2$ für jede Funktion $f \in V$, weil $f - P_n f$, wie schon so oft bemerkt, nach Konstruktion senkrecht auf V_n steht.



$$f - P_n f \perp P_n f, \text{ deshalb } \|f\|^2 = \|P_n f\|^2 + \|f - P_n f\|^2$$

Deshalb ist immer $\|P_n f\|^2 \leq \|f\|^2$, und $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n f\|^2 = \|f\|^2$ genau dann, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - P_n f\|^2 = 0$ gilt, wenn also die Fourierreihe von f im quadratischen Mittel gegen f konvergiert! Erinnern wir uns noch, dass $P_n f = \sum_{k=-n}^n \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k$ war und deshalb

$$\|P_n f\|^2 = \sum_{k=-n}^n \langle f, \varphi_k \rangle^2$$

ist und übersetzen das alles in die a_k, b_k -Sprache, wobei wir

$$\langle f, \varphi_0 \rangle^2 = \langle f, \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle^2 = \frac{1}{2} \langle f, 1 \rangle^2 = \frac{1}{2} a_0^2$$

beachten, so erhalten wir als Korollar:

Lemma 5: Für die Fourierkoeffizienten a_k, b_k einer Funktion $f \in V$ gilt stets die **Besselsche Ungleichung**

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt,$$

insbesondere konvergiert diese Reihe immer. Die Fourierreihe von f konvergiert genau dann im quadratischen Mittel gegen f , wenn sogar die **Parsevalsche Gleichung**

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt,$$

erfüllt ist. □

Als Korollar aus der Besselschen Ungleichung erhalten wir, dass die Summanden $(a_k^2 + b_k^2)$ der Reihe eine Nullfolge bilden müssen, also sind auch die beiden Folgen $(a_k)_{k \geq 1}$ und $(b_k)_{k \geq 1}$ einzeln Nullfolgen:

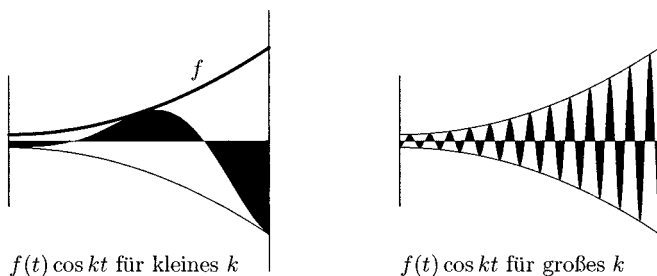
Korollar (Riemannsches Lemma): Für jede Funktion $f \in V$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt = 0$$

□

Das Riemannsches Lemma ist auch anschaulich ganz plausibel: für große k sorgen die schnell oszillierenden Faktoren im Integranden dafür, dass die Fläche zwischen dem Graphen und der t -Achse sich beinahe und mit wachsendem k immer genauer zu gleichen Teilen

oberhalb und unterhalb der Achse befindet und das Integral deshalb gegen Null geht.



Zur Illustration des Riemannschen Lemmas

13.3 Drei Konvergenzsätze für Fourierreihen

Die Frage nach dem Konvergenzverhalten der Fourierreihen hat viele Facetten. Ich erkläre Ihnen hier drei in unserer Reichweite liegende Resultate. Im ersten Satz geht es darum, welches Wohlverhalten der Funktion f sicherstellen kann, dass ihre Fourierreihe an einem festen Punkte t gegen den Funktionswert $f(t)$ konvergiert. Als Korollar wird sich zum Beispiel ergeben, dass insbesondere die Fourierreihe jeder periodischen C^1 -Funktion für *jedes* t gegen $f(t)$ konvergiert, dass also die sogenannte *punktweise Konvergenz* der Fourierreihe gegen f vorliegt. Der zweite Satz, in der Hauptsache ein Korollar aus dem ersten, handelt von der Konvergenz der Fourierreihe an den *Sprungstellen* der Funktion f und der dritte von der Konvergenz im quadratischen Mittel.

Ich will Ihnen den ersten Satz aber nicht einfach hinschreiben und beweisen, sondern wir wollen ihn zusammen *entdecken*. Sei also zunächst f irgend eine Funktion aus V , d.h. eine 2π -periodische beschränkte Funktion mit höchstens endlich vielen Unstetigkeitsstellen im Periodenintervall, und fassen wir eine feste Stelle $t_0 \in [-\pi, \pi]$ ins Auge. Es bezeichnen wieder $a_0, a_1, a_2, \dots$ und $b_1, b_2, \dots$ die Fourierkoeffizienten von f . Wie können wir etwas darüber herausfinden,

ob

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt_0 + b_k \sin kt_0) = f(t_0)$$

gilt? Anstatt zu jammern, Sie sähen gar keinen Weg dazu, könnten Sie doch jedenfalls Ihre Kenntnis der Fourierkoeffizienten

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt$$

benutzen, um die n -te Partialsumme explizit hinzuschreiben:

$$\begin{aligned} (P_n f)(t_0) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt_0 + b_k \sin kt_0) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kt_0 + \sin kt \sin kt_0) \right) dt \end{aligned}$$

Die Summanden rufen ja förmlich nach Vereinfachung durch ein Additionstheorem. Welches ist zuständig? Das des Cosinus:

$$(P_n f)(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t - t_0) \right) dt$$

Weshalb sollte das gegen $f(t_0)$ konvergieren? Sieht eher nicht so aus, in den Integranden geht die ganze Funktion $f(t)$ ein, und am Ende soll es nur auf den Wert $f(t_0)$ an der einen Stelle t_0 ankommen?

Vielleicht sollten wir diese uns interessierende Stelle bei der Integration etwas mehr ins Licht rücken, indem wir $t - t_0$ als Integrationsvariable substituieren. Die Integrationsgrenzen würden dann zwar zu $-\pi - t_0$ und $\pi - t_0$, aber da der Integrand 2π -periodisch ist, können wir es ebensogut bei $-\pi$ und π belassen und erhalten, wenn wir die neue Integrationsvariable τ nennen

$$(P_n f)(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t_0 + \tau) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k\tau \right) d\tau$$

Die interessanteste Stelle im Integrationsintervall ist jetzt $\tau = 0$. Weshalb sollte es im Limes für $n \rightarrow \infty$ nur darauf ankommen, was $f(t_0 + \tau)$ bei $\tau = 0$ macht?

Na großartig. Das ist doch ein bloße kosmetische Maßnahme gewesen! Das Problem ist noch dasselbe wie zuvor. — Stimmt. Es steht nur etwas netter da, vielleicht. Aber schauen wir auf den Inhalt der Formel. Immerhin nimmt die Cosinus-Summe bei $\tau = 0$ ihren größtmöglichen Wert n an, der Stelle $\tau = 0$ bei der Integration dadurch hoffentlich besonderes Gewicht verleihend, und vielleicht oszilliert die Cosinus-Summe für wachsende n rechts und links von $\tau = 0$ immer heftiger, so dass eine Art Riemann-Lemma-Effekt eintreten kann, der den Beitrag des Integranden für $\tau \neq 0$ immer weiter unterdrückt?

Das ist allenfalls ein Silberstreif am Horizont, wenn wir aber wirklich etwas daraus machen wollen, müssen wir das Verhalten der Cosinus-Summe genau verstehen, Formelsammlung, wo ist denn meine Formelsammlung ... finde ich gerade nicht, macht nichts, das rechnen wir doch auch selber aus: nach der Eulerformel ist die Cosinus-Summe der Realteil von

$$\sum_{k=1}^n e^{ik\tau} = e^{i\tau} + (e^{i\tau})^2 + \cdots + (e^{i\tau})^n,$$

und da bekanntlich und offensichtlich

$$(1 + x + \cdots + x^n)(1 - x) = 1 - x^{n+1}$$

immer gilt, für $x \neq 1$ also

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

so folgt daraus für unsere Zwecke, wenn wir uns die fehlende 1 von dem Summanden $\frac{1}{2}$ borgen:

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k\tau = -\frac{1}{2} + \operatorname{Re} \frac{1 - e^{i(n+1)\tau}}{1 - e^{i\tau}}.$$

Das kann man nach den Regeln der Kunst ausrechnen, $\frac{x+iy}{a+ib} = \frac{(x+iy)(a-ib)}{a^2+b^2} =$ usw., aber hier bietet sich eine kleine Abkürzung an:

wenn wir den Bruch mit $e^{-i\frac{\tau}{2}}$ erweitern, dann wird der Nenner zu $e^{-i\frac{\tau}{2}} - e^{i\frac{\tau}{2}}$ und damit nach der Eulerformel rein imaginär, somit spielt aber der Realteil des Zählers $e^{-i\frac{\tau}{2}} - e^{i(n+\frac{1}{2})\tau}$ für den Realteil des Bruches keine Rolle mehr und wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k\tau &= -\frac{1}{2} + \operatorname{Re} \frac{e^{-i\frac{\tau}{2}} - e^{i(n+\frac{1}{2})\tau}}{e^{-i\frac{\tau}{2}} - e^{i\frac{\tau}{2}}} \\ &= -\frac{1}{2} + \operatorname{Re} \frac{-i \sin \frac{\tau}{2} - i \sin(n + \frac{1}{2})\tau}{-2i \sin \frac{\tau}{2}} \\ &= \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\tau}{2 \sin \frac{\tau}{2}} \end{aligned}$$

als das Ergebnis, dessentwegen wir die Formelsammlung gesucht hatten. Setzen wir es in die Formel für das n -te Fourierpolynom von f ein, so erhalten wir den

Hilfssatz 1: Für jede Funktion $f \in V$ und jedes feste $t_0 \in [-\pi, \pi]$ gilt

$$(P_n f)(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t_0 + \tau) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\tau}{2 \sin \frac{\tau}{2}} d\tau$$

□

Beachte, dass immer noch

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\tau}{2 \sin \frac{\tau}{2}} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} d\tau = 1$$

ist, weil das Integral über die Cosinus-Summe Null ist, wenn man das dem Integranden in seiner neuen Gestalt auch nicht mehr sofort ansieht. Wir wissen das auch ganz ohne Rechnung, weil $P_n T_n = T_n$ für alle trigonometrischen Polynome $T_n \in V_n$ gelten muss, und zu den trigonometrischen Polynomen zählen auch die Konstanten, also $P_n c = c$.

Diese Bemerkung ist für unsere Frage, ob $(P_n f)(t_0) - f(t_0)$ für ein festes t_0 für $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert, deshalb relevant,

weil wir den festen Wert $c := f(t_0)$ also mit in das Integral ziehen dürfen:

$$\begin{aligned}(P_n f)(t_0) - f(t_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t_0 + \tau) - f(t_0)) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\tau}{2 \sin \frac{1}{2}\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t_0 + \tau) - f(t_0)) \frac{\cos \frac{1}{2}\tau}{\sin \frac{1}{2}\tau} \sin n\tau d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t_0 + \tau) - f(t_0)) \cos n\tau d\tau,\end{aligned}$$

und das ist nun wirklich ein Fall für das Riemannsche Lemma! Zwar haben wir den gewünschten Satz noch nicht ganz in der Hand, weil wir noch Bedingungen angeben müssen, unter denen die Funktion

$$\tau \mapsto g(\tau) := (f(t_0 + \tau) - f(t_0)) \cot \frac{1}{2}\tau$$

zu V gehört, also beschränkt ist und nur endlich viele Unstetigkeitsstellen in $[-\pi, \pi]$ hat, damit das Riemannsche Lemma auch anwendbar ist, aber das ist eine vergleichsweise harmlose Frage: Unstetigkeitsstelle kann zu den von f verursachten allenfalls *eine*, nämlich bei $\tau = 0$ hinzugekommen sein, und um die Beschränktheit von g auf $[-\pi, \pi]$ zu beurteilen, schreiben wir die Funktion auf $[-\pi, \pi] \setminus 0$ in der Form

$$g(\tau) = \frac{f(t_0 + \tau) - f(t_0)}{\tau} \tau \cot \frac{1}{2}\tau.$$

Der Faktor $\tau \cot \frac{1}{2}\tau$ ist beschränkt, denn der Limes $\lim_{\tau \rightarrow 0} (\tan \frac{1}{2}\tau)/\tau$ existiert und ist ungleich Null, nämlich $\frac{1}{2}$, weil das ja die Ableitung von $\tan \frac{1}{2}\tau$ an der Stelle 0 ist, also existiert auch der Limes $\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau \cot \frac{1}{2}\tau$, also ist der Faktor jedenfalls in einem kleinen Intervall $(-\delta, \delta)$ beschränkt, auf $[-\pi, \pi] \setminus (-\delta, \delta)$ aber sowieso. Damit sehen wir aber nun, dass die Beschränktheit des Differenzenquotienten $\tau \mapsto \frac{f(t_0 + \tau) - f(t_0)}{\tau}$, $\tau \neq 0$ ausreicht, um die Konvergenz der Fourierreihe bei t_0 gegen $f(t_0)$ zu sichern, und wir haben unseren ersten Satz gefunden:

Satz 1: Es sei f eine 2π -periodische Funktion mit nur endlich vielen Unstetigkeitsstellen im Periodenintervall $[-\pi, \pi]$, und es sei t_0 eine Stelle, für die der Differenzenquotient

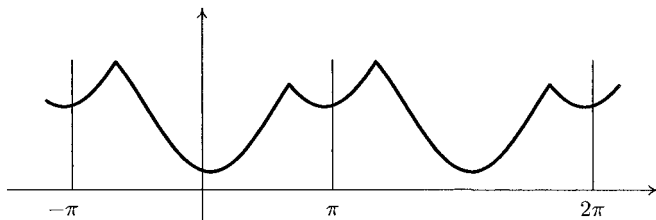
$$\tau \mapsto \frac{f(t_0 + \tau) - f(t_0)}{\tau}, \quad \tau \neq 0$$

beschränkt ist. Dann konvergiert die Fourierreihe von f an dieser Stelle gegen den Funktionswert:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt_0 + b_k \sin kt_0) = f(t_0).$$

□

Wenn der Differenzenquotient beschränkt, also eine Zahl C vorhanden sein soll, so dass $|f(t_0 + \tau) - f(t_0)| \leq C|\tau|$ für alle $\tau \in [-\pi, \pi]$ gilt, dann muss f bei t_0 natürlich zumindest stetig sein. Das alleine genügt nicht, aber wenn t_0 eine **glatte** oder wenigstens eine **Knickstelle** von $f \in V$ ist, soll heißen wenn f bei t_0 differenzierbar ist oder wenigstens die beiden halbseitigen Ableitungen existieren, dann ist der Differenzenquotient schon beschränkt.

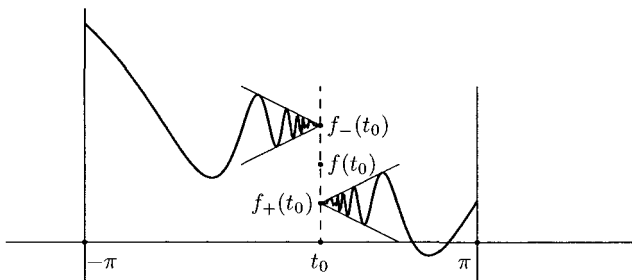


Eine 2π -periodische Funktion, die überall glatt oder geknickt ist, ist auch überall punktweiser Limes ihrer Fourierreihe

Eigentlich werden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen in der Analysis als ganz natürlich und nicht besonders einschränkend empfunden, und so könnten wir doch mit diesem Satz ganz zufrieden sein. Aber in den Anwendungen bekommt man es gerade bei periodischen Vorgängen leicht mit Sprungfunktionen zu tun, etwa wenn

eine Kraft konstanten Betrages periodisch ihre Richtung wechselt. Deshalb wollen wir uns jetzt mit dem Konvergenzverhalten der Fourierreihe an einer Sprungstelle der Funktion f befassen.

Mit einer *Sprungstelle* t_0 ist aber nicht eine beliebige Unstetigkeitsstelle gemeint, zumindest wollen wir die Existenz der halbseitigen Grenzwerte $\lim_{t \rightarrow t_0 \pm 0} f(t) =: f_{\pm}(t_0)$ annehmen, und da wir oben sogar an den Stetigkeitsstellen die Beschränktheit des Differenzenquotienten fordern mussten, werden wir auch hier die Beschränktheit der halbseitigen Differenzenquotienten verlangen. Den Funktionswert $f(t_0)$ an der Sprungstelle t_0 selbst, dessen eventuelle Abänderung ja die Fourierkoeffizienten nicht beeinflussen kann, setzen wir als den Mittelwert $f(t_0) = \frac{1}{2}(f_+(t_0) + f_-(t_0))$ fest. Wir sprechen dann von einem **sauberen Sprung** von f bei t_0 .



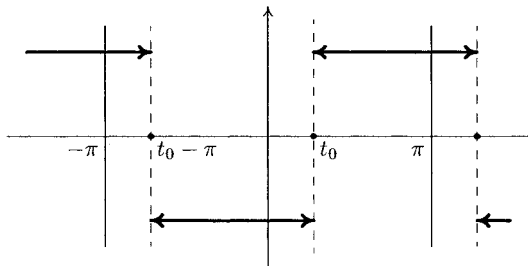
Sauberer Sprung: Es gibt ein C mit $|f(t_0 \pm h) - f_{\pm}(t_0)| \leq Ch$ für alle $h > 0$, und $f(t_0) = \frac{1}{2}(f_+(t_0) + f_-(t_0))$.

Obwohl nun der Satz 1 über die Konvergenz der Fourierreihe an einer sauberen Sprungstelle gar nichts auszusagen scheint, vereinfacht er das Problem doch drastisch. Sind nämlich f und g zwei Funktionen in V , die beide bei t_0 einen sauberen Sprung derselben Höhe machen, so dass also $(f_+(t_0) - f_-(t_0)) - (g_+(t_0) - g_-(t_0)) = 0$ gilt, dann ist die Differenzfunktion $f - g \in V$ bei t_0 überhaupt stetig und hat beschränkten Differenzenquotienten, ihre Fourierreihe konvergiert nach Satz 1 also bei t_0 gegen den Funktionswert $f(t_0) - g(t_0)$. Was lehrt uns dies? Dass wir zu gegebenem t_0 nur ein *einziges* Beispiel einer bei t_0 sauber mit von Null verschiedener Sprunghöhe springenden Funktion g in V zu finden brauchen, deren Fourierreihe bei t_0 gegen den Funktionswert konvergiert, um zu wissen, dass das für *alle* bei t_0 sauber springenden $f \in V$ gilt!

Satz 2: Es sei f eine beschränkte 2π -periodische Funktion mit nur endlich vielen Unstetigkeitsstellen im Periodenintervall $[-\pi, \pi]$, und sei t_0 eine Stelle, an der die halbseitigen Grenzwerte $\lim_{t \rightarrow t_0 \pm 0} f(t) =: f_{\pm}(t_0)$ existieren und die halbseitigen Differenzenquotienten beschränkt sind. Dann konvergiert die Fourierreihe von f an dieser Stelle gegen den Mittelwert:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt_0 + b_k \sin kt_0) = \frac{f_+(t_0) + f_-(t_0)}{2}.$$

BEWEIS: Von der Freiheit, die bei t_0 sauber nichttrivial springende Hilfsfunktion $g \in V$ ganz beliebig wählen zu dürfen, machen wir nur bescheidenen Gebrauch, wir nehmen nämlich irgend ein solches Beispiel zur Hand, welches zudem noch punktsymmetrisch bezüglich t_0 ist, also $g(t_0 + \tau) = -g(t_0 - \tau)$ erfüllt, etwa die 2π -periodische Funktion, die auf dem offenen Intervall $(t_0 - \pi, t_0)$ konstant -1 , auf $(t_0, t_0 + \pi)$ konstant $+1$ ist und bei t_0 und $t_0 + \pi$ verschwindet:



Mögliche Hilfsfunktion

Jede andere tut es aber auch, wir wollen nicht etwa die Fourierkoeffizienten von g und daraus die Konvergenz der Fourierreihe bei t_0 gegen Null per Hand berechnen, sondern erinnern uns an den Hilfssatz 1, wonach die n -te Teilsumme $(P_n g)(t_0)$ der Fourierreihe von g an der Stelle t_0 ja durch

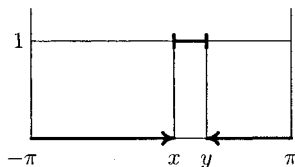
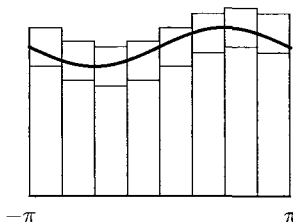
$$(P_n g)(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t_0 + \tau) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\tau}{2 \sin \frac{\tau}{2}} d\tau$$

gegeben ist, wegen der Symmetrie von g also Null ist. □

Zuletzt wenden wir uns noch einmal der Frage nach der Konvergenz im quadratischen Mittel zu. Bisher wissen wir erst, dass die Fourierreihe einer Funktion $f \in V$ genau dann im quadratischen Mittel gegen f konvergiert, wenn die Fourierkoeffizienten die Parsevalsche Gleichung $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt$ erfüllen. Das ist aber in der Tat immer der Fall:

Satz 3: Die Fourierreihe einer jeden Funktion $f \in V$ konvergiert im quadratischen Mittel gegen f .

BEWEISSKIZZE: Aus der Definition des Riemann-Integrals folgt man zuerst, dass es genügt, die Parsevalsche Gleichung, die ja nichts anderes als $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - P_n f\| = 0$ bedeutet, für die ganz einfachen Balkenfunktionen θ_{xy} zu beweisen:



f beim Integrieren in der Zange

Balkenfunktion θ_{xy} , $x < y$.

Offenbar ist $\|\theta_{xy}\|^2 = (y-x)/\pi$ für $y-x > 0$, und wegen $\theta_{xy} = \theta_{xy}^2$ ist das auch dasselbe wie a_0 . Die übrigen Fourierkoeffizienten von θ_{xy} sind

$$a_k = \left[\frac{\sin k\tau}{k\pi} \right]_{\tau=x}^{\tau=y} \quad \text{und} \quad b_k = \left[\frac{-\cos k\tau}{k\pi} \right]_{\tau=x}^{\tau=y}.$$

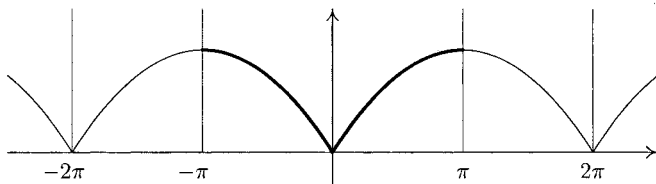
Daher ist nach den Additionstheoremen

$$a_k^2 + b_k^2 = \frac{2 - 2 \cos k(y-x)}{k^2 \pi^2},$$

und die zu beweisende Parsevalsche Gleichung für θ_{xy} bedeutet, wenn wir $t := y-x \in [0, 2\pi]$ abkürzen, nichts anderes als

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2} = \frac{1}{2} \left(\pi t - \frac{t^2}{2} \right) = \frac{1}{4} (\pi^2 - (t-\pi)^2).$$

Diese Behauptung zu beurteilen sind wir aber gerade die richtigen Experten. Aus unserem Satz 1 folgt doch, dass die Fourierreihe der auf $[0, 2\pi]$ durch $f(t) := \frac{1}{4}(\pi^2 - (t - \pi)^2)$ gegebenen 2π -periodischen Funktion



Die 2π -periodischen Funktion, die auf $[0, 2\pi]$ durch $f(t) := \frac{1}{4}(\pi^2 - (t - \pi)^2)$ gegeben ist.

punktwise überall gegen f konvergiert, dass also auf $[0, 2\pi]$

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kt = \frac{1}{4}(\pi^2 - (t - \pi)^2)$$

gilt, mit $\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (\pi^2 - (\tau - \pi)^2) \cos k\tau d\tau$ für $k \geq 0$. Ersichtlich ist $\alpha_0 = \frac{1}{3}\pi^2$, und für $k > 0$ zeigt zweimalige partielle Integration $\alpha_k = -1/k^2$, und somit erhalten wir:

Korollar aus Satz 1: Für alle $t \in [0, 2\pi]$ gilt

$$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kt}{k^2} = \frac{1}{4}(\pi^2 - (t - \pi)^2).$$

Für den Beweis unserer Parsevalschen Gleichung fehlt uns also weiter nichts mehr zu wissen als

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

aber eben das folgt ja auch aus dem Korollar, wenn wir nämlich $t = 0$ einsetzen. □

13.4 Übungsaufgaben

Aufgabe R13.2: Lösen Sie die Schwingungsgleichung

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f \sin \omega t$$

ohne Reibung im Resonanzfall $\omega = \omega_0 > 0$ mit der Anfangsbedingung $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

Aufgabe R13.2: Lösen Sie die Schwingungsgleichung

$$\ddot{x}(t) + \frac{2}{\tau} \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f \sin \omega t$$

wobei $0 < 1/\tau < \omega_0$, mit der Anfangsbedingung $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

Aufgabe R13.3: a) Es sei $f(t)$ ein $\frac{2\pi}{\omega}$ -periodisches trigonometrisches Polynom, $\tau, \omega_0 > 0$. Zeigen Sie, dass es genau eine periodische Lösung von $\ddot{x}(t) + \frac{2}{\tau} \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t)$ gibt, die sogenannte *eingeschwungene* Lösung. Welcher mathematische Sachverhalt rechtfertigt die Bezeichnung? Bestimmen Sie die eingeschwungene Lösung der Schwingungsgleichung $\ddot{x}(t) + \frac{2}{\tau} \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = a \sin^2 \omega t$.

Aufgabe R13.4: Für $\tau, \omega_0 > 0$ heißt die Funktion

$$\chi(\omega) := \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega/\tau}$$

der Variablen ω die *dynamische Suszeptibilität* des Oszillators. Ferner bezeichne

$$L = \frac{1}{T} \int_0^T dt \dot{x}(t) f(t)$$

den zeitlichen Mittelwert der Leistung der Antriebskraft über eine Periode $T := 2\pi/\omega$ der eingeschwungenen Lösung der Schwingungsgleichung $\ddot{x}(t) + \frac{2}{\tau} \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = a \cos \omega t$. Zeigen Sie, dass $L = \frac{a^2}{2} \omega \operatorname{Im} \chi(\omega)$ gilt. Bei welcher Frequenz ω ist L maximal? (Hinweis: $\operatorname{Im} \frac{1}{a-ib} = \frac{b}{a^2+b^2}$ für reelle a, b .)

Aufgabe R13.5: a) Wie berechnet man die Fourierkoeffizienten einer $2\pi/\omega$ -periodischen Funktion, wenn die oBdA getroffene Voraussetzung $\omega = 1$ *nicht* gemacht wird?

b) Es sei $0 < a < \pi$. Berechnen Sie die Fourier-Reihe der Funktion $f(t) = |\sin(at)|$ im Intervall $[-1, +1]$.

Aufgabe T13.1: Ermitteln Sie eine Lösung von

$$\ddot{x} - 3\ddot{x} + 3\dot{x} - x = e^t,$$

indem Sie das für die inhomogene Schwingungsgleichung gezeigte Verfahren noch um eine Stufe weiter treiben.

Aufgabe T13.2: Beweisen Sie

$$\left[\int_a^b f(t)g(t)dt \right]^2 \leq \int_a^b f(t)^2 dt \int_a^b g(t)^2 dt$$

für alle beschränkten Funktionen auf $[a, b]$ mit nur endlich vielen Unstetigkeitsstellen.

Aufgabe T13.3: Sei f die 2π -periodische Funktion, die durch $f(t) := t/\pi$ für $-\pi \leq t < \pi$ gegeben ist. Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten von f .

Aufgabe T13.4: Es bezeichne $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die 2π -periodische Funktion, die auf $[-\pi, \pi]$ durch $f(0) = 0$ und

$$f(x) := \begin{cases} -\pi + x & \text{für } x > 0 \\ \pi + x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

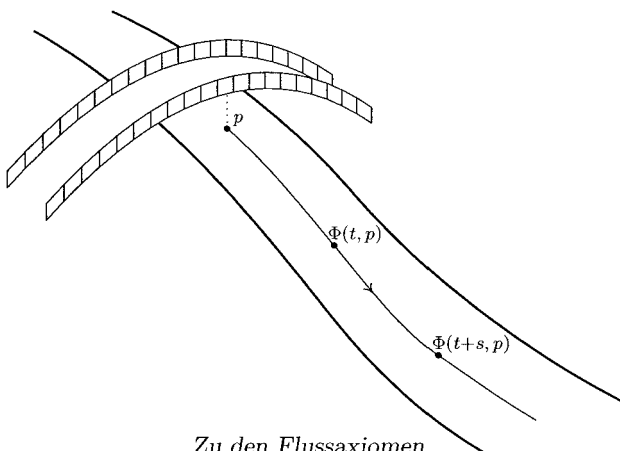
gegeben ist. Entwickeln Sie f in eine Fourier-Reihe und ermitteln Sie die Formeln für die beiden unendlichen Reihen, die sich a) aus der Fourierentwicklung an der Stelle $t = \pi/2$ und b) aus der Parsevalschen Gleichung ergeben.

14

Dynamische Systeme

14.1 Grundbegriffe

Stellen Sie sich vor, Sie stehen auf einer Brücke und schauen in den Fluss. Sie lassen ein kleines Stückchen Holz hinunterfallen, es trifft an einem Ort p auf die Wasseroberfläche und Sie sehen ihm nach, wie es von der Strömung mitgenommen wird:



Zu den Flussaxiomen

Mit $\Phi(t, p)$ bezeichnen Sie den Ort, zu dem das Hölzchen nach der Zeit t gelangt ist. Dann ist natürlich $\Phi(0, p) = p$, denn nach Verlauf von gar keiner Zeit ist das Hölzchen noch dort, wo Sie es gestartet

haben, und $\Phi(s, \Phi(t, p)) = \Phi(s+t, p)$, denn wenn das Hölzchen von $\Phi(t, p)$ aus noch die Zeitspanne s weitergeschwommen ist, dann ist es eben insgesamt die Zeit $s+t$ unterwegs gewesen. Das sind die *Flussaxiome*:

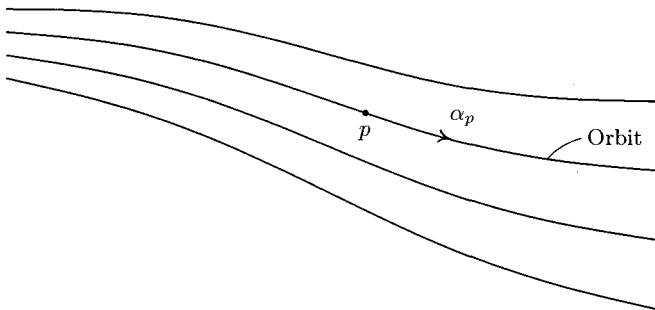
Definition: Unter einem *Fluss* oder *dynamischen System* auf einer Menge M verstehen wir eine Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, welche die beiden *Flussaxiome* erfüllt, nämlich

$$\begin{aligned} (1) \quad & \Phi(0, p) = p, \\ (2) \quad & \Phi(s, \Phi(t, p)) = \Phi(s+t, p) \end{aligned}$$

für alle $p \in M$ und alle $t, s \in \mathbb{R}$. □

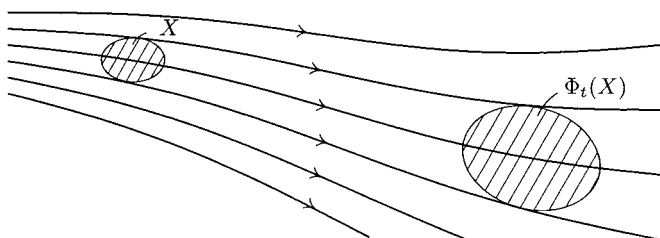
Als die Menge M wird Ihnen in der Physik demnächst die Ebene $\mathbb{R}^2$ begegnen, etwas allgemeiner sollen Sie sich den $\mathbb{R}^n$ oder eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ darunter vorstellen. Im Moment spielt das aber sowieso noch keine Rolle, denn die allerersten Grundbegriffe haben gar nichts damit zu tun, was M ist: irgend eine Menge.

Notation und Sprechweise: Sei $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ ein dynamisches System auf M . Für festes $p \in M$ heißt die Abbildung $\alpha_p : \mathbb{R} \rightarrow M$, $t \mapsto \Phi(t, p)$ die *Flusslinie* von p , ihr Bild $\alpha_p(\mathbb{R})$ heißt die *Bahn* oder der *Orbit* von p .



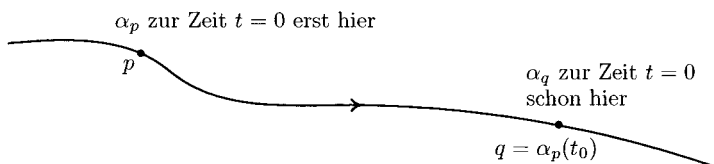
Bahnen

Für festes t dagegen nennt man die Abbildung $\Phi_t : M \rightarrow M$, $p \mapsto \Phi(t, p)$ die *Flussabbildung* zur Zeit t . □



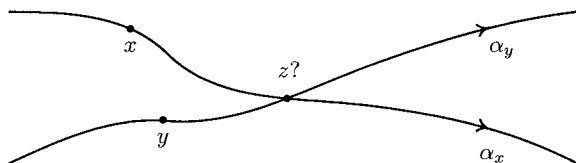
Wirkung der Flussabbildung auf einen 'Ölfilm' $X \subset M$

Liegt q auf der Bahn von p , so unterscheiden sich die Flußlinien α_q und α_p nur durch eine Zeittranslation, ist nämlich $q = \alpha_p(t_0) = \Phi(t_0, p)$, so sagt das zweite Flussaxiom $\alpha_q(t) = \Phi(t, \Phi(t_0, p)) = \Phi(t + t_0, p) = \alpha_p(t + t_0)$.



α_p folgt α_q mit 'Verspätung' t_0 , aber auf derselben Bahn

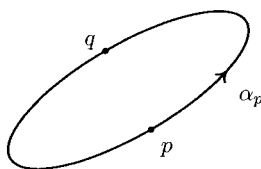
Insbesondere haben p und q dieselbe Bahn, und deshalb bilden die Bahnen oder Orbits eines dynamischen Systems eine **Zerlegung** der Menge M , worunter man eine Menge von paarweise disjunkten nichtleeren Teilmengen versteht, deren Vereinigung ganz M ist: jeder Punkt von M liegt auf genau einer Bahn.



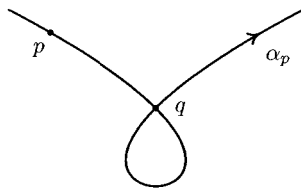
Kann nicht vorkommen, denn aus $z \in \alpha_x(\mathbb{R}) \cap \alpha_y(\mathbb{R})$
folgt bereits $\alpha_x(\mathbb{R}) = \alpha_z(\mathbb{R}) = \alpha_y(\mathbb{R})$

Dass sich die Flusslinien zweier Punkte auf derselben Bahn nur um eine Zeittranslation unterscheiden verhindert auch, dass sich ein Or-

bit, anschaulich gesagt, selbst durchschneidet. Zwar ist es möglich, dass ein Punkt $q = \alpha_p(t_0)$ der Bahn zu einem späteren Zeitpunkt $t_0 + T$ nochmals erreicht wird, aber dann gilt $\alpha_p(t + T) = \alpha_p(t)$ gleich für *alle* t , nicht nur für $t = t_0$. Der Durchgang durch q wiederholt sich also immer in derselben Weise, die Flusslinie kann z.B. nicht einmal in dieser Richtung durch q laufen und beim nächsten Mal in jener.



Möglich



nicht möglich.

Die Flussaxiome alleine können aber nicht verhindern, dass eine nichtkonstante T -periodische Flusslinie auch noch eine kleinere Periode T_1 und darunter eine noch kleinere Periode T_2 , ja eine ganze Nullfolge von Perioden $T > T_1 > T_2 > \dots > 0$ haben kann und eine kleinste positive Periode deshalb gar nicht vorhanden ist.

Schwer vorstellbar! Dann würde es ja beliebig kurze Zeiten geben, in denen die Flusslinie ihre ganze Bahn durchläuft, obwohl die Bahn nicht nur aus einem Punkt besteht!?

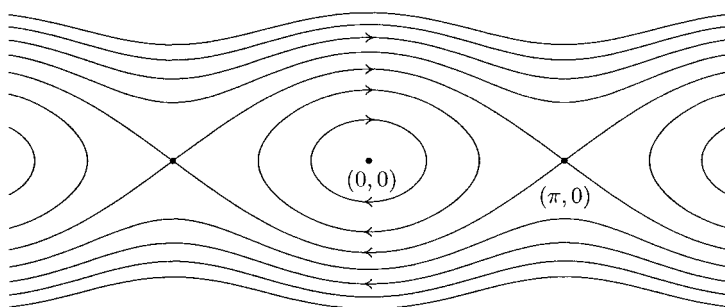
Der Einwand ist zwar nicht stichhaltig,¹ aber doch sinnvoll. Nur geht er wohl von der Vorstellung aus, M sei eine Teilmenge im $\mathbb{R}^n$ und die Flusslinie *stetig*. Dann gilt nämlich:

Lemma: *Eine stetige Flusslinie eines dynamischen Systems auf $M \subset \mathbb{R}^n$, die weder konstant noch injektiv ist, hat eine kleinste positive Periode.*

BEWEIS: Sei $q \neq p$ ein anderer Punkt auf der Bahn von p . Wegen der Stetigkeit der Flusslinie α_p gibt es jedenfalls ein $\delta > 0$, so dass $\|\alpha_p(t) - \alpha_p(0)\| < \|q - p\|$, insbesondere $\alpha_p(t) \neq q$, für alle t mit $|t| < \delta$ gilt. Also gibt es jedenfalls keine positive Periode T , die kleiner als δ wäre, da $\alpha_p([0, T])$ ja auch q enthalten müsste. Ist T Periode, so auch jede Zahl in dem ‘Gitter’ $\mathbb{Z}T := \{0, \pm T, \pm 2T, \dots\}$,

und sind $0 < T < T'$ Perioden, so auch $T' - T$. Da es positive Perioden gibt, weil α_p nach Voraussetzung nicht injektiv ist, und da ihr Abstand nach obigem Stetigkeitsargument nicht kleiner als δ sein kann, gibt es auch eine kleinste positive Periode. $\square$

Somit gibt es also nur drei Typen stetiger Flusslinien: die *konstanten* oder **stationären** Flusslinien, deren Bahn nur aus einem einzigen Punkt besteht, sodann die **injektiven** Flusslinien, die zu keinem Punkt zurückkehren, bei dem sie schon einmal waren, und schließlich die **periodischen** Flusslinien, die ihre Bahn mit einer kleinsten positiven Periode immer wieder durchlaufen.



“Phasenportrait” der Pendelgleichung

In diesem aus der Theorie der Differentialgleichungen stammenden Beispiel eines Flusses auf $\mathbb{R}^2$ sehen Sie alle drei Typen von Flusslinien vorkommen.

14.2 Maximale lokale Flüsse

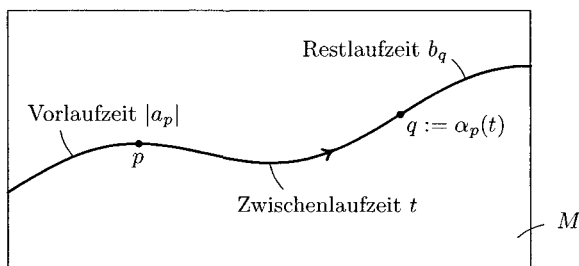
Für die Anwendung in der Theorie der autonomen Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung, wobei die Flusslinien dann die Lösungen sein werden, ist unser Flussbegriff noch etwas zu schön. Es ist nämlich unrealistisch, immer auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösungskurven zu erwarten, deshalb sollte jede Flusslinie α_p ihren individuellen Definitionsbereich, ein offenes Intervall (a_p, b_p) haben, $\alpha_p : (a_p, b_p) \rightarrow M$, wobei wir unendliche Grenzen nur *zulassen*, aber

nicht fordern wollen, und da $\Phi(0, p) = p$ seinen Sinn behalten soll, muss natürlich $0 \in (a_p, b_p)$ sein, also $-\infty \leq a_p < 0 < b_p \leq \infty$.

Definition: Sei M eine Menge, und für jedes $p \in M$ sei ein offenes Intervall mit (a_p, b_p) mit $-\infty \leq a_p < 0 < b_p \leq \infty$ und eine Abbildung $\alpha_p : (a_p, b_p) \rightarrow M$ gegeben, die wir auch als $\alpha_p(t) =: \Phi(t, p)$ notieren. Man nennt Φ einen **maximalen² lokalen Fluss** oder kurz einen **lokalen Fluss** auf M , wenn die folgenden modifizierten Flussaxiome erfüllt sind:

- (1) $\Phi(0, p) = p$,
 (2a) $(a_q, b_q) = (a_p - t, b_p - t)$ für $q = \Phi(t, p)$
 (2b) $\Phi(s, \Phi(t, p)) = \Phi(s + t, p)$

für alle $p \in M$ und $t, s + t \in (a_p, b_p)$. □



Zum Axiom 2a.

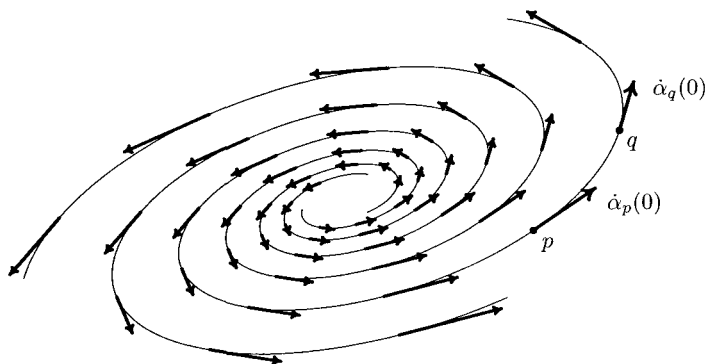
Wie bisher nennen wir $\alpha_p : (a_p, b_p) \rightarrow M$ die **Flusslinie** von p , ihr Bild $\alpha_p(a_p, b_p) \subset M$ die Bahn oder den Orbit von p . Ferner soll $|a_p| > 0$ das **Alter** und b_p die (verbleibende) **Lebensdauer** von p heißen. Wiederum gilt $\alpha_q(t) = \alpha_p(t + t_0)$, wenn $\alpha_p(t_0) = q$ ist, und deshalb zerlegen die Bahnen die Menge M . Und wie im Falle der Flüsse zeigt man:

Lemma: Eine stetige Flusslinie eines maximalen lokalen Flusses auf $M \subset \mathbb{R}^n$, die weder konstant noch injektiv ist, ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und hat eine kleinste positive Periode. □

Die uns am meisten interessierenden lokalen Flüsse haben aber nicht nur stetige, sondern sogar differenzierbare Flusslinien, und

dann ist durch deren Geschwindigkeitsvektoren ein Vektorfeld auf M definiert, genauer:

Definition: Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und Φ ein maximaler lokaler Fluss auf M , dessen Flusslinien differenzierbar sind, so heißt das durch $\vec{v}(p) := \dot{\alpha}_p(0)$ definierte Vektorfeld $\vec{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ das **Geschwindigkeitsvektorfeld** des Flusses. $\square$



Geschwindigkeitsfeld eines lokalen Flusses

Wegen $\alpha_q(t) = \alpha_p(t_0 + t)$ folgt aus $\vec{v}(q) = \dot{\alpha}_q(0)$ nun auch

$$\vec{v}(\alpha_p(t)) = \dot{\alpha}_p(t)$$

für jedes $t \in (a_p, b_p)$, nicht nur für $t = 0$. Aber das heißt nichts anderes, als dass die Flusslinie α_p eine Lösungskurve des autonomen Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= v_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

erster Ordnung auf M zum Anfangswert $\alpha_p(0) = p$ ist. Dieser Beziehung zwischen Flüssen und Differentialgleichungen, um derentwillen wir die Flüsse überhaupt betrachten, wollen wir im nächsten Abschnitt weiter nachgehen. Zuvor möchte ich aber wieder einmal mit Ihnen über eine Notationsangelegenheit sprechen, nämlich über das Vektorpfeilchen.

14.3 Rede über das Vektorpfeilchen

Weshalb schreiben die Mathematiker $x \in \mathbb{R}^3$, die Physiker aber $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ für das Zahlentripel (x_1, x_2, x_3) ? Ein Grund dürfte sein, dass die Physiker eben gar nicht $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ schreiben, sondern nur $\vec{x}$, und das Vektorpfeilchen — oder der Fettdruck, der stattdessen auch benutzt wird — hat die Aufgabe mitzuteilen oder daran zu erinnern, dass $\vec{x}$ drei Komponenten hat. Das ist praktisch. Weshalb wird das in der Mathematik nicht auch so gemacht?

Weil die Vielfalt der Typen mathematischer Objekte so groß ist, dass ihre Unterscheidung durch eine ein für allemal feststehende charakteristische Notation nicht mehr praktikabel ist. Deshalb muss in der Mathematik immer wieder von Neuem gesagt werden, was ein Symbol im jeweiligen Kontext bezeichnen soll. Aus diesem Grunde beginnen mathematische Aussagen oder Diskussionen so oft mit Vereinbarungen über die Bedeutung der Symbole: *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, $x \in X$, oder: Sei A eine $m \times n$ -Matrix und sei $y \in \mathbb{R}^m$, oder: Sei Q ein kompakter Quader im $\mathbb{R}^n$, oder: Sei Q eine quadratische Form auf einem Untervektorraum $U \subset \mathbb{R}^N$, usw.*

Sie sehen schon an diesen wenigen Beispielen aus Ihrem eigenen Erfahrungsbereich, warum der Versuch, alle diese Mitteilungen in fest vereinbarte kleine ‘Icons’ zu verpacken, zum Scheitern verurteilt wäre. Wollten wir quadratische Formen etwa mit einem kleinen Quadrat markieren: *Sei $Q^\square$ positiv definit*, so wüssten wir noch nicht, auf welchem Raum die Form lebt, müssten also das Symbol noch ergänzen: $Q^{\square v}$ usw., und abgesehen von der Notwendigkeit, sich alle diese Icons merken zu müssen, würde die Notation viel zu umständlich und überladen. Die Bedeutung der Buchstaben jederzeit kurzfristig neu vereinbaren zu können ermöglicht dagegen eine elegante, durchsichtige Notation auch dann, wenn komplizierte mathematische Objekte beteiligt sind, und daran gewöhnt empfinden Mathematiker auch schon das Vektorpfeilchen als einen überflüssigen Ballast.

Freilich, in einer kleinen mathematischen Welt, in der es nur Zahlen, Zahlentripel und 3×3 -Matrizen gibt, ist es schon sinnvoll und praktisch, diese drei Typen von Objekten durch den Druck oder markierende Symbole zu unterscheiden, und v dann als Notation für $\|\vec{v}\|$ verwenden zu können, haben Sie als Bonus obendrein.

Aber schon wenn in der Elektrodynamik oder der Relativitätstheorie *Vierervektoren* gebraucht werden, muss neue, zusätzliche Notation³ eingeführt werden, weil das Vektorpfeilchen oder der Fettdruck alleine die dreikomponentigen von den vierkomponentigen Vektoren nicht unterscheiden würden.

Sie werden die Bereitschaft anerkennen, mit der ich mich in der Vektornotation den physikalischen Lehrbüchern für Studienanfänger angepasst habe, um Ihnen Übersetzungsschwierigkeiten zu ersparen. Ich will nicht gerade sagen "ich träum' schon davon", aber wenn ich jetzt im mathematischen Seminar einen Vektor als v anschreibe, dann habe ich einen Moment lang ein Gefühl als hätt' ich mich beim Autofahren nicht angeschnallt, bis ich dann daran denke, dass ich ja unter Mathematikern bin, die zu $\vec{v}$ höchstens fragen würden, was dieser Pfeil da bedeuten solle.

Sie haben aber inzwischen nachgerade genug mathematische Einsicht gewonnen, dass ich anfangen kann, die Verwendung des Vektorpfeils wieder etwas einzuschränken und mich normalen mathematischen Notationsgewohnheiten anzunähern. Ich werde das sachte tun, physikalischen Formeln kein Pfeilchen rauben und in Fällen von Verwechslungsgefahr auf der Hut sein. Aber grundsätzlich sind wir uns wohl einig, dass zwar klar sein muss, was ein Symbol bezeichnet, wie es aussieht aber eine Frage von Stil und Suggestivkraft ist.

Ob ich die Vektoreigenschaft eines Objekts durch die Signalwirkung des Pfeils betonen will oder nicht, hängt auch von der mathematischen Rolle ab, die das Objekt im jeweiligen Zusammenhang spielt. Geht es zum Beispiel um Vektorfelder $\vec{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$, so kann es angemessen sein, $\vec{v}(x)$ und $x \in M$ zu schreiben, wenn nämlich die Addition von Elementen $x, y \in M$ nicht von Interesse ist und wohl gar aus M hinausführt, wie es bei bloßen Ortsangaben leicht sein kann. Ist aber $M = \mathbb{R}^n$, die Addition darin physikalisch sinnvoll und $\vec{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ womöglich noch linear, dann wird man v und x jedenfalls gleich behandeln und entweder $\dot{x} = v(x)$ oder $\dot{\vec{x}} = \vec{v}(\vec{x})$ schreiben wollen.⁴

Ganz überflüssig erscheint es mir, einem griechischen Buchstaben, der eine Kurve im $\mathbb{R}^n$ beschreibt, etwa $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, noch ein Pfeilchen aufzusetzen und dadurch seinen Geschwindigkeitsvektor $\dot{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^n$ zu $\dot{\vec{\gamma}}(t)$ zu komplizieren. Es wird doch jeder,

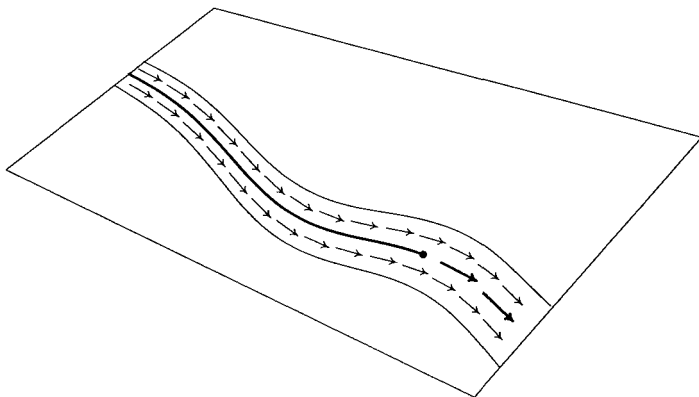
der überhaupt vernommen hat, dass γ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet, auch ohne den Pfeil wissen, dass $\gamma(t)$ dann n Komponenten $\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)$ haben muss.

Kurz und gut: die Notationen $x \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ sind beide zulässig und haben ihre Vor- und Nachteile, und wir, der mathematische Autor und der physikalische Leser, wollen sie in interdisziplinärer Freundschaftlichkeit gutwillig verwenden und lesen.

14.4 Phasenflüsse und Phasenportraits

Es sei wieder $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, aber gegeben sei jetzt nicht ein lokaler Fluss, sondern ein Vektorfeld $\vec{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Von Flusslinien ist also vorerst nicht die Rede, wohl aber von Lösungen oder genauer von *Lösungskurven* des Systems $\dot{x} = \vec{v}(x)$, worunter differenzierbare Kurven $\alpha : (a, b) \rightarrow M$ mit $\dot{\alpha}(t) = \vec{v}(\alpha(t))$ zu verstehen sind.

Zu einer ersten Anschauung vom Lösungsverhalten eines solchen Systems verhilft uns wieder die Vorstellung, das Vektorfeld sei in der Lage, einem (punktförmigen, masselosen) ‘Lösungsfahrzeug’ an jedem Punkt p in M , an dem sich dieses gerade befindet, den dort vorgeschriebenen Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(p)$ zu erteilen.



Lösungsfahrzeug folgt der vorgeschriebenen Richtung und hält die vorgeschriebene Geschwindigkeit ein.

Der Pilot eines solchen Fahrzeugs kann dann gar nichts tun, will es uns scheinen, denn sowohl die Fahrtrichtung als auch die Geschwindigkeit sind jederzeit extern bestimmt, und wir erwarten daher, dass der gesamte Verlauf einer solchen Lösungsfahrt bereits durch den Ort festgelegt ist, zu dem sich das Fahrzeug zu einem festen Zeitpunkt, sagen wir bei $t = 0$, befindet.

Auch für die Existenz von Lösungen stimmt uns das Gedankenexperiment zuversichtlich, wir stellen uns vor, dass wir das Fahrzeug zur Zeit $t = 0$ an einem beliebigen Punkte $p \in M$ einsetzen können wie das Hölzchen in die Donau und dass die Automatik es dann auf einer Lösungskurve entlangführt, jedenfalls so lange, bis jedes weitere Fahren das Verlassen von M bedeuten würde, und analog für die Vorgeschichte $t < 0$ eines den Punkt p zur Zeit $t = 0$ erreichenden Fahrzeugs.

Dass es mathematisch dann doch nicht ganz so einfach ist, haben wir im Abschnitt 4.2 an dem Beispiel $y' = 2\sqrt{|y|}$ schon gesehen, und es ist amüsant zu überlegen, weshalb der Pilot unter Umständen doch auf legale Weise eingreifen und unsere Eindeutigkeitserwartung zunichte machen kann. Auch die Existenz einer Lösung darf man nicht erhoffen, längs der das Vektorfeld Unmögliches vom Lösungsfahrzeug verlangt, zum Beispiel in voller Fahrt abrupt die Richtung zu wechseln und doch dabei eine differenzierbare Kurve zu beschreiben.

Wenn aber das Vektorfeld die lokale Lipschitzbedingung erfüllt (und das ist gar nichts Besonderes, jedes C^1 -Vektorfeld tut das freiwillig) dann sind wir vor unliebsamen Überraschungen geschützt, das sagt der schon mehrfach erwähnte Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard und Lindelöf, dessen Aussage wir diesmal im Detail betrachten wollen. Am einfachsten, auch zu beweisen, ist jener Teil des Satzes, der nur von der einzelnen Lösung spricht:

Satz von Picard-Lindelöf über einzelne Lösungen: *Es sei M offen in $\mathbb{R}^n$ und $\vec{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-Vektorfeld. Dann gilt:*

Eindeutigkeit: Sind $\alpha, \beta : (a, b) \rightarrow M$ zwei Lösungen des Systems $\dot{x} = \vec{v}(x)$ und gilt $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ für ein $t_0 \in (a, b)$, so folgt daraus bereits $\alpha(t) = \beta(t)$ für alle $t \in (a, b)$.

Existenz: Zu jedem $p \in M$ und jedem $t_0 \in \mathbb{R}$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Lösung $\alpha : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\alpha(t_0) = p$. $\square$

Aus einer Lösungskurve $\alpha : (a, b) \rightarrow M$ kann man auf zwei triviale Arten ‘andere’ Lösungskurven machen, nämlich durch Verkleinerung des Definitionsbereiches und durch Zeittranslation, denn da wir hier von autonomen Systemen sprechen, ist für jedes $t_1 \in \mathbb{R}$ auch durch $\alpha(t + t_1)$ eine auf $(a - t_1, b - t_1)$ definierte Lösung gegeben. Man mag ja manchmal Anlass haben, vorhandene Lösungen zu verschieben oder zu verkleinern, aber interessante neue Lösungen erhält man so natürlich nicht.

Notation: Es bezeichne $\alpha_p : (a_p, b_p) \rightarrow M$ die nach dem Satz von Picard-Lindelöf eindeutig bestimmte maximale Lösungskurve von $\dot{x} = \vec{v}(x)$, welche die *Anfangsbedingung* $\alpha_p(0) = p$ erfüllt. $\square$

Dabei heißt eine Lösung $\alpha : (a, b) \rightarrow M$ **maximal**, wenn ihr Definitionsbereich nicht erweitert werden kann, genauer wenn es keine Lösung $\tilde{\alpha} : (\tilde{a}, \tilde{b}) \rightarrow M$ auf einem echt größeren offenen Intervall $(\tilde{a}, \tilde{b}) \supsetneq (a, b)$ gibt, die auf (a, b) mit α übereinstimmt.

Von solchen maximalen Lösungen ist in dem Satz von Picard-Lindelöf zwar nicht ausdrücklich die Rede, aber zu jedem $p \in M$ gibt es nach der Existenzaussage jedenfalls irgendwelche Lösungen α auf offenen Intervallen mit $\alpha(0) = p$, und da je zwei solche nach der Eindeutigkeitsaussage auf dem Durchschnitt ihrer Definitionsintervalle übereinstimmen, definieren sie alle zusammen eine wohlbestimmte Lösung α_p auf der Vereinigung (a_p, b_p) ihrer Definitionsintervalle, und diese Lösung ist dann natürlich maximal. So ist es mit der Notation α_p gemeint.

Unter einem *offenen Intervall* müssen wir hier immer ein allgemeines offenes Intervall verstehen, d.h. die Intervallgrenzen sind möglicherweise unendlich:

$$-\infty \leq a_p < 0 < b_p \leq \infty,$$

und in der Tat ist $(a_p, b_p) = \mathbb{R}$ ein häufig eintretender, uns meist angenehmer Fall. Gilt er für alle $p \in M$, so nennt man $\vec{v}$ oder eigentlich das DGL-System $\dot{x} = \vec{v}(x)$ auch **global integrierbar**.

Aus den Lösungen α_p erhält man alle Lösungen, die es überhaupt gibt, durch Verkleinerung und (falls $\vec{v}$ nicht sowieso global integrierbar ist) durch Zeittranslation, und man kann daher mit gutem Recht sagen man habe das DGL-System *gelöst*, wenn man alle α_p kennt.

Aus dem Satz von Picard-Lindelöf erhalten wir nun ohne weiteres das folgende

Korollar: Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-Vektorfeld, so definieren die maximalen Lösungskurven $\alpha_p : (a_p, b_p) \rightarrow M$ mit $\alpha_p(0) = p$ durch $\Phi(t, p) := \alpha_p(t)$ einen maximalen lokalen Fluss Φ auf M .

BEWEIS: Wir haben die drei Flussaxiome (1), (2a) und (2b) zu verifizieren. Axiom (1), also $\alpha_p(0) = p$, gilt ja sowieso. Sei jetzt $q := \alpha_p(t_0)$ für ein festes $t_0 \in (a_p, b_p)$. Dann ist auf $(a_p - t_0, b_p - t_0)$ durch $\alpha_p(t + t_0)$ eine Lösung zum Anfangswert q gegeben, und da $\alpha_q : (a_q, b_q) \rightarrow M$ die maximale solche Lösung ist, muss nach dem Eindeutigkeitsatz

$$(a_p - t_0, b_p - t_0) \subset (a_q, b_q)$$

und $\alpha_p(t + t_0) = \alpha_q(t)$ für alle $t \in (a_p - t_0, b_p - t_0)$ gelten. Insbesondere ist $\alpha_q(-t_0) = p$, nach Rollentausch von (p, q, t_0) mit $(q, p, -t_0)$ gilt also aus denselben Gründen auch

$$(a_q + t_0, b_q + t_0) \subset (a_p, b_p),$$

und somit sind (2a) und (2b) nachgewiesen. $\square$

Diesen maximalen lokalen Fluss nennt man den **Phasenfluss** des Lipschitz-Vektorfeldes oder des Systems $\dot{x} = \vec{v}(x)$. Wir wissen also jetzt auch, dass die Bilder oder Bahnen der maximalen Lösungskurven die Menge M zerlegen und auch dass eine maximale Lösungskurve, die weder konstant noch injektiv ist, auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sein und eine kleinste positive Periode haben muss, denn stetig sind Lösungskurven sowieso, weil sie ja sogar differenzierbar sind.

Die Menge der Bahnen, jeweils versehen mit der Information über die Durchlaufungsrichtung, heißt das **Phasenportrait** des DGL-Systems $\dot{x} = \vec{v}(x)$. Das Phasenportrait enthält also weniger Information als der Phasenfluss: statt der $\alpha_p : (a_p, b_p) \rightarrow M$ selbst zeigt es uns nur deren gerichtete Bahnen $\alpha_p(a_p, b_p) \subset M$. Dafür ist diese Information im Allgemeinen auch leichter zu bekommen und zu verwalten als der genaue Lösungsverlauf in Abhängigkeit von der Zeit t . Das Phasenportrait, wenn man es denn hat, gibt einen Überblick über das gesamte Lösungsverhalten des DGL-Systems.

14.5 Die Abhängigkeit von den Anfangswerten

Wir sind bisher in Gedanken immer auf den Bahnen entlang gesaust, haben den Lösungsfluss $\Phi(t, p)$ also für jeweils festes p betrachtet. Was aber wissen wir darüber, wie die Lösungen sich bei Änderung der Anfangsbedingungen verhalten, d.h. wie $\Phi(t, p)$ von p , oder noch eindringlicher gefragt: von *allen* Variablen (t, p) gemeinsam abhängt? Eben davon handelt der zweite, etwas subtilere und schwieriger zu beweisende Teil des Satzes von Picard-Lindelöf, dem wir uns jetzt zuwenden.

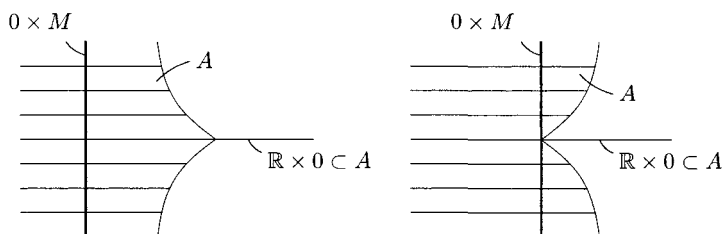
Die Frage nach den Eigenschaften von Φ betrifft natürlich auch den *Definitionsbereich* von Φ , nennen wir ihn $A \subset \mathbb{R} \times M$. Definiert ist $\Phi(t, p)$ genau dann, wenn $t \in (a_p, b_p)$ gilt, also ist

$$\begin{aligned} A &= \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in (a_p, b_p)\} \\ &= \bigcup_{p \in M} (a_p, b_p) \times \{p\} \subset \mathbb{R} \times M \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}. \end{aligned}$$

Sie sehen, dass darin die gesamte Information darüber steckt, auf welchem Zeitintervall jede Lösung existiert. Wenn Sie sich befragen, welchen Weg wir einschlagen könnten, bei gegebenem $\vec{v}$ etwas über A herauszubekommen, so werden Sie gestehen müssen, dass Ihnen nichts einfällt außer der direkten Inspektion: das System $\dot{x} = \vec{v}(x)$ lösen und nachschauen, welches die maximalen Definitionsintervalle der Lösungen sind. Das ist aber oft sehr beschwerlich bis undurchführbar. Wir sollten deshalb dem Satz von Picard-Lindelöf dankbar für alles sein, was er uns etwa über A sagen kann, und er sagt etwas: für Lipschitzfelder ist A *offen* in $\mathbb{R}^{n+1}$.

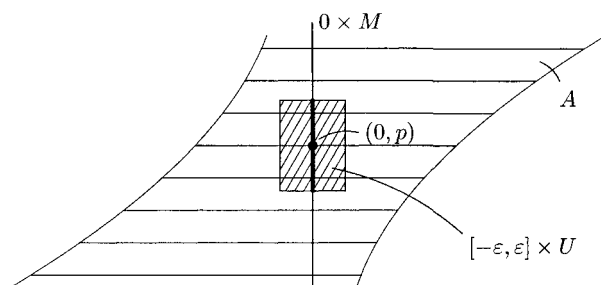
Enttäuscht? Studienanfänger sind zuweilen ein sehr anspruchsvolles Publikum. Ja, was dachten Sie denn? Soll der Satz verkünden, A sei $\mathbb{R} \times M$? Das stimmt doch im Allgemeinen nicht. Oder meinen Sie, das verstehe sich beinahe von selbst, denn wenn man p nur ganz wenig, fast gar nicht ändert, dann wird sich doch auch die Lebensdauer der Lösung nur wenig ändern? Denken Sie einmal im Falle $n = 1$ und $M = \mathbb{R}$ an das Beispiel $y' = f(y) := y^3$. Die stationäre Lösung $y \equiv 0$ ist auf ganz $\mathbb{R} = (a_0, b_0)$ definiert, aber für jeden anderen Anfangswert $p \neq 0$ ist $b_p < \infty$. Wählt man f noch steiler, werden diese Lebensdauern noch kürzer, und wer sagt

uns denn, dass sie nicht überhaupt beschränkt bleiben können und deshalb $\mathbb{R} \times 0 \subset A$ wie eine Nadel heraussticht?



Weshalb sollte A nicht einmal so oder gar so aussehen?

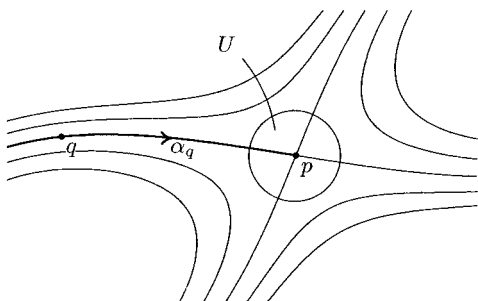
Dann wäre A natürlich nicht offen in $\mathbb{R}^2$. — Oder möchten Sie einfach nur wissen, weshalb es so wichtig sei, ob A offen ist oder nicht? Zur Antwort könnte ich Sie daran erinnern, welche technische Rolle die Offenheit der Definitionsbereiche in der mehrdimensionalen Differentialrechnung spielt, und wenn wir zum Beispiel nach der Differenzierbarkeit von Φ auch nur *fragen* wollen, muss uns die lokale Beschaffenheit des Definitionsbereiches interessieren. Es gibt aber auch einen spezifischeren Grund, die Offenheit von A als eine wertvolle Information zu schätzen. Aus der Offenheit folgt wegen $0 \times M \subset A$ insbesondere, dass es zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung U in M und ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $[-\varepsilon, \varepsilon] \times U \subset A$ ist:



$[-\varepsilon, \varepsilon] \times U \subset A$, also $|a_u|, b_u > \varepsilon$ auf ganz U

Das heißt aber, dass jeder Punkt eine Umgebung U hat, in der es eine gemeinsame positive untere Schranke $\varepsilon > 0$ für Alter und

Lebensdauer aller Punkte $u \in U$ gibt, d.h. $|a_u|, b_u > \varepsilon$ für alle $u \in U$. Andererseits wissen wir, dass die Lebensdauer längs der Flusslinie eines Punktes $q \in M$ mit $b_q < \infty$ für $t \rightarrow b_q$ gegen Null geht, denn hatte q die Lebensdauer b_q , so hat $\alpha_q(t)$ nur noch die Lebensdauer $b_q - t$. Insbesondere muss eine solche Flusslinie α_q die letzten ε Sekunden ihres Daseins *außerhalb* von U verbringen, wenn U eine Menge ist, in der $b_u > \varepsilon$ für alle $u \in U$ gilt! Wenn uns also z.B. von einem Punkt $q \in M$ bekannt ist, dass seine Flusslinie schließlich in U bleiben muss (es also ein $t_0 < b_q$ mit $\alpha_q(t) \in U$ für alle t mit $t_0 < t < b_q$ gibt), etwa weil U eine Umgebung von $p \in M$ ist und eine unabhängige Informationsquelle uns $\lim_{t \rightarrow b_q} \alpha_q(t) = p$ versichert:



Wenn eine Lösungskurve gegen einen Punkt von M konvergiert, so lebt sie unendlich lange: eine Folge der Offenheit von A

dann folgt also automatisch $b_q = \infty$, ohne jede Rechnung, einfach als logische Konsequenz der Offenheit von A . Analog kann man natürlich für das Alter und $t \rightarrow a_q$ argumentieren. Und wenn Sie später den *Kompaktheitsargument*⁵ genannten mathematischen Kunstgriff beherrschen, können Sie die Existenz lokaler unterer Schranken für Alter und Lebensdauer noch besser ausnutzen.

Dass man nicht durch bloßes Denken jegliche Rechnung vermeiden kann, brauche ich Ihnen nicht zu erklären, davon sind Sie nur allzu sehr überzeugt. Sie müssen aber auch umgekehrt einsehen wie ungeschickt es wäre, die kostenlosen Vorausinformationen der Theorie zu ignorieren. — Soviel über die Offenheit von A . Die Gesamtaussage des Satzes von Picard-Lindelöf lautet:

Satz von Picard-Lindelöf über die Lösungsgesamtheit: Ist $\vec{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-Vektorfeld auf einem offenen $M \subset \mathbb{R}^n$, so ist der Definitionsbereich $A = \bigcup_{p \in M} (a_p, b_p) \times \{p\}$ des Phasenflusses Φ des Systems $\dot{x} = \vec{v}(x)$ offen in $\mathbb{R} \times M$ und $\Phi : A \rightarrow M$ ist stetig. Ist das Vektorfeld $\vec{v}$ darüber hinaus sogar C^k , so ist auch $\Phi : A \rightarrow M$ eine C^k -Abbildung. $\square$

Auf den Beweis⁶ werde ich jetzt nicht eingehen. Im nächsten Abschnitt wollen wir uns klar machen, weshalb der Satz von Picard-Lindelöf, der doch ‘nur’ von den autonomen Systemen erster Ordnung handelt, von durchgreifender Anwendbarkeit in der gesamten Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist.

14.6 Die universelle Anwendbarkeit des Satzes von Picard-Lindelöf

Gesehen haben Sie die Idee schon einmal, im Abschnitt 5.1 nämlich, wo wir eine Differentialgleichung $y'' = f(x, y, y')$ zweiter Ordnung als ein System erster Ordnung für y und y' aufgefasst haben, sozusagen. Jetzt wollen wir Differentialgleichungen n -ter Ordnung betrachten, und zwar zuerst autonome.

Sprechweise: Ist $x^{(n)} = f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$ eine Differentialgleichung n -ter Ordnung für eine gesuchte Funktion $x = x(t)$, wobei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf einer offenen Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ definierte Lipschitz- bzw. sogar C^k -Funktion ist, so heißt

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

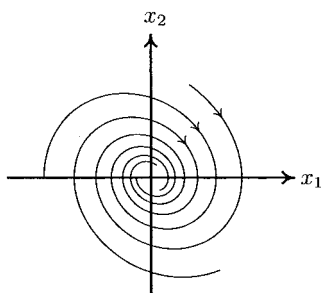
das zu der Gleichung **gehörige** autonome System erster Ordnung auf M . Unter dem Phasenfluss und Phasenportrait der Gleichung n -ter Ordnung versteht man die des zugehörigen Systems, und die offene Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$, auf der also das Phasenportrait lebt,

heißt in diesem Zusammenhange auch der **Phasenraum** der Gleichung. $\square$

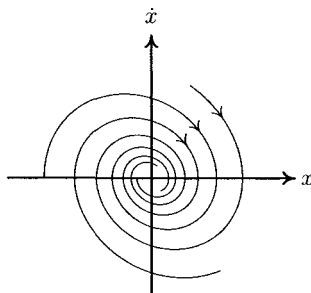
Sie sehen, dass sich das System aus der Gleichung ergibt, wenn man $x_1(t), \dots, x_n(t)$ als $x(t), \dots, x^{(n-1)}(t)$ "auffasst", aber was soll das genau heißen? Ist x_2 dasselbe wie $\dot{x}$ oder nicht? Diese berechnete Frage verlangt eine mathematisch präzise Antwort, in der das dubiose Wort "auffassen" nicht vorkommt, und diese Antwort lautet:

Notiz 1: Löst $x(t)$ die Gleichung, so löst $(x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$ das zugehörige System, und umgekehrt: löst $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ das System, so löst $x(t) := x_1(t)$ die Gleichung, und $x_2(t), \dots, x_n(t)$ sind dann die erste bis $(n-1)$ -te Ableitung dieser Lösung $x(t)$. $\square$

Betrachten wir die Schwingungsgleichung $\ddot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ als Beispiel. Der Phasenraum oder die *Phasenebene*, wie man in diesem Falle besser sagt, ist dann der $\mathbb{R}^2$, in dem wir die Koordinaten wie gewöhnlich mit x_1 und x_2 bezeichnen. Man spricht aber von der Phasenebene auch gern als von der $(x, \dot{x})$ -Ebene und von den beiden Koordinatenachsen als von der x -Achse und der $\dot{x}$ -Achse.



Neutrale Beschriftung
der Phasenebene



'Sprechende' Beschriftung
der Phasenebene

Phasenportrait für $\ddot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ im Falle schwacher Dämpfung

Als Bezeichnung für eine Koordinate ist $\dot{x}$ freilich ein etwas irritierendes Symbol, weil es eigentlich auffordert, ein x nach t abzuleiten, und was soll das in einer $(x, \dot{x})$ -Ebene bedeuten? Wenn Sie aber die Beziehung zwischen der Gleichung und dem zugehörigen System

erster Ordnung richtig verstanden haben, dann erinnert Sie diese Bezeichnung in angenehmer Weise an die obige Notiz, und das Phasenportrait schaut Sie gleich viel freundlicher an als mit der neutralen Beschriftung x_1, x_2 , finden Sie nicht?

Wenden wir uns nun den allgemeineren *nichtautonomen* Differentialgleichungen n -ter Ordnung für eine gesuchte Funktion $x = x(t)$ zu. Auch diese lassen sich auf autonome Systeme erster Ordnung zurückführen, nur brauchen wir dazu noch eine zusätzliche Koordinate x_0 , welche bis auf Translation die Rolle von t spielen wird, genauer:

Sprechweise: Ist $x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$ eine nichtautonome Differentialgleichung n -ter Ordnung für eine gesuchte Funktion $x = x(t)$, wobei $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf einer offenen Teilmenge $B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ definierte Lipschitz- bzw. sogar C^k -Funktion ist, so heißt

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_0 & = & 1 \\ \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & x_3 \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{x}_{n-1} & = & x_n \\ \dot{x}_n & = & f(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array}$$

das zu der Gleichung **gehörige** autonome System erster Ordnung auf B . Unter dem Phasenfluss und Phasenportrait der nichtautonomen Gleichung n -ter Ordnung versteht man die des zugehörigen Systems, und die offene Teilmenge $B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, auf der also das Phasenportrait lebt, heißt in diesem Zusammenhang auch der **um die Zeitkoordinate erweiterte Phasenraum** der Gleichung. $\square$

Notiz 2: Löst $x(t)$ die Gleichung, so löst $(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$ das zugehörige System, und umgekehrt: löst $(x_0(t), x_1(t), \dots, x_n(t))$ das System, so gilt jedenfalls $x_0(t - t_0) = t$ für ein t_0 , einfach wegen $\dot{x}_0(t) \equiv 1$, und dann löst $x(t) := x_1(t - t_0)$ die Gleichung, und die Funktionen $x_2(t - t_0), \dots, x_n(t - t_0)$ sind dann die erste bis $(n-1)$ -te Ableitung dieser Lösung $x(t)$. $\square$

Aus dem Satz von Picard-Lindelöf über die einzelnen Lösungen erhalten wir deshalb als

Korollar: Ist $B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : B \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-Funktion, so gibt es zu jedem Punkt $(t_0, p_0, \dots, p_{n-1}) \in B$ genau eine maximale Lösung $x = x(t)$ der Differentialgleichung $x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$, welche die **Anfangsbedingung**

$$\begin{array}{rcl} x(t_0) & = & p_0 \\ \dot{x}(t_0) & = & p_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) & = & p_{n-1} \end{array}$$

erfüllt. □

Kurz gesagt: bei Differentialgleichungen n -ter Ordnung genügt es zur Festlegung einer Lösung nicht, nur ihren Wert bei t_0 vorzuschreiben, sondern man muss auch ihre Ableitungen bis zur $(n-1)$ -ten einschließlich angeben oder kennen.

Dieses Korollar gilt natürlich auch für eine *autonome* Differentialgleichung n -ter Ordnung auf $M \subset \mathbb{R}^n$, wie wir schon aus der Notiz 1 ablesen und wie jetzt noch einmal mit herauskommt, da man sie ja als Spezialfall einer nichtautonomen auf $B := \mathbb{R} \times M$ verstehen kann. Allerdings dürfen wir uns dann oBdA auf den Fall $t_0 = 0$ beschränken, denn im autonomen Falle ist mit $x(t)$ stets auch $x(t - t_0)$ eine Lösung, und diese hat dann an der Stelle t_0 denselben Wert und dieselben Ableitungen wie $x(t)$ selbst an der Stelle Null.

Durch die Verwandlung von Gleichungen n -ter Ordnung in Systeme erster Ordnung wird natürlich auch der Satz von Picard-Lindelöf über die Lösungsgesamtheit anwendbar und gibt Ihnen Information über die ‘Abhängigkeit von den Anfangswerten’.

Wir haben bislang immer nur von Differentialgleichungen n -ter Ordnung für *eine* gesuchte Funktion $x = x(t)$ gesprochen, ebenso können wir aber auch Systeme von Differentialgleichungen n -ter Ordnung für m gesuchte Funktionen, d.h. für gesuchtes $\mathbb{R}^m$ -wertiges $\vec{x} = \vec{x}(t)$ betrachten, wobei das Vektorpfeilchen jetzt auf die m Komponenten hinweisen soll. Die Verwandlung eines autonomen

solchen Systems

$$\vec{x}^{(n)} = \vec{f}(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, \dots, \vec{x}^{(n-1)})$$

auf offenem $M \subset \mathbb{R}^{nm}$ in ein autonomes System erster Ordnung auf M geht genau so wie zuvor, nur müssen wir jetzt auch $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ schreiben oder zumindest denken, denn das sind jetzt auch m -tupel.

Auch ein nichtautonomes System

$$\vec{x}^{(n)} = \vec{f}(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}, \dots, \vec{x}^{(n-1)})$$

n -ter Ordnung auf offenem $B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{nm}$ behandeln wir mit jetzt $\mathbb{R}^m$ -wertigen $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ wie zuvor, die zusätzliche Koordinate x_0 bleibt aber natürlich skalar und bekommt kein Pfeilchen, sie spielt ja die Rolle der Zeitkoordinate t .

Sie sehen jetzt, weshalb der Satz von Picard-Lindelöf für Systeme beliebiger Ordnung, also für den gesamten Bereich der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zuständig ist. Um ihn anzuwenden, verwandeln Sie Ihr System wie beschrieben in ein autonomes System erster Ordnung, das dann auch die Lipschitz- oder C^k -Eigenschaften des ursprünglichen Systems hat, wenden darauf den Satz an und erhalten als Korollare die Antworten auf Ihre Fragen über Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen zu gegebenen Anfangsbedingungen und über das analytische Verhalten der Lösungsgesamtheit.

14.7 Vektorfeld und Richtungsfeld

Im Abschnitt 4.1, beim ersten Kennenlernen des Differentialgleichungsbegriffes, haben wir nichtautonome Differentialgleichungen erster Ordnung, $y' = f(x, y)$, durch ihr *Richtungsfeld* veranschaulicht und in 4.6 dann analog auch das Richtungsfeld eines nicht-autonomen Systems $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$ erster Ordnung betrachtet. Jetzt, im Zuge der Zurückführung von allen und jedem System auf ein *autonomes* System erster Ordnung, also auf ein Vektorfeld, bekommt auch $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$ ein Vektorfeld zugeordnet und besitzt damit also zwei Veranschaulichungen, die wir doch einmal miteinander vergleichen sollten.

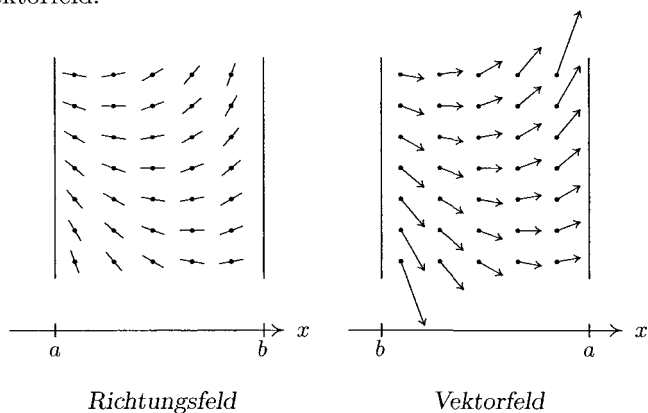
Blieben wir dafür bei der Notation x für die unabhängige und $\vec{y}$ für die abhängigen Variablen. Sei $B \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ der Definitionsbereich

von $\vec{f}: B \rightarrow \mathbb{R}^n$. Das zu $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$ gehörige Vektorfeld $\vec{v}: B \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ist dann definitionsgemäß durch

$$\vec{v}(x, \vec{y}) = (1, \vec{f}(x, \vec{y}))$$

gegeben, wie wir im vorigen Abschnitt gesehen haben. Das Richtungsfeld dagegen ordnete dem Punkt $(x, \vec{y})$ nicht einen Vektor zu, sondern nur eine ‘Richtung’, beschrieben durch eine Gerade (beim Zeichnen und Vorstellen natürlich nur ein kleines Stückchen einer Geraden) durch den Punkt, nämlich die Gerade mit dem vektoriellen Anstieg $\vec{f}(x, \vec{y})$. Das ist aber genau die Gerade durch $(x, \vec{y})$ mit dem Richtungsvektor $\vec{v}(x, \vec{y})$!

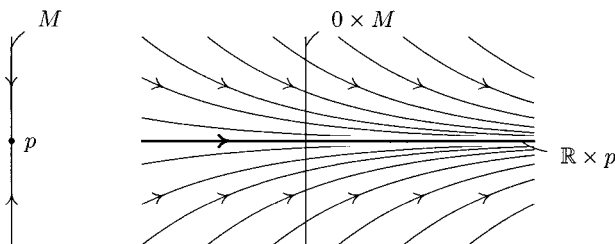
Damit ist klar, wie Vektorfeld und Richtungsfeld auseinander hervorgehen. Ist das Vektorfeld gegeben, so ignorieren Sie die Pfeilspitzen und die Länge der Vektoren, behalten also von jedem Vektor nur ein Strichlein in dieselbe Richtung: dann haben Sie das Richtungsfeld von $\vec{y}' = \vec{f}(x, \vec{y})$ vor sich. Ist umgekehrt zuerst das Richtungsfeld gegeben, so ersetzen Sie die Richtungsgerade durch jeweils durch jenen Vektor in dieselbe Richtung, dessen erste Komponente, also die x - oder Horizontalkomponente gleich 1 ist: so erhalten Sie das Vektorfeld.



Das Phasenportrait besteht aus den *Graphen* der Lösungen, und der Phasenfluss strömt in diesen Bahnen mit der Horizontalgeschwindigkeit 1 entlang.

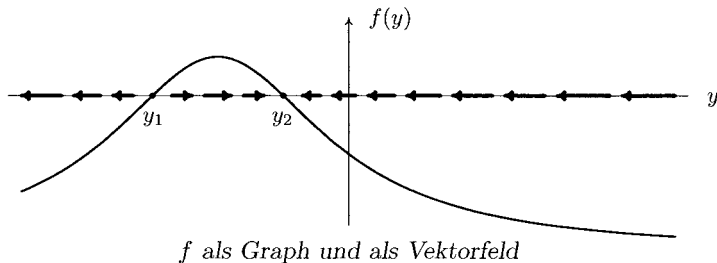
Ein *autonomes* System $\vec{y}' = \vec{f}(\vec{y})$ auf $M \subset \mathbb{R}^n$ hat gar zwei Phasenportraits, zum einen das durch das Vektorfeld $\vec{f}$ auf M ge-

gebene, dessen Flusslinien die Lösungen selbst sind, und sodann das *erweiterte* Phasenportrait auf $\mathbb{R} \times M$, dessen Bahnen die Graphen der Lösungen sind und das wir erhalten, wenn wir $\bar{y}' = \bar{f}(\bar{y})$ als Spezialfall eines nichtautonomen Systems auf $B := \mathbb{R} \times M$ ansehen. Dessen Vektorfeld $\bar{v} : B \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ hängt mit $\bar{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ durch $\bar{v}(x, \bar{y}) = (1, \bar{f}(\bar{y}))$ zusammen.



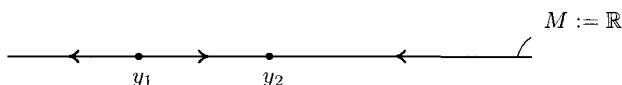
Phasenportrait und erweitertes Phasenportrait von $\bar{y}' = \bar{f}(\bar{y})$

Das ist wieder einmal eine von den niederdimensionalen Skizzen mit hochdimensionalen Beschriftungen, denn wir denken uns ja $M \subset \mathbb{R}^n$. Wir wollen aber zum Schluss wirklich einen Blick auf das Phasenportrait im *eindimensionalen* Fall werfen, also für autonome Differentialgleichungen $y' = f(y)$ für *eine* gesuchte Funktion $y = y(x)$. Diese Phasenportraits sind sehr einfach, fast schon wieder verwirrend einfach, aber immer noch nützlich. Denken wir uns etwa eine C^1 -Funktion f auf $\mathbb{R}$ mit zwei Nullstellen $y_1 < y_2$, zwischen denen sie positiv ist, sonst negativ. Geht man von der vertrauten Veranschaulichung von f durch seinen Graphen zu der ungewohnten als eindimensionales ‘Vektor’feld über:



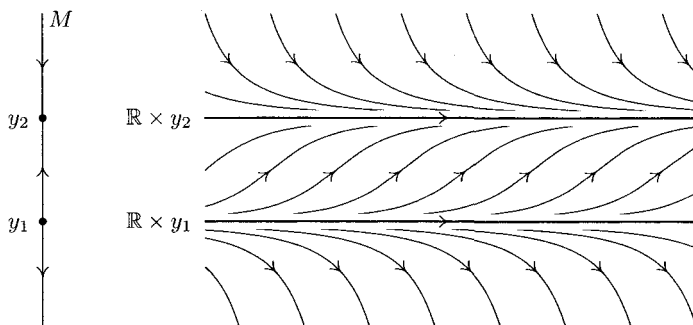
so sieht man schon⁷, dass das Phasenportrait nur aus fünf Bah-

nen besteht, nämlich aus den zwei einpunktigen oder *stationären* Bahnen $\{y_1\}$ und $\{y_2\}$ und den drei allgemeinen offenen Intervallen $(-\infty, y_1)$, (y_1, y_2) und (y_2, ∞) , jeweils versehen mit der Durchlaufungsrichtung:



Das Phasenportrait von $y' = f(y)$.

Man liest daran zum Beispiel sofort ab, wie die Lösung zum Anfangswert $y(0) = p$ sich im Limes für $x \rightarrow b_p$ verhalten wird, dass sie z.B. für $p > y_1$ gegen y_2 konvergieren und deshalb für diese p auch unendliche Lebensdauer $b_p = \infty$ haben, usw. Das erweiterte Phasenportrait wird also ungefähr so aussehen:



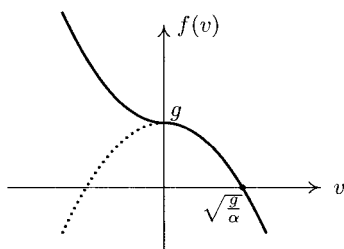
Phasenportrait

Erweitertes Phasenportrait

Phasenportrait und erweitertes Phasenportrait der autonomen Gleichung $y' = f(y)$. Beachte, dass durch Translation einer Lösung $y(x)$ stets wieder eine Lösung $y(x - x_0)$ entsteht

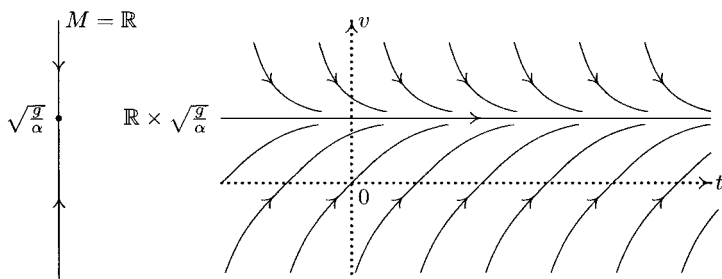
Den genauen Lösungsverlauf, exakte Formeln, wenn es denn auf diese ankommt, erhält man freilich erst durch Rechnung, aber selbst diese Rechnung wird durch die kostenlose geometrische Vorinformation unterstützt und erleichtert: man vergisst keine Fälle und erkennt Rechenfehler sofort, wenn das Ergebnis die Erwartungen nicht erfüllt.

Nehmen Sie die Übungsaufgabe R14.1 als Beispiel, in der es um die Differentialgleichung für die Geschwindigkeit v des im Schwerfeld mit quadratischer Reibung sinkenden Körpers geht. Für $v > 0$ ist das die Gleichung $\dot{v} = g - \alpha v^2$, für $v < 0$ aber $\dot{v} = g + \alpha v^2$, auf ganz $M = \mathbb{R}$ also $\dot{v} = g - \alpha v|v| =: f(v)$. Im Prinzip hätte diese Aufgabe nach Kapitel 4 schon gestellt werden können. Fangen Sie aber nicht gleich blindlings an zu rechnen, das ist ja als wollten Sie mit verbundenen Augen durch den Wald gehen. Skizzieren Sie sich die Funktion f , das kostet nichts:



Die Funktion $f(v) = g - \alpha v|v|$

Dann haben Sie auch das Phasenportrait und damit das zu erwartende Aussehen des erweiterten Phasenportraits:



Phasenportrait

Erweitertes Phasenportrait von $\dot{v} = g - \alpha v|v|$

Wenn Sie jetzt rechnen, sehen Sie jederzeit, wie Sie die aus den notwendigen Fallunterscheidungen stammenden Teilergebnisse zur Angabe der allgemeinen Lösung zusammensetzen müssen.

14.8 Übungsaufgaben

Aufgabe R14.1: Lösen Sie die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}v(t) = g - \alpha v(t)|v(t)|$$

mit $\alpha > 0$ für die Geschwindigkeit des im Schwerfeld sinkenden Körpers für jede Anfangsbedingung $v(0) = v_0$.

Aufgabe R14.2: Betrachten Sie die anharmonische Schwingungsgleichung $\ddot{x} + \omega_0^2 x + \lambda x^3 = 0$. Untersuchen Sie das Phasenportrait für $\lambda > 0$ und $\lambda < 0$. Wann gibt es periodische Lösungen? Machen Sie für diese den Ansatz $x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cos k\omega t$. Zeigen Sie, dass man damit (durch formales, heuristisches Rechnen, ohne Rücksicht auf Konvergenz) ein System von Gleichungen zur Bestimmung der Fourier-Koeffizienten x_k erhält. Für diesmal vernachlässigen Sie alle Terme mit $k > 1$ und bestimmen Sie die Grundfrequenz ω . Wann ist das vermutlich eine gute Näherung?

Aufgabe R14.3: Sei $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ ein fester Vektor, $a > 0$. Bestimmen Sie die Bahnkurven $\vec{x}(t)$ des (nicht-autonomen) Geschwindigkeitsfeldes $\vec{v}(t, \vec{x}) = \vec{u} + (\vec{x} - \vec{u}t)a^2t/(1 + a^2t^2)$, also die Lösungen von $\dot{\vec{x}} = \vec{v}(t, \vec{x})$. (Lösungshinweis: Betrachte $\vec{y} := \vec{x} - \vec{u}t$.) Skizzieren Sie, wohin die zum Zeitpunkt 0 in einer kleinen Kugel um $\vec{x}_0$ befindlich gewesenen Punkte nach Verlauf einer Zeit t von den Bahnkurven gebracht worden sind.

Aufgabe T14.1: a) Skizzieren Sie die Phasenportraits der Differentialgleichungen $\dot{x} = 1 + x^2$ und $\dot{x} = 1 - x^2$.

b) Bestimmen Sie den Definitionsbereich $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ des maximalen lokalen Flusses von $\dot{x} = 1 + x^2$.

Aufgabe T14.2: Beweisen Sie, daß der maximale lokale Fluß des Gradientenfeldes einer C^2 -Funktion auf einer offenen Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ keine periodischen Flußlinien haben kann.

Aufgabe T14.3: Es bezeichne $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion mit genau einer Nullstelle. Beweisen Sie, daß das Phasenportrait der Differentialgleichung $y' = f(y)$ genau drei Orbits hat. Geben Sie

für die möglichen Richtungen der Bahnen je ein konkretes Beispiel einer solchen Differentialgleichung $y' = f(y)$. (Daß es in $\mathbb{R}$ außer der leeren Menge und $\mathbb{R}$ selbst keine Teilmengen gibt, die offen und abgeschlossen zugleich sind, dürfen Sie ohne Beweis verwenden.)

Aufgabe T14.4: Es sei $f : M \rightarrow N$ eine C^∞ -Transformation zwischen zwei offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, d.h. eine Bijektion, bei der f und f^{-1} beide C^∞ sind. Ein C^1 -Vektorfeld $\vec{v}$ auf M werde durch das Differential von f auf N übertragen: $\vec{w}(f(p)) := df_p(\vec{v}(p))$. Bestimmen Sie den maximalen lokalen Fluss Ψ von $\vec{w}$ aus dem maximalen lokalen Fluss Φ von $\vec{v}$.

Aufgabe T14.5: Es sei $\vec{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Lipschitz-Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge. Schließen Sie aus dem Satz von Picard-Lindelöf (Offenheitsaussage), daß es zu jedem $p \in M$ ein $\varepsilon > 0$ und ein $\delta > 0$ gibt, so daß für alle Punkte q aus der ε -Kugel um p das 'Alter' $|a_q|$ und die 'Lebensdauer' b_q der Flußlinien von $\vec{x} = \vec{v}(\vec{x})$ größer als δ sind und beweisen Sie damit, daß aus der Existenz von $\lim_{t \rightarrow b_p} \alpha_p(t) \in M$ stets $b_p = \infty$ folgt.

Aufgabe T14.6: Eine Funktion $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ heisst ein *erstes Integral* eines maximalen lokalen Flusses Φ auf M , wenn sie längs jeder Flußlinie konstant ist. Sei jetzt $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion auf einem offenen Intervall $D \subset \mathbb{R}$ und $f(x) := F'(x)$. Beweisen Sie, daß $H(x_1, x_2) := F(x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$ ein erstes Integral (des Phasenflusses) der Differentialgleichung $\ddot{x} + f(x) = 0$ ist und verschaffen Sie sich damit für a) $\ddot{x} + 3x^2 - 1 = 0$, b) $f(x) = 4x(1 - x^2)$ und c) $f(x) = -4x(1 - x^2)$ eine ungefähre Vorstellung (Skizze) vom Phasenportrait.

15

Zweidimensionale Systeme mit konstanten Koeffizienten

15.1 Der e -Ansatz

In diesem Kapitel behandeln wir eine wichtige Beispielklasse autonomer Systeme erster Ordnung, nämlich die Systeme der Form

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2\end{aligned}$$

für zwei gesuchte Funktionen $x_1 = x_1(t)$ und $x_2 = x_2(t)$, wobei die $a_{ij} \in \mathbb{R}$ konstant sind und die **Koeffizienten** des Systems heißen. Ist A die Matrix dieser Koeffizienten, so können wir das System als $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ schreiben. Das Vektorfeld des Systems ist also die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, und ich benutze die Vektorpfeil-Notation um zu betonen, dass der Ort des Geschehens, $M := \mathbb{R}^2$, jetzt ein Vektorraum ist und Linearkombinationen von Lösungen, wie immer bei linearen Gleichungen und Systemen, eine wichtige Rolle spielen, weil sie ebenfalls Lösungen sind. Insbesondere braucht man nur die Lösungskurven $\alpha_{\vec{u}}, \alpha_{\vec{v}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ zweier linear unabhängiger Anfangsvektoren $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ zu kennen, um sofort die allgemeine Lösung zu haben, denn die Lösungskurve zu einem beliebigen Anfangsvektor $c_1\vec{u} + c_2\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ ist dann $c_1\alpha_{\vec{u}} + c_2\alpha_{\vec{v}}$, daher ist durch

$$\vec{x}(t) = c_1 \alpha_{\vec{u}}(t) + c_2 \alpha_{\vec{v}}(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

die **allgemeine Lösung** von $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ gegeben, und man nennt $\alpha_{\vec{u}}, \alpha_{\vec{v}}$ deshalb ein **Fundamentalsystem** für $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$. Der Phasenfluss $\Phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist dann also durch

$$\Phi(t, c_1 \vec{u} + c_2 \vec{v}) := c_1 \alpha_{\vec{u}}(t) + c_2 \alpha_{\vec{v}}(t)$$

beschrieben, was will man mehr. Und zur Berechnung eines Fundamentalsystems wird es doch ein Verfahren geben? — Gewiss, in ganz konkreten Rechenschritten. Es ist zwar etwas verwickelt, denn je nachdem ob eine gewisse Zahl, nämlich $(a_{11} + a_{22})^2 - 4 \det A$, größer, kleiner oder gleich Null ist, nimmt die Rechnung einen anderen Verlauf, aber mit Wurzelziehen und den vier Grundrechenarten kommt man dabei aus, und am Schluss steht das Fundamentalsystem da. — Alsdann, ohne weiteres Predigen, her mit dem Verfahren, denn das ist doch, worauf es in der Praxis ankommt.

Lieben Leute, worauf es (auch in der Praxis) ankommt, ist dass Sie immer *verstehen* was Sie tun, denn nur dann sind Sie flexibel genug, den ständig wechselnden Anforderungen zu genügen. Die Arbeitsplätze, auf denen es genügt, Zahlen in vorgegebene Formeln einzusetzen, sind längst wegrationalisiert, während Menschen mit Durchblick händeringend gesucht werden.

Vielleicht können wir uns aber darauf einigen, dass es sowohl praktisch als auch einsichtig ist, es einmal mit einem Exponentialansatz oder e -Ansatz

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda t} \vec{v}$$

zu versuchen, nach den guten Erfahrungen, die wir mit dem e -Ansatz schon bei den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten gemacht haben. Der zu der Ansatz-Formel gehörige Text heißt natürlich: *für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ ist $\vec{x}(t) = e^{\lambda t} \vec{v}$ eine Lösung?*

Eine solche Lösung würde ja bei $t = 0$ den Anfangswert $\vec{v}$ annehmen, also die Lösungskurve $\alpha_{\vec{v}}$ sein. Wenn es uns gelingt, für zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ solche Exponentiallösungen zu finden, dann haben wir schon ein Fundamentalsystem. Wir gehen also mit dem Ansatz in das System $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ hinein:

Notiz: Genau dann ist $\vec{x}(t) = e^{\lambda t} \vec{v}$ eine Lösung von $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, wenn

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

gilt. □

Nach diesen λ und $\vec{v}$ zu suchen, ist eine rein linear-algebraische Aufgabe. Gilt $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ und ist $\vec{v} \neq 0$, denn der Fall $\vec{v} = 0$ ist nicht interessant, so nennt man λ einen **Eigenwert** der Matrix A und $\vec{v}$ einen **Eigenvektor** von A zum Eigenwert λ . Wie findet man Eigenwerte und Eigenvektoren?

Die Bedingung $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ bedeutet ja soviel wie $A\vec{v} - \lambda\vec{v} = 0$ oder $(A - \lambda E)\vec{v} = 0$, wenn E die 2×2 -Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bezeichnet, weil $E\vec{v} = \vec{v}$ ist. Daher ist λ genau dann ein Eigenwert, wenn die 2×2 -Matrix

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}$$

einen nichttrivialen Kern hat, was bekanntlich genau dann eintritt, wenn die Determinante Null ist, und deshalb spielt diese Determinante, als Funktion von λ aufgefasst, bei Eigenwertproblemen eine Schlüsselrolle und hat einen besonderen Namen:

Definition: Das Polynom

$$P_A(\lambda) := \det(A - \lambda E) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det A$$

zweiten Grades in der Variablen λ heißt das **charakteristische Polynom** der 2×2 -Matrix A . □

Notiz und Definition: Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, und ist λ ein Eigenwert, so besteht der Untervektorraum $E_\lambda := \text{Kern}(A - \lambda E)$ gerade aus der Null und den Eigenvektoren zum Eigenwert λ und heißt deshalb der **Eigenraum** zum Eigenwert λ . □

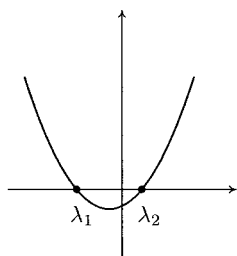
Zu einem Eigenwert λ den zugehörigen Eigenraum $E_\lambda \subset \mathbb{R}^2$ auszurechnen ist leicht. Da wir im $\mathbb{R}^2$ sind, ist so ein Eigenraum entweder eine Gerade durch den Nullpunkt oder ganze $\mathbb{R}^2$. Letzteres tritt ein,

wenn $A - \lambda E$ ganz und gar Null ist, d.h. wenn $A = \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ war. Dann ist also $E_\lambda = \mathbb{R}^2$ und es gibt gar nichts zu rechnen. Andernfalls hat die Matrix $A - \lambda E$ eine von $(0, 0)$ verschiedene Zeile (a, b) , und dann ist z.B. der Vektor

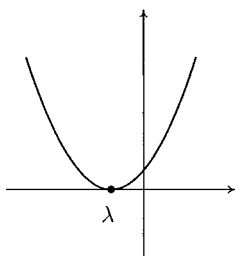
$$\vec{v} := \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor und damit Basis des eindimensionalen Raumes E_λ , denn $ab - ab$ ist sowieso Null, und mit der anderen Zeile (c, d) der Matrix $A - \lambda E$ ergibt sich $ad - bc$, das ist wegen $\det(A - \lambda E) = 0$ auch Null. Soviel zum Rechenaufwand!

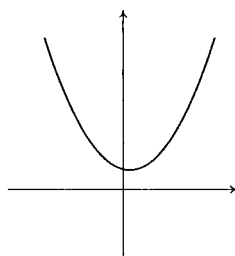
Welche Eigenwerte es aber gibt, entscheidet das charakteristische Polynom. Drei Fälle können vorkommen:



1. Fall



2. Fall



3. Fall

Welcher Fall eintritt sehen Sie ja, wenn Sie die Nullstellen aufsuchen, und ich zögere die Formel dafür herzusetzen — und ich tu's auch nicht, Sie könnten sonst meinen, Sie brauchten's nicht selber zu wissen. Wie weit hat uns der e -Ansatz also gebracht?

Ergebnis des e -Ansatzes:

1. Fall: Hat das charakteristische Polynom von A zwei reelle Nullstellen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ Eigenvektoren zu diesen Eigenwerten λ_1 bzw. λ_2 , dann ist

$$\begin{aligned} \alpha_{\vec{u}}(t) &= e^{\lambda_1 t} \vec{u} \\ \alpha_{\vec{v}}(t) &= e^{\lambda_2 t} \vec{v} \end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem für $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$. Beachten Sie, dass $(\vec{u}, \vec{v})$ wirklich eine Basis ist, denn sonst müsste $\vec{u} = c\vec{v}$ für ein $c \in \mathbb{R}$ gelten, woraus $A\vec{u} = \lambda_2\vec{u}$ folgen würde, was wegen $A\vec{u} = \lambda_1\vec{u}$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2$ nicht möglich ist.

In diesem angenehmen Fall bringt uns der e -Ansatz also die vollständige Lösung des Systems. $\square$

2. Fall: Hat das charakteristische Polynom von A nur *eine* Nullstelle $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist entweder

- (a) $E_\lambda = \mathbb{R}^2$, das heißt dass $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ war, in diesem Falle gilt sowieso $\alpha_{\vec{v}}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$ für jedes $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ und das System ist gelöst. Oder aber
- (b) der Eigenraum E_λ ist eindimensional. Wir wählen einen Eigenvektor $\vec{v} \in E_\lambda$ und haben dann die Lösung $\alpha_{\vec{v}}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$ zum Anfangswert $\vec{v}$, aber ein Fundamentalsystem hat uns der e -Ansatz nicht gebracht, nur ein halbes, immerhin.

3. Fall: Hat das charakteristische Polynom keine reelle Nullstelle, dann müssen wir leider feststellen, dass uns der e -Ansatz einstweilen gar nichts gebracht hat.

15.2 Der Grenzfall

In diesem Abschnitt wollen wir das halbe Fundamentalsystem aus dem 2. Fall zu einem richtigen Fundamentalsystem ergänzen. Es sei also $\lambda \in \mathbb{R}$ einzige Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A und $\vec{v}$ ein Eigenvektor dazu. Wir ergänzen erst einmal $\vec{v}$ auf beliebige Weise zu einer Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ von $\mathbb{R}^2$ und nehmen uns vor, die Lösung $\alpha_{\vec{u}}(t)$ zum Anfangswert $\vec{u}$ aufzufinden.

Die gesuchte Lösung muss sich jedenfalls auch in der Form

$$\alpha_{\vec{u}}(t) = x(t)\vec{u} + y(t)\vec{v}$$

mit noch zu bestimmenden $x(t)$ und $y(t)$ schreiben lassen, und indem wir das Problem so anschauen tun wir nichts weiter, als es in den durch die Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ bestimmten Koordinaten zu betrachten.

Die Anfangsbedingungen für x und y , die wir dann brauchten, wären $x(0) = 1$ und $y(0) = 0$, und das Differentialgleichungssystem verlangte $\dot{\alpha} = A\alpha$, also

$$\dot{x}(t)\vec{u} + \dot{y}(t)\vec{v} = x(t)A\vec{u} + \lambda y(t)\vec{v},$$

weil ja $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ ist.

Um abzulesen, was das für $x(t)$ und $y(t)$ bedeutet, müssen wir natürlich auch $A\vec{u}$ nach der Basis entwickeln, $A\vec{u} = c_1\vec{u} + c_2\vec{v}$, und die Koeffizienten c_1 und c_2 können wir auch berechnen, da wir A und die Basis ja kennen. Setzt man das ein und vergleicht auf beiden Seiten die Koeffizienten vor $\vec{u}$ und $\vec{v}$, so erhält man

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= c_1x(t) \\ \dot{y}(t) &= c_2x(t) + \lambda y(t)\end{aligned}$$

als das Differentialgleichungssystem für x und y . Dass in die erste Gleichung $y(t)$ erfreulicherweise nicht eingeht, kommt nicht unerwartet, das ist eben die Belohnung dafür, dass wir nicht einfach bei der Standard-Basis geblieben sind, sondern den Eigenvektor $\vec{v}$ an der neuen Basis mit beteiligt haben, und auf den reagiert A einfach durch Multiplikation mit λ , das steckt letztlich dahinter.

Aber wie auch immer: die erste Gleichung hat $x(t) = e^{c_1 t}$ als Lösung zur gewünschten Anfangsbedingung $x(0) = 1$, und wenn wir mit diesem Ergebnis in die zweite Gleichung hineingehen, haben wir die inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$L[y] := \dot{y} - \lambda y = c_2 e^{c_1 t}$$

für $y(t)$, die wir zur Anfangsbedingung $y(0) = 0$ lösen wollen. Das könnten wir mit Variation der Konstanten aus dem Abschnitt 4.5 machen, aber noch näher liegt uns vielleicht die in Abschnitt 13.1 über erzwungene Schwingungen benutzte Methode, wonach man mit Hilfe des charakteristischen Polynoms P_L des Operators, hier also $P_L(\mu) = \mu - \lambda$, spezielle Lösungen von $L[y] = e^{\mu t}$ schnell hinschreiben kann.

Bisher haben wir noch gar keinen Gebrauch davon gemacht, dass λ der *einzige* Eigenwert von A ist, und tatsächlich würden wir auf diesem Wege auch zu einem Fundamentalsystem gelangen, wenn es

noch einen zweiten Eigenwert gäbe. Dass λ der einzige Eigenwert ist, hat aber $c_1 = \lambda$ zur Folge, denn dass c_1 ebenfalls Eigenwert von A ist, sieht man zum Beispiel daran, dass offensichtlich

$$\begin{aligned}(A - c_1 E)\vec{u} &= c_2 \vec{v}, \\ (A - c_1 E)\vec{v} &= (\lambda - c_1)\vec{v}\end{aligned}$$

ist, der Rang von $A - c_1 E$ also höchstens Eins und der Kern daher nicht trivial sein kann. Wie immer also der Basisvektor $\vec{u}$ auch gewählt wurde, stets ergibt sich

$$A\vec{u} = \lambda u + c_2 \vec{v}.$$

Unsere Gleichung für $y(t)$ heißt also $L[y] = c_2 e^{\lambda t}$, das charakteristische Polynom $P_L(\mu)$ hat bei $\mu = \lambda$ eine Nullstelle und die Ableitung $P'_L(\mu) = 1$, also ist nach den in 13.1 studierten Regeln der Kunst $y(t) = c_2 t e^{\lambda t}$ eine spezielle Lösung, und da sie die Anfangsbedingung $y(t) = 0$ freiwillig erfüllt, auch die gesuchte. Schreiben wir nun, da wir die Notation c_1 nicht mehr brauchen, auch $c_2 =: \kappa$ und fassen zusammen.

Satz (Fundamentalsystem im Grenzfall): *Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$ der einzige Eigenwert der reellen 2×2 -Matrix A , sei $\vec{v}$ ein Eigenvektor und $\vec{u}$ so gewählt, dass $(\vec{u}, \vec{v})$ eine Basis ist. Dann gilt $A\vec{u} = \lambda\vec{u} + \kappa\vec{v}$ für ein eindeutig bestimmtes $\kappa \in \mathbb{R}$, und*

$$\begin{aligned}\alpha_{\vec{u}}(t) &= e^{\lambda t}(\vec{u} + \kappa t \vec{v}) \\ \alpha_{\vec{v}}(t) &= e^{\lambda t} \vec{v}\end{aligned}$$

ist ein Fundamentalsystem für $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$. □

15.3 Der komplexe e -Ansatz

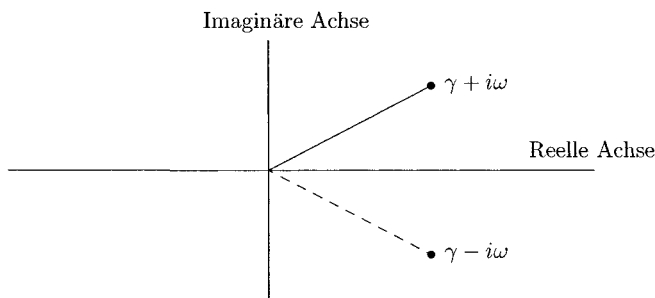
Jetzt wenden wir uns dem dritten Fall zu, in dem das charakteristische Polynom von A keine reellen Nullstellen hat. — Komplex weiterzurechnen wenn es reell nicht mehr geht, bringt immer etwas, und zumal in unserem Falle ist gar keine Gefahr damit verbunden, weil wir ein etwas dubios mit ALS OB-Methoden ermitteltes angebliches Fundamentalsystem ja nur nachträglich in $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ einzusetzen

und auf die Anfangsbedingungen hin überprüfen zu brauchen um sicher zu sein, dass es einwandfrei ist.

Das charakteristische Polynom von A hat also nun keine reellen Nullstellen, dafür aber zwei komplexe,

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2 - \det A} =: \gamma \pm i\omega, \text{ wobei } \omega > 0,$$

weil jetzt unter dem Wurzelzeichen in der bekannten Lösungsformel für quadratische Gleichungen etwas Negatives steht. Das sind die beiden **komplexen Eigenwerte** von A . Nehmen wir einmal einen der beiden zur Hand, sagen wir $\lambda := \gamma + i\omega$.



Die beiden komplexen Eigenwerte der reellen Matrix A . Wir wählen oBdA den oberen zu weiterer Verwendung aus.

Dann ist $A - \lambda E$ wieder eine, jetzt freilich komplexe, 2×2 -Matrix mit $\det(A - \lambda E) = 0$, und deshalb können wir uns, wie im ersten Abschnitt für reelles λ erläutert, durch

$$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} =: \vec{u} + i\vec{v} \neq 0$$

einen, jetzt freilich *komplexen Eigenvektor* zum Eigenwert $\gamma + i\omega$ verschaffen. Dann hat man, wie im Reellen und aus denselben Gründen, in

$$\alpha_{\vec{u}+i\vec{v}}(t) = e^{(\gamma+i\omega)t}(\vec{u} + i\vec{v})$$

die Lösungskurve des komplexen Systems $\dot{\vec{z}} = A\vec{z}$ zum komplexen Anfangswert $\vec{u} + i\vec{v}$ und insofern etwas, was wir gar nicht haben

wollten. Aber! Weil A reell ist, folgt aus $\dot{\vec{z}}(t) = A\vec{z}(t)$ immer auch $\operatorname{Re} \dot{\vec{z}}(t) = A(\operatorname{Re} \vec{z}(t))$ und $\operatorname{Im} \dot{\vec{z}}(t) = A(\operatorname{Im} \vec{z}(t))$, und deshalb sind Real- und Imaginärteil einer komplexen Lösung ebenfalls Lösungen. Real- und Imaginärteil unserer Lösung $e^{(\gamma+i\omega)t}(\vec{u} + i\vec{v})$ sind aber leicht auszurechnen:

$$\begin{aligned} e^{(\gamma+i\omega)t}(\vec{u} + i\vec{v}) &= e^{\gamma t}(\cos \omega t + i \sin \omega t)(\vec{u} + i\vec{v}) \\ &= e^{\gamma t} \underbrace{(\cos \omega t \vec{u} - \sin \omega t \vec{v})}_{\text{Realteil}} + i e^{\gamma t} \underbrace{(\sin \omega t \vec{u} + \cos \omega t \vec{v})}_{\text{Imaginärteil}}, \end{aligned}$$

und da für $t = 0$ der Realteil den Wert $\vec{u}$, der Imaginärteil den Wert $\vec{v}$ annimmt, haben wir die Lösungskurven dieser Anfangswerte gefunden, und wenn wir daran Zweifel hätten, wäre jetzt der Moment gekommen, das einfach nachzurechnen. Damit können wir nun fast schon zusammenräumen:

Satz: Hat das charakteristische Polynom von A keine reelle Nullstelle und sind $\gamma \pm i\omega$ die beiden komplexen Eigenwerte von A , und ist ferner $\vec{u} + i\vec{v}$ ein komplexer Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda := \gamma + i\omega$, so ist durch

$$\begin{aligned} \alpha_{\vec{u}}(t) &= e^{\gamma t}(\cos \omega t \vec{u} - \sin \omega t \vec{v}) \\ \alpha_{\vec{v}}(t) &= e^{\gamma t}(\sin \omega t \vec{u} + \cos \omega t \vec{v}), \end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem von $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ gegeben.

BEWEIS: Eines bleibt nämlich noch zu zeigen: ist $(\vec{u}, \vec{v})$ wirklich eine Basis von $\mathbb{R}^2$? Wir wissen zwar, dass der komplexe Vektor $\vec{u} + i\vec{v}$ nicht der Nullvektor ist, aber daraus allein folgt natürlich noch nicht, dass die beiden reellen Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängig sein müssten.

Wären aber $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig, so wären sie reelle Vielfache eines Vektors $\vec{r}$ in $\mathbb{R}^2$, also $\vec{u} = x\vec{r}$ und $\vec{v} = y\vec{r}$ für geeignete $x, y \in \mathbb{R}$. Weil aber

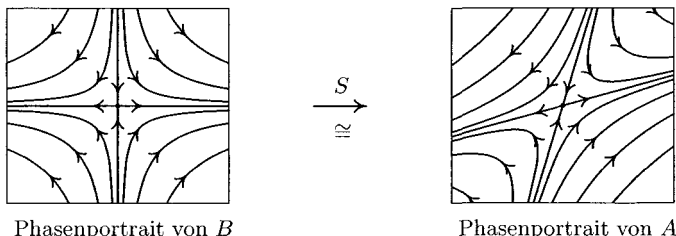
$$\vec{u} + i\vec{v} = (x + iy)\vec{r} =: z\vec{r}$$

komplexer Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = \gamma + i\omega$ ist, würde das nun auch auf $\vec{r}$ selbst zutreffen, denn aus $A(z\vec{r}) = \lambda z\vec{r}$ folgte wegen $z \neq 0$ auch $A\vec{r} = \lambda\vec{r}$, was aber wegen $\omega \neq 0$ nicht sein kann, die linke Seite ist reell. $\square$

15.4 Die Phasenportraits

Um das gesamte Lösungsverhalten eines Systems $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ anschaulich vor uns zu haben, brauchen wir das Phasenportrait.

Wenn wir für ein System $\dot{\vec{x}} = B\vec{x}$ das Phasenportrait schon kennen und wenden eine Transformation $S : \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$ darauf an, dann kennen wir auch das Phasenportrait des transformierten Systems:



Wie heißt die Matrix A des transformierten Systems, d.h. für welche Matrix A sind $(S\vec{x})'(t) = A(S\vec{x}(t))$ und $\dot{\vec{x}}(t) = B\vec{x}(t)$ gleichbedeutend? Nun, $\dot{\vec{x}}(t) = B\vec{x}(t)$ bedeutet dasselbe wie $(S\vec{x})'(t) = SB\vec{x}(t)$, deshalb brauchen wir nur für $AS = SB$ zu sorgen, und das ist leicht: $A := SBS^{-1}$.

Sprechweise: Ein Isomorphismus $S : \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$ **transformiert** das System $\dot{\vec{x}} = B\vec{x}$ in das System $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ oder, was dasselbe heißen soll, **reduziert** das System $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ auf das System $\dot{\vec{x}} = B\vec{x}$, wenn $A := SBS^{-1}$ gilt, d.h. wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^2 \\ S \uparrow \cong & & S \uparrow \cong \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{B} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

kommutativ ist.¹ Natürlich transformiert S^{-1} dann auch umgekehrt das System $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ in das System $\dot{\vec{x}} = B\vec{x}$, und die Systeme oder ihre Matrizen heißen dann **äquivalent**. $\square$

Wir wissen ja schon, wie man zu vorgegebener Matrix A ein Fundamentalsystem von $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ ausrechnet. Dabei spielte jeweils eine

Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ eine Rolle, und es bietet sich an, den Basisisomorphismus $S := \Phi_{(\vec{u}, \vec{v})}$ zu verwenden, um $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ auf ein einfacheres System zu reduzieren. Die Matrix B des einfacheren Systems stellt eben die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bezüglich dieser Basis dar:

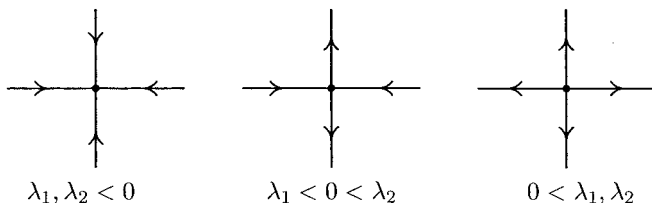
$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^2 \\
 S \uparrow \cong & & S \uparrow \cong & S \uparrow \cong & S \uparrow \cong & S \uparrow \cong & S \uparrow \cong & S \uparrow \cong & S \uparrow \cong \\
 \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}} & \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \kappa & \lambda \end{pmatrix}} & \mathbb{R}^2 & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \gamma & \omega \\ -\omega & \gamma \end{pmatrix}} & \mathbb{R}^2 \\
 1. \text{ Fall} & & 2. \text{ Fall} & & 3. \text{ Fall}
 \end{array}$$

Bezeichnen wir die Flusslinie oder Lösungskurve des vereinfachten Systems $\dot{\vec{x}} = B\vec{x}$ zum Anfangswert $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ mit $\beta_{\vec{c}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, um sie nicht mit einer Lösungskurve des ursprünglichen Systems $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ zu verwechseln.

Das Fundamentalsystem des vereinfachten Systems ist im ersten Fall natürlich durch $\beta_{\vec{e}_1}(t) = e^{\lambda_1 t} \vec{e}_1$ und $\beta_{\vec{e}_2}(t) = e^{\lambda_2 t} \vec{e}_2$ gegeben, weil dieses System ja entkoppelt ist. Aber auch in den anderen beiden Fällen müssen wir nicht neu anfangen zu rechnen, da wir ja nur in den Formeln für das Fundamentalsystem von $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ die Basisvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ durch $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ zu ersetzen brauchen. Deshalb haben wir auch die allgemeine Flusslinie $\beta_{\vec{c}}(t) = c_1 \beta_{\vec{e}_1}(t) + c_2 \beta_{\vec{e}_2}(t)$ in expliziten Formeln vor uns, und wir werden nun daraus die gerichteten Bahnen durch direkte Kurvendiskussion bestimmen.

Die Phasenportraits:

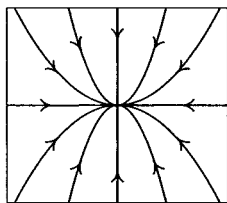
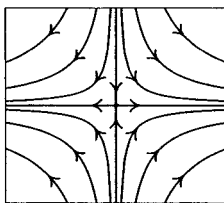
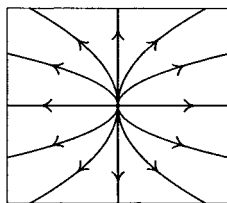
1. Fall: Die Flusslinien sind also jetzt $\beta_{\vec{c}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \vec{e}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \vec{e}_2$. Wie sieht das Phasenportrait aus? Sowieso ist der Nullpunkt ein stationärer Punkt, und für $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ bilden die Koordinaten-Halbachsen vier Bahnen, je nach Vorzeichen von λ_i einwärts oder auswärts gerichtet:



Um die anderen Bahnen zu berechnen, drücken wir $y := c_2 e^{\lambda_2 t}$ durch $x := c_1 e^{\lambda_1 t}$ aus. Für $c_1 > 0$ und $\lambda_1 \neq 0$ gilt offenbar

$$y = c_2 \left(\frac{x}{c_1} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} =: c_0 x^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

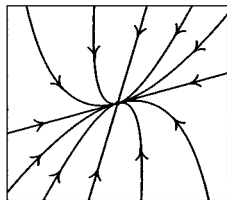
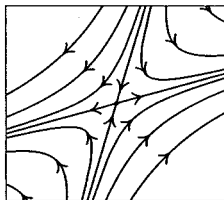
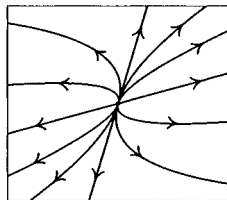
längs der Flusslinie $\alpha_{\vec{c}}$, und da wir die Graphen der allgemeinen Potenzen $y = x^a$ kennen, sehen wir die Bahnen und damit das ganze Phasenportrait jetzt vor uns. Sind λ_1 und λ_2 von einander und von Null verschieden, so gibt es bis auf Rollentausch von λ_1 und λ_2 die folgenden drei Typen:


 $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ (Senke)

 $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ (Sattel)

 $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ (Quelle)

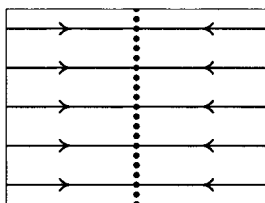
Die Transformation

$$S = \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{bmatrix},$$

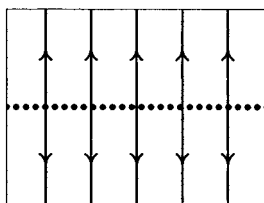
macht daraus das Phasenportrait des uns eigentlich interessierenden Systems $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$:


 $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ (Senke)

 $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ (Sattel)

 $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ (Quelle)

Verschwindet eines der λ_i , das andere nicht, so besteht die eine Koordinatenachse aus stationären Punkten. Bis auf Rollentausch der Koordinaten gibt es davon zwei Typen:

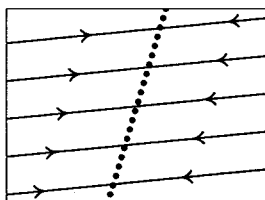


$$\lambda_1 < \lambda_2 = 0$$

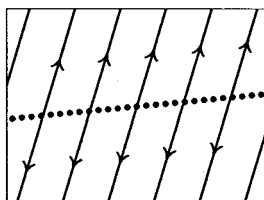


$$0 = \lambda_1 < \lambda_2$$

und dementsprechend das Phasenportrait des transformierten Systems $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$:

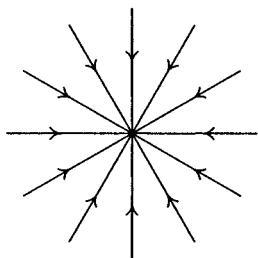


$$\lambda_1 < \lambda_2 = 0$$

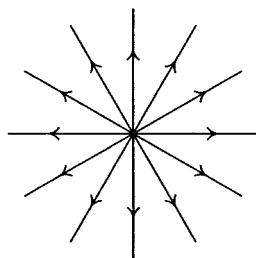


$$0 = \lambda_1 < \lambda_2$$

2. Fall: In diesem Grenzfall hat also das charakteristische Polynom von A nur *eine* Nullstelle λ . Dazu gehört auch der Spezialfall $A = \lambda E$, in dem sowieso alles klar ist: $\alpha_{\vec{v}}(t) = e^{\lambda t} \vec{v}$ sind die Flusslinien, und für $\lambda \neq 0$ sind die Bahnen daher Halbstrahlen:



$$A = \lambda E, \lambda < 0 \text{ (Senke)}$$



$$A = \lambda E, 0 < \lambda \text{ (Quelle)}$$

Im trivialen Fall $\lambda = 0$, also $A = 0$, besteht natürlich die ganze Ebene aus stationären Punkten.

Ist aber $A \neq \lambda E$, so ist in dem in Abschnitt 15.2 berechneten Fundamentalsystem für $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ auch $\kappa \neq 0$, und dann dürfen wir

oBdA auch $\kappa = 1$ annehmen, weil sich dieser Wert ergibt, wenn wir statt $(\vec{u}, \vec{v})$ die Basis $(\vec{u}, \kappa\vec{v})$ benutzen, was im Falle $\kappa \neq 0$ ja statthaft ist. Die allgemeine Lösung des reduzierten Systems ist dann

$$c_1 e^{\lambda t} (\vec{e}_1 + t \vec{e}_2) + c_2 e^{\lambda t} \vec{e}_2.$$

Für $\lambda \neq 0$, was wir erst einmal annehmen wollen, sind die beiden Halbstrahlen der y -Achse jedenfalls Bahnen ($c_1 = 0$), je nach Vorzeichen von λ einwärts oder auswärts laufend. Von den anderen Bahnen schauen wir uns jetzt die Flusslinie von $\vec{e}_1$ genauer an, die in der allgemeinen Lösung unter $c_1 = 1$ und $c_2 = 0$ zu finden ist, in den (x, y) -Koordinaten des $\mathbb{R}^2$ also durch

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\lambda t} \\ y(t) &= t e^{\lambda t} \end{aligned}$$

beschrieben wird. Längs dieser Flusslinie ist $x > 0$ und $t = \frac{1}{\lambda} \ln x$, und die Bahn ist der Graph von $y = \frac{1}{\lambda} x \ln x$. Das veranlasst uns, die durch

$$f(x) := x \ln x$$

gegebene Funktion auf $\mathbb{R}^+$ etwas genauer in Augenschein zu nehmen. Diese Funktion hat bei $x = 1$ eine Nullstelle, ist für $x < 1$ negativ, für $x > 1$ positiv. Die erste Ableitung ist

$$f'(x) = 1 + \ln x,$$

die zweite $f''(x) = \frac{1}{x}$. Die Funktion hat ein einziges Extremum, nämlich ein Minimum, und zwar dort, wo $\ln x = -1$ ist, also bei $x_0 := \frac{1}{e}$. Der Funktionswert ist dort $f(x_0) = -x_0$, der Graph schneidet also gerade am Minimum die Gerade $y = -x$.

Da der Anstieg $f'(x)$ streng monoton steigt und für $x > 1$ immer größer als Eins ist, geht $f(x)$ für $x \rightarrow \infty$ gegen unendlich. Wie verhält es sich aber für $x \rightarrow 0$? Dazu beobachten wir

$$f(e^{-\tau}) = -\frac{\tau}{e^\tau}$$

für $\tau \rightarrow \infty$. Für $\tau > 0$ gilt jedenfalls

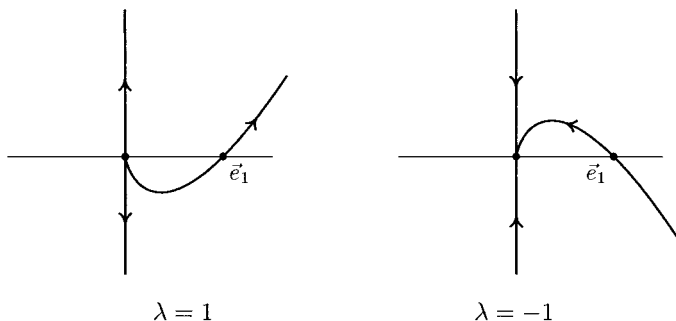
$$e^\tau = 1 + \tau + \frac{1}{2}\tau^2 + \cdots > 1 + \tau + \frac{1}{2}\tau^2,$$

und daher geht $f(e^\tau)$ für $\tau \rightarrow \infty$ gegen Null, also gilt auch

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Der Anstieg $f'(x)$ geht aber, wie $\ln x$, für $x \rightarrow 0$ gegen $-\infty$.

Damit verstehen wir den Verlauf der Bahn von $\vec{e}_1$ im Falle $\lambda = 1$ und natürlich auch für $\lambda = -1$, wofür wir an der x -Achse spiegeln und die Bahnrichtung von auswärts nach einwärts ändern.

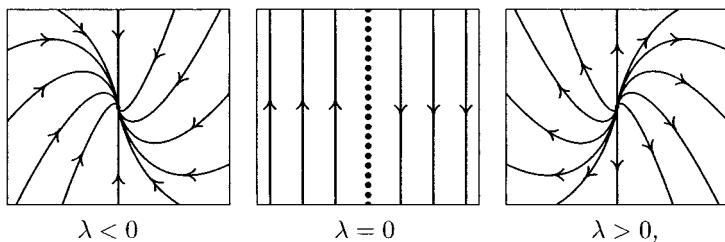


Ist zwar $\lambda \neq 0$, aber $|\lambda| \neq 1$, so muss in der y -Richtung dann nur noch um den Faktor $\frac{1}{|\lambda|}$ gestreckt bzw. gestaucht werden.

Aus diesen wenigen Bahnen bekommen wir aber nun alle, denn bei jedem linearen System $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ ist mit $\alpha(t)$ auch $c\alpha(t)$ eine Flusslinie, $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante. Die Multiplikation mit c , also die Abbildung

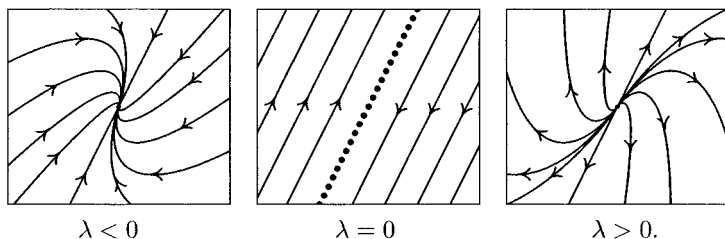
$$c \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

führt also Bahnen in Bahnen über, lassen wir c ganz $\mathbb{R}^+$ durchlaufen, erhalten wir aus der Bahn von $\vec{e}_1$ alle Bahnen in der rechten Halbebene, entsprechend mit den $c < 0$ die der linken. Für den von uns noch nicht betrachteten Fall $\lambda = 0$ ist das Phasenportrait ohnehin an der allgemeinen Lösung sofort abzulesen: die y -Achse besteht aus stationären Punkten und die anderen Bahnen sind die Parallelen zur y -Achse. Damit sehen wir jetzt die möglichen Phasenportraits des reduzierten Systems im Grenzfall alle vor uns:



Phasenportrait des reduzierten Systems im Grenzfall

und daraus erhalten wir das Phasenportrait des ursprünglichen Systems $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, wobei also A nur einen Eigenwert λ hat, aber $A \neq \lambda E$ gilt, durch Transformation mit dem Basis-Isomorphismus zur Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ bzw., wenn κ nicht auf 1 normiert wurde, zur Basis $(\vec{u}, \kappa\vec{v})$.



Phasenportrait des ursprünglichen Systems im Grenzfall

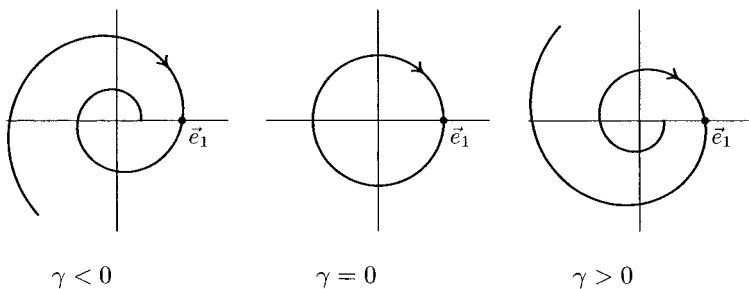
3. Fall: Jetzt hat A keinen reellen Eigenwert, aber der komplexe e -Ansatz hat uns eine reelle Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ gebracht, die das System auf eines mit dem Fundamentalsystem

$$\begin{aligned}\beta_{\vec{e}_1}(t) &= e^{\gamma t}(\cos \omega t \vec{e}_1 - \sin \omega t \vec{e}_2) \\ \beta_{\vec{e}_2}(t) &= e^{\gamma t}(\sin \omega t \vec{e}_1 + \cos \omega t \vec{e}_2)\end{aligned}$$

reduziert. Dessen Bahnen wollen wir durch direkte Kurvendiskussion ermitteln und dann mit dem Basis-Isomorphismus in die Bahnen des uns eigentlich interessierenden Systems transformieren, wie wir es auch schon in den anderen Fällen getan haben. Betrachten wir die Flusslinie von $\vec{e}_1$, also

$$\beta_{\vec{e}_1}(t) = e^{\gamma t} \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ -\sin \omega t \end{pmatrix}.$$

Für $\gamma = 0$ ist die Bahn die Einheitskreislinie, mit der Winkelgeschwindigkeit $-\omega$ durchlaufen, für $\omega > 0$ also im Uhrzeigersinn. Ist aber der γ nicht Null, so dreht sich der 'Fahrstrahl' der Lösungskurve zwar nach wie vor mit derselben Winkelgeschwindigkeit, aber seine Länge ist nicht mehr konstant 1, sondern $e^{\gamma t}$, und aus dem Kreis wird eine sogenannte **logarithmische Spirale**, die je nach dem Vorzeichen von γ auswärts oder einwärts läuft.



Bahn der Flusslinie des Einheitsvektors $\vec{e}_1$

Weitere Bahnen könnten wir wieder durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor erhalten, in unserem Falle sogar *alle* Bahnen des Phasenportraits. Insbesondere besteht das Phasenportrait für $\gamma = 0$ aus konzentrischen Kreisen.

Für $\gamma \neq 0$ ist das jedoch eine zwar formal korrekte, aber anschaulich etwas in die Irre leitende Betrachtungsweise. Besteht denn das Phasenportrait aus kleinen, größeren und ganz großen Spiralen? Nein, die Orbits sind alle kongruent. Die logarithmischen Spiralen haben nämlich eine ganz besondere Eigenschaft: vergrößert oder verkleinert man eine solche Spirale durch Multiplikation mit einer Konstanten $c \neq 0$, so ist bis auf eine Translation im Parameter t der Effekt derselbe, als hätte man die Spirale um einen gewissen Winkel nur *gedreht*. Die Orbits gehen also alle durch Drehung auseinander hervor!

Man kann das mit Hilfe der Additionstheoreme beweisen, aber sachgerechter ist es, zur Behandlung des reduzierten Systems von Anfang an noch einmal die komplexen Zahlen heranzuziehen. Dieses Mal aber nicht, um statt nur mit reellen auch mit komplexen *Vektoren* zu arbeiten, sondern um die reellen Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ als komplexe

Zahlen $x + iy =: z$ zu lesen, die Ebene $\mathbb{R}^2$ als die komplexe Zahlenebene anzusehen. Dann nimmt nämlich unser reduziertes System, das ja die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \gamma & \omega \\ -\omega & \gamma \end{pmatrix}$$

hat, die besonders einfache Gestalt $\dot{z} = (\gamma - i\omega)z$ an, und man spricht deshalb von einem **komplex eindimensionalen** System. Die Lösungskurve zu einem beliebigen komplexen Anfangswert z_0 ist die durch

$$\beta_{z_0}(t) := z_0 e^{(\gamma - i\omega)t}$$

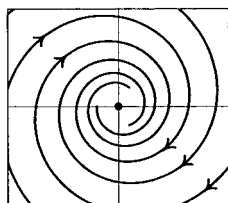
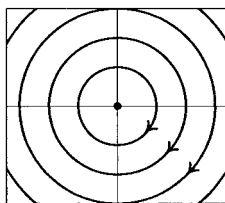
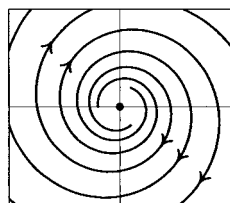
definierte logarithmische Spirale, denn sie erfüllt die Gleichung und hat den richtigen Anfangswert bei $t = 0$.

Drehen wir einmal eine solche Spirale $z_0 e^{(\gamma - i\omega)t}$ um irgend einen Winkel θ . In reellen Koordinaten müssten wir das mittels einer Drehmatrix ausrechnen, aber in komplexer Schreibweise bedeutet das einfach die Multiplikation mit der komplexen Zahl $e^{i\theta}$, und deshalb sehen wir sofort, dass dabei aus der Lösungskurve $z_0 e^{(\gamma - i\omega)t}$ zum Anfangswert z_0 die Lösungskurve $e^{i\theta} z_0 e^{(\gamma - i\omega)t}$ zum Anfangswert $e^{i\theta} z_0$ entsteht.

Insbesondere gehen für $\gamma \neq 0$ die Spiralen des Phasenportraits von $\dot{z} = (\gamma - i\omega)z$ alle durch Drehung aus $e^{(\gamma - i\omega)t}$ und damit auch auseinander hervor, denn sie müssen ja alle den Einheitskreis treffen, also eine komplexe Zahl $e^{i\theta}$ vom Betrage 1 enthalten.

Die oben gemachte Behauptung, eine vergrößerte logarithmische Spirale sei nur eine gedrehte, ist damit implizit auch gezeigt, aber sie ist in der komplexen Schreibweise auch direkt leicht zu verifizieren, denn für $\gamma \neq 0$ lässt sich ein von Null verschiedener reeller oder sogar komplexer Faktor c jedenfalls in der Form $c = e^{\gamma t_0 + i\varphi}$ schreiben, und deshalb ist $c e^{(\gamma - i\omega)t}$ von der Form $e^{i\theta} e^{(\gamma - i\omega)(t+t_0)}$ für ein geeignetes $\theta \in \mathbb{R}$.

Jedenfalls übersehen wir nun die Phasenportraits der komplex eindimensionalen Systeme $\dot{z} = (\gamma - i\omega)z$ mit $\omega \neq 0$:

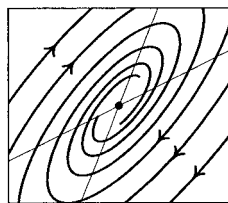
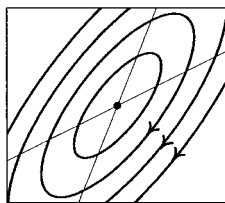
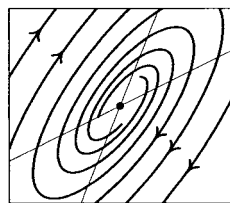
 $\gamma < 0$  $\gamma = 0$  $\gamma > 0$

Phasenportrait von $\dot{z} = (\gamma - i\omega)z$ für $\omega > 0$

Durch Transformation mit dem Basis-Isomorphismus der durch

$$A(\vec{u} + i\vec{v}) = (\gamma + i\omega)(\vec{u} + i\vec{v})$$

bestimmten Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ von $\mathbb{R}^2$ erhalten wir daraus das Phasenportrait von $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ selbst.

 $\gamma < 0$  $\gamma = 0$  $\gamma > 0$

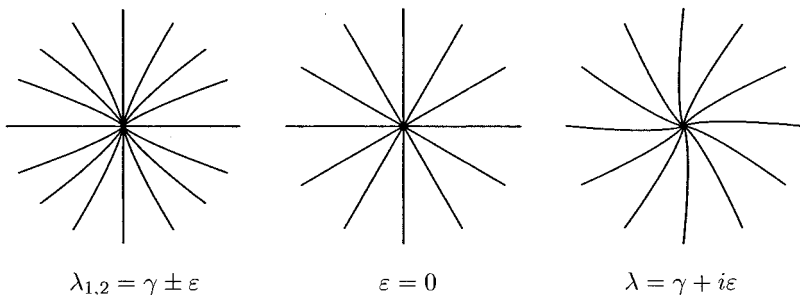
Phasenportrait von $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ im 3. Fall (keine reellen Eigenwerte)

Beachten Sie aber, dass der *Drehsinn* des Phasenportraits nicht allein aus den komplexen Eigenwerten von A vorhergesagt werden kann, sondern von der Händigkeit der Basis $(\vec{u}, \vec{v})$ abhängt. Ist diese Basis positiv orientiert, so dreht sich der Fahrstrahl der Lösungen mit wachsendem t im Uhrzeigersinn, sonst anders herum, beides kann vorkommen.

Das Vorzeichen von γ bestimmt, ob die Spiralen auswärts oder einwärts laufen. Der Imaginärteil der Eigenwerte $\gamma \pm i\omega$ enthält aber natürlich gar keine Vorzeicheninformation.

Vergleichen wir zum Schluss einmal für $\gamma \neq 0$ und ein kleines $\varepsilon > 0$ das entkoppelte System mit den Eigenwerten $\lambda_1 = \gamma - \varepsilon$ und $\lambda_2 = \gamma + \varepsilon$ und das komplex eindimensionale System $\dot{z} = (\gamma - i\varepsilon)z$.

Lassen wir das ε bei festgehaltenem γ gegen Null gehen, so sehen wir, wie sie beide auf ihre Weise in das System $\ddot{x} = \gamma \dot{x}$ übergehen, bei dem die Orbits Halbstrahlen sind.



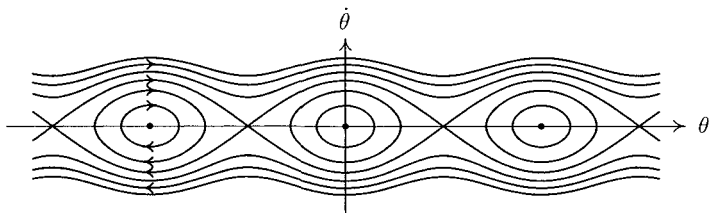
Beachten Sie aber, dass für $\varepsilon \neq 0$ die Bahnen des komplexen Systems, im Unterschied zu denen des entkoppelten, unendlich oft den Nullpunkt umlaufen — wenn es auch in der Figur nicht zu sehen ist, weil der mit den Augen verfolgte Abstand zum Nullpunkt nach einem Umlauf längst zu groß bzw. beim Einwärtslaufen zu klein geworden ist, als dass er in der Skizze noch darstellbar wäre.

15.5 Linearisierung

Wir haben jetzt sehr ausführlich über die zweidimensionalen linearen DGL-Systeme mit konstanten Koeffizienten gesprochen, und das ist auch ein wichtiges Thema, denn erstens kommen diese Systeme einfach direkt vor, zweitens führen die linearen Gleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten auf solche Systeme, und drittens erleben Sie dabei was es heißt, in einem nichttrivialen Teilbereich der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen einen *vollständigen* Überblick über sämtliche möglichen Phänomene zu haben, was ein wesentlicher intellektueller Schritt über das bloße Kochrezeptdenken hinaus ist.

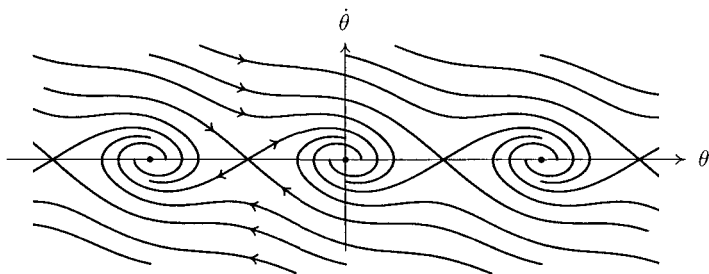
Außerdem aber zeigen die linearen Systeme modellhaft, was bei *nichtlinearen* Systemen in der Nähe stationärer Punkte passieren kann, und davon soll jetzt noch kurz die Rede sein. Sie werden die linearen Phasenportraits, leicht deformiert, in den Phasenportraits

nichtlinearer Systeme in der Nähe stationärer Punkte wiedererkennen, zum Beispiel im Phasenportrait des ungedämpften



Phasenportrait der Pendelgleichung $\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$

und des gedämpften Pendels:



Phasenportrait der Pendelgleichung mit Dämpfungsterm, $\ddot{\theta} + \kappa \dot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$

Die linearen Phasenportraits, an die Sie sich dabei erinnert fühlen, sind natürlich die der linearen Approximation, also der Jacobi-Matrix des Vektorfeldes $\vec{v}$ an dem jeweiligen stationären Punkt:

Definition Ist p ein stationärer Punkt eines C^1 -Vektorfeldes $\vec{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$, also $\vec{v}(p) = 0$, und ist $A := J_{\vec{v}}(p)$ die Jacobi-Matrix von $\vec{v}$ bei p , so heißt das lineare System $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ die **Linearisierung** des nichtlinearen Systems $\dot{\vec{x}} = \vec{v}(\vec{x})$ bei p . $\square$

Was haben wir davon? Nun, es ist ja immer nett, in einer komplizierten neuen Situation einfache wohlbekannte Züge wiederzufinden, an denen man sich orientieren kann, und ich darf wohl sagen,

dass Sie die Phasenportraits nichtlinearer zweidimensionaler autonomer DGL-Systeme jetzt schon mit mehr *Verständnis* anschauen werden.

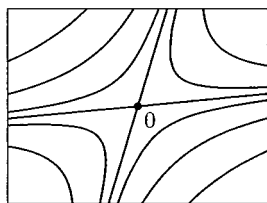
Noch wichtiger wird die Linearisierung aber, wenn Sie Ihr nicht-lineares Phasenportrait zuerst einmal — gar nicht sehen, weil Sie zwar wissen, wo die stationären Punkte sind, aber keine Ahnung haben, wie Sie das System lösen sollen, weil es viel zu kompliziert ist. Dann rechnen Sie die Jacobi-Matrix aus:

$$a_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(p),$$

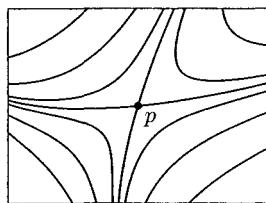
das ist einfach, bestimmen die Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2 - \det A}$$

des charakteristischen Polynoms $P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, das ist auch einfach, und darin steckt schon viel Information über das linearisierte System. Wenn Sie noch mehr wollen, suchen Sie auch noch die Eigenvektoren $\vec{u}, \vec{v}$ bzw. $\vec{u} + i\vec{v}$ von A auf und verschaffen sich wie beschrieben das Phasenportrait der Linearisierung in der Hoffnung, das nichtlineare Sie eigentlich interessierende System $\dot{\vec{x}} = \vec{v}(\vec{x})$ werde sich nahe p zwar nicht gerade genau so, aber doch ähnlich verhalten.



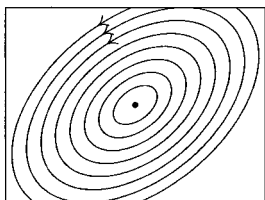
Linear



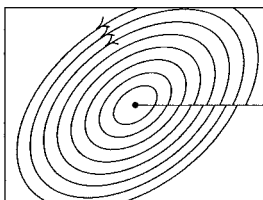
Nichtlinear

Für heuristische Überlegungen ist das auch eine ganz gute, erlaubte Vorstellung. Die genauen mathematischen Aussagen darüber, welche Information die Linearisierung über das wirkliche System enthält, die *Linearisierungssätze*,² sind allerdings subtil und haben mancherlei Vorbehalte. Zum Beispiel dürfen Sie nicht erwarten,

dass Sie eine Familie geschlossener Orbits im linearen System auch im wirklichen System wiederfinden müssen, die “höheren Terme”, die bei der Linearisierung vernachlässigt werden, können das sich Schließen der Bahnen vereiteln.

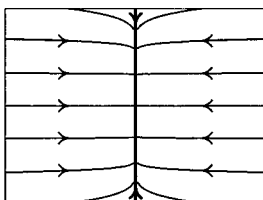
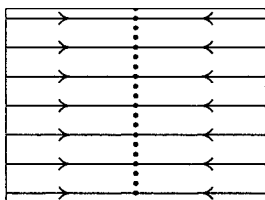


Linearisierung



Tatsächliches System

Auch eine Linie stationärer Punkte ist anfällig gegenüber den Störungen höherer Ordnung, nehmen Sie $\dot{x} = -x$, $\dot{y} = -y^3$ bei $p = 0$ als ein einfaches Beispiel dafür.



Linearisierung $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix}$

Tatsächliches System $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y^3 \end{pmatrix}$

Allgemein kann man sich merken: Vorsicht, wenn das charakteristische Polynom der Linearisierung Nullstellen mit verschwindendem Realteil hat (Null oder rein imaginär). Sind dagegen die Realteile aller Eigenwerte ungleich Null, so übertragen sich insbesondere die Stabilitätseigenschaften der Null-Lösung des linearen Systems, die sich an den Vorzeichen der Realteile ablesen lassen, auf die stationäre Lösung des wirklichen Systems.

Das sind interessante und für die Anwendungen wichtige Themen, aber ich muss mich doch auf den Standpunkt stellen, dass

Ihnen als Erstsemestern diese Kenntnisse eigentlich noch gar nicht zustehen und muss die Theorie der Differentialgleichungen jetzt verlassen, andere Gebiete verlangen auch ihr Recht.

15.6 Übungsaufgaben

Aufgabe R15.1: Untersuchen Sie die zweidimensionale Bewegung eines Teilchens im gekreuzten konstanten elektrischen und magnetischen Feld (siehe R5.3) beschrieben durch die Bewegungsgleichungen: $\ddot{x} = E + B\dot{y}$, $\ddot{y} = -B\dot{x}$, indem Sie als Variablen $x_1 = B\dot{x}$ und $x_2 = E + B\dot{y}$ einführen. Bestimmen Sie für das System, das sich für $\vec{x} := (x_1, x_2)$ ergibt, die allgemeine Lösung und skizzieren Sie das Phasenportrait. Berechnen Sie aus dieser allgemeinen Lösung dann die allgemeine Lösung des ursprünglichen Systems der Bewegungsgleichungen.

Aufgabe R15.2: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung und skizzieren Sie die Phasenportraits der Systeme

$$\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = 5x_1 - 4x_2 & \text{und} \quad \dot{x}_1 = 5x_1 - 4x_2 \\ \dot{x}_2 = 8x_1 - 7x_2 & \dot{x}_2 = 10x_1 - 7x_2 \end{array}$$

Aufgabe R15.3: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung und skizzieren Sie das Phasenportrait von

$$\begin{array}{ll} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + 3x_2 \end{array}$$

Aufgabe R15.4: a) Schreiben Sie die Bewegungsgleichung für ein Pendel im Schwerfeld: $\ddot{x} + \sin x = 0$ in ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen 1. Ordnung um und skizzieren Sie das Phasenportrait. Bestimmen Sie die stationären Punkte.

b) Linearisieren Sie das System an den stationären Punkten und stellen Sie fest, von welchem Typ das linearisierte System jeweils ist. c) Welche physikalische Größe ist konstant auf den Bahnen (vergleiche T14.6)?

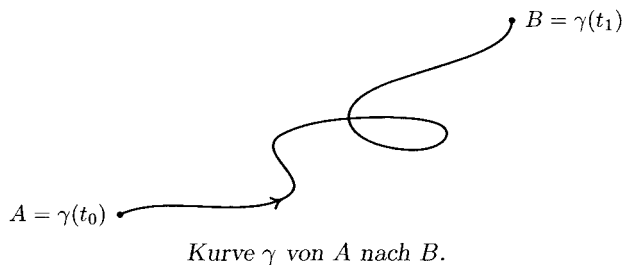
Aufgabe R15.5: Die Gleichung für die Bewegung eines Teilchens auf einem Waschbrett (periodisches Potential) mit Neigung und

Reibung (oder Pendel mit konstantem Drehmoment und Reibung) ist $\ddot{x} + \frac{2}{\tau}\dot{x} + \sin x = N$ mit $\tau > 0, N > 0$. Untersuchen Sie die Linearisierungen des zugehörigen Systems erster Ordnung an den stationären Punkten.

16 --- Linienintegrale ---

16.1 Kurven

Wir betrachten C^1 -Kurven $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow M$, die in einem offenen Bereich $M \subset \mathbb{R}^n$ verlaufen.



Wir wollen uns wegen der Linien- oder Kurvenintegrale ein paar Begriffe und Sprechweisen über Kurven zurechtlegen. Unter der **Länge** $\ell(\gamma)$ der Kurve wollen wir das Integral über die Geschwindigkeit $\|\dot{\gamma}(t)\|$ verstehen, also

$$\ell(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\gamma}(t)\| dt.$$

Anschaulich ist das die während der Fahrt γ zurückgelegte Wegstrecke, abzulesen am Kilometerzähler und nicht zu verwechseln

mit der Länge der Bahn, die vielleicht eine nur 4.1km lange Rennstrecke ist, auf der Sie aber viele Runden gefahren sind. Die durch

$$s : [t_0, t_1] \rightarrow [0, \ell(\gamma)] , t \mapsto \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau$$

gegebene Funktion s nennt man die Bogenlängenfunktion oder kurz die **Bogenlänge längs** γ . Bei Bedarf kann man aber auch

$$[t_0, t_1] \rightarrow [s_0, s_0 + \ell(\gamma)] , t \mapsto s_0 + \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau$$

die von s_0 ab gemessene Bogenlänge nennen und mit s bezeichnen. Der Buchstabe s zur Bezeichnung der Bogenlänge ist übrigens nicht von mir willkürlich gewählt, sondern eine feststehende traditionelle Notation.

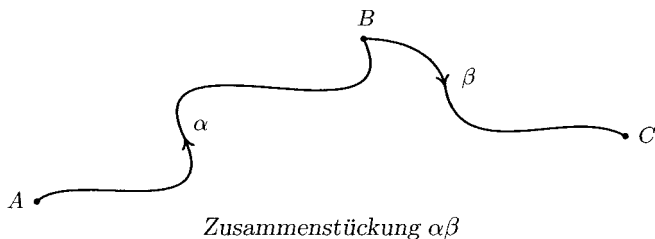
Eine C^1 -Kurve heißt bekanntlich **regulär**, wenn ihre Geschwindigkeit überall ungleich Null ist. Wegen

$$\dot{s}(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(\tau)\| d\tau = \|\dot{\gamma}(t)\|$$

hat die Bogenlänge $s : [t_0, t_1] \rightarrow [0, \ell]$ (bzw. $[s_0, s_1]$) einer regulären Kurve überall positive Ableitung und ist daher umkehrbar. Die Umkehrung $[s_0, s_1] \rightarrow [t_0, t_1]$ drückt also dann den Parameter t durch die Bogenlänge aus, $t = t(s)$, und geht man von $t \mapsto \gamma(t)$ zu der Zusammensetzung $s \mapsto \gamma(t(s))$ über, so sagt man, man habe die Kurve *auf Bogenlänge umparametrisiert*. Diese neue Kurve hat dann die Geschwindigkeit $\|\frac{d}{ds}\gamma(t(s))\| = 1$ nach der Ketten- und Umkehrregel.

War die Kurve aber schon vorher eine *Kurve mit Einheitsgeschwindigkeit*, wie man auch sagt, wenn die Geschwindigkeit konstant Eins ist, dann ist ja der ursprüngliche Parameter t bereits die (von t_0 an gemessene) Bogenlänge und man braucht sie nicht erst auf Bogenlänge umzuparametrisieren. Bei Kurven mit Einheitsgeschwindigkeit benutzt man deshalb meist schon von vornherein den Buchstaben s für den Kurvenparameter.

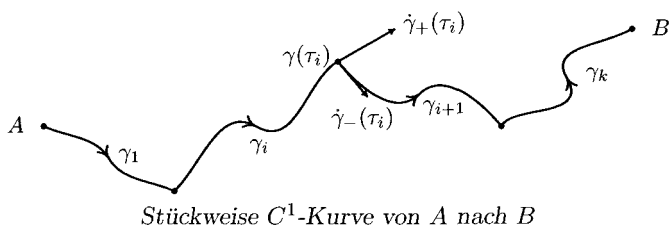
Mit C^1 -Kurven alleine kommt man beim Umgang mit Kurvenintegralen nicht aus, und zwar weil man hin und wieder Anlass hat, eine Kurve von A nach B mit einer anderen von B nach C zu einer Kurve von A nach C zusammenzusetzen, die dann im Allgemeinen bei B einen Knick haben wird.



Definition: Unter einer **stückweisen** C^1 -Kurve wollen wir eine stetige Kurve $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow M$ verstehen, für die sich eine Unterteilung

$$t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k = t_1$$

des Definitionsintervalles finden lässt, so dass für $i = 1, \dots, k$ die einzelnen Kurvenstücke $\gamma_i := \gamma|[\tau_{i-1}, \tau_i]$ C^1 -Kurven sind. $\square$

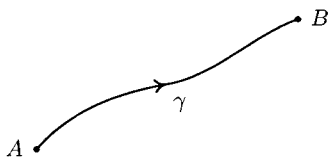
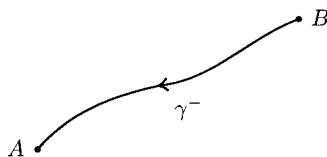


An den Knickstellen τ_i brauchen die beiden halbseitigen Ableitungen $\dot{\gamma}_{\pm}(\tau_i)$ der Kurve, gewissermaßen der Ankunfts- und der Abfahrtsgeschwindigkeitsvektor, nicht übereinzustimmen.

Notation und Sprechweise: Sind $\alpha : [t_0, t_1] \rightarrow M$ und $\beta : [t'_0, t'_1] \rightarrow M$ zwei stückweise C^1 -Kurven mit $\alpha(t_1) = \beta(t'_0)$, so definieren wir deren **Zusammenstückung** $\alpha\beta : [t_0, t_1 + (t'_1 - t'_0)] \rightarrow M$ durch

$$(\alpha\beta)(t) := \begin{cases} \alpha(t) & \text{für } t_0 \leq t \leq t_1 \\ \beta(t'_0 + (t - t_1)) & \text{für } t_1 \leq t \leq t_1 + (t'_1 - t'_0). \end{cases}$$

Ferner definieren wir zu $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow M$ die sogenannte **rückwärts durchlaufene** oder **inverse** Kurve $\gamma^- : [t_0, t_1] \rightarrow M$ durch $\gamma^-(t) := \gamma(t_0 + t_1 - t)$. $\square$

Kurve γ Inverse Kurve γ^-

Schließlich heißt eine Kurve **geschlossen**, wenn ihr Anfangspunkt auch ihr Endpunkt ist. Sind zum Beispiel α und β zwei Kurven von A nach B , so ist die Zusammenstückung γ von α mit β^- geschlossen, weil sie bei A beginnt und endet.

16.2 Linienintegrale in freier Wildbahn

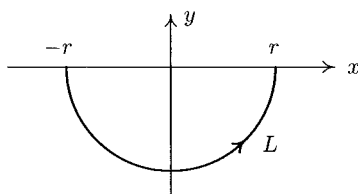
Die Integrale, um die es hier gehen soll, begegnen Ihnen außerhalb der mathematischen Lehrbuchliteratur im Wesentlichen in einer der drei Formen

$$\int_{\gamma} F(\vec{r}) ds \quad \text{oder} \quad \int_{\gamma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad \text{oder} \quad \int_{\gamma} \vec{F}(\vec{r}) \times d\vec{r}.$$

Dabei ist F eine Funktion bzw. $\vec{F}$ ein Vektorfeld auf einem Bereich $M \subset \mathbb{R}^n$ oder spezieller $M \subset \mathbb{R}^3$, der zwar nicht genannt wird, den Sie sich aber denken können als den natürlichen Definitionsbereich, auf dem der Term lesbar ist, durch den Sie F oder $\vec{F}$ beschreiben finden. Die Variablen, von denen F und $\vec{F}$ abhängen, würden wir vielleicht (x, y, z) oder $(x_1, \dots, x_n)$ oder $\vec{x}$ nennen wollen, als Bezeichnung für die “Ortsvariablen” in M . In der physikalischen Lehrbuchliteratur wird für diesen *Ortsvektor* aber oft $\vec{r}$ geschrieben und insbesondere immer dann, wenn in den Linienintegralen die Notation $d\vec{r}$ auftaucht. Wird die Variable $\vec{x}$ genannt, so sollte im Linienintegral auch $d\vec{x}$ stehen.

Andere Notationen sind auch im Gebrauch, etwa $d\vec{s}$ statt $d\vec{r}$, wobei der Ortsvektor weiterhin $\vec{r}$ heißt. Das $d\vec{s}$ bedeutet dann zwar nichts anderes als $d\vec{r}$, erinnert aber daran, dass es sich um ein *Linienintegral* handeln soll, was manchmal hilfreich ist. Auch $d\vec{\ell}$ statt $d\vec{s}$ und $d\vec{s}$ bzw. $d\vec{r}$ kann man sehen. Jedenfalls sollte es Ihnen gelingen, einen der obigen drei Integraltypen wiederzuerkennen, bei denen $\vec{r}$ den Ortsvektor und s die Bogenlänge der Kurve bedeuten.

Ein weiteres Leseproblem stellt die Kurve γ dar, längs der integriert werden soll, der sogenannte *Integrationsweg*. Eine fix und fertige Kurve in der Form $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow M$, wie ich sie Ihnen in der Notation $\int_\gamma$ einstweilen als gegeben vorgegaukelt habe, werden Sie im wirklichen Leben meistens nicht antreffen, eher nur einen Hinweis, welche Kurve Sie nehmen sollen oder dürfen. Zum Beispiel kann es sein, dass die gerichtete *Bahn* der Kurve angegeben ist, etwa der untere Halbkreisbogen L vom Radius r , im mathematisch positiven Sinne durchlaufen:



Mögliche Angabe eines Integrationsweges

Dann ist $\int_L \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ so gemeint, dass Sie eine Kurve zur Integration wählen dürfen, die L in der angedeuteten Weise durchläuft, etwa $\gamma : [0, \pi] \rightarrow L, t \mapsto -r(\cos t, \sin t)$.

Oder Sie lesen z.B. $\int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$. Dann müssen Sie aus dem Text schon verstanden haben, ob Sie die gerade Strecke von A nach B nehmen sollen, also $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto A + t(B - A)$, oder ob Sie *irgend* eine stückweise C^1 -Kurve von A nach B im Definitionsbereich von $\vec{F}$ nehmen dürfen oder ob es etwa noch anders gemeint ist.

Oder es steht nur $\int \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ und scheinbar überhaupt keine Angabe zum Integrationsweg da. Dann dürfen Sie auch nicht ver-

zweifeln, denn dann soll entweder etwas gesagt werden, was für jeden Integrationsweg zutrifft oder, im Gegenteil, ist im Text schon die ganze Zeit von einer bestimmten Kurve die Rede gewesen, und der Autor verlässt sich darauf, dass jedem Leser klar ist, dass über diesen Weg auch zu integrieren ist.

Haben Sie diese Lese-Klippen alle glücklich gemeistert und wollen nun das Linienintegral *ausrechnen*, dann haben Sie Folgendes zu tun. Schreiben Sie den Weg $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow M$ in der anonymen Notation $\vec{r} = \vec{r}(t)$, setzen ihn in den Integranden ein und erweitern mit $dt/dt = 1$, so:

$$\int_{\gamma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} := \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot d\vec{r}(t) = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}(t)}{dt} dt,$$

lesen $d\vec{r}(t)/dt$ als $\dot{\vec{r}}(t)$ und erhalten

$$\int_{\gamma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} := \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt \in \mathbb{R}$$

was nun ein ganz gewöhnliches Integral ist. In der γ -Notation wäre es

$$\int_{\gamma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} := \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

gewesen. Analog natürlich für $\vec{F}(\vec{r}) \times d\vec{r}$ als Integranden:

$$\int_{\gamma} \vec{F}(\vec{r}) \times d\vec{r} := \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\vec{r}(t)) \times \dot{\vec{r}}(t) dt \in \mathbb{R}^3.$$

Hier ist der Integrand vektorwertig, also auch das Integral, komponentenweise gebildet.

Ähnlich beim Bogenlängen-Integral:

$$\int_{\gamma} F(\vec{r}) ds := \int_{t_0}^{t_1} F(\vec{r}(t)) ds(t) = \int_{t_0}^{t_1} F(\vec{r}(t)) \frac{ds(t)}{dt} dt,$$

und weil $ds(t)/dt = \|\dot{\vec{r}}(t)\|$ ist:

$$= \int_{t_0}^{t_1} F(\vec{r}(t)) \|\dot{\vec{r}}(t)\| dt = \int_{t_0}^{t_1} F(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt,$$

wenn wir $\gamma(t)$ statt $\vec{r}(t)$ schreiben. Und wenn die Kurve schon selbst durch ihre Bogenlänge parametrisiert ist, dann steht

$$\int_{\gamma} \vec{F}(\vec{r}) ds = \int_{s_0}^{s_1} \vec{F}(\vec{r}(s)) ds,$$

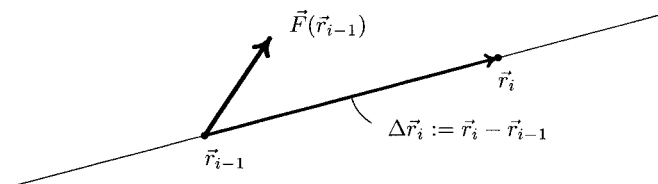
eben gleich als gewöhnliches Integral da. So ist das alles gemeint.

Ist der Weg nur stückweise C^1 , dann ist an den Knickstellen die Ableitung nicht eindeutig erklärt und das Rezept insofern nicht ausführbar, aber natürlich ist dann

$$\int_{\gamma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} := \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

zu verstehen.

Der physikalische Sinn eines solchen Linienintegrals erschließt sich oft am besten durch eine infinitesimale Betrachtung. Unterteilen Sie das Integrationsintervall $[t_0, t_1]$ sehr fein und betrachten die Kurve unter dem Mikroskop, um den Beitrag so eines winzigen Kurvenabschnitts zum Gesamtintegral zu verstehen.



$\vec{F}(\vec{r}_{i-1}) \cdot \Delta \vec{r}_i$ als der physikalisch begründete Beitrag des Kurvenabschnitts zum Gesamtintegral $\int_{\gamma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$

Dann sieht die Kurve im Kleinen wie ihre eigene lineare Approximation, wie eine Gerade aus, $\vec{F}$ variiert auf so einem kleinen Abschnitt fast gar nicht: die Situation ist physikalisch einfacher geworden. Ist $\vec{F}(\vec{r}_{i-1}) \cdot \Delta \vec{r}_i$ physikalisch das, was Sie als Beitrag zum Gesamtintegral haben wollen? Dann wird also das gewünschte Integral durch $\sum_{i=1}^N \vec{F}(\vec{r}_{i-1}) \cdot \Delta \vec{r}_i$ approximiert, und wegen $\Delta \vec{r}_i \approx \dot{\vec{r}}(\tau_{i-1}) \Delta \tau_i$ im Sinne der linearen Approximation der Kurve geht $\sum_{i=1}^N \vec{F}(\vec{r}_{i-1}) \cdot \Delta \vec{r}_i$ im Limes immer feinerer Unterteilung nach der

Definition des Riemann-Integrals wirklich in $\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \dot{\vec{r}}(t) dt$ über.

Sie sollten diese infinitesimale Sicht des Linienintegrals als

$$\int_{\gamma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \approx \sum_{i=1}^N \vec{F}(\vec{r}_{i-1}) \cdot \Delta \vec{r}_i$$

auch kultivieren und nicht etwa das Linienintegral erst dann intuitiv akzeptieren, wenn es in ein Integral der Form $\int_{t_0}^{t_1} \dots dt$ verwandelt ist. Die Approximation schließt den physikalischen Sinn auf und ist auch zu heuristischen mathematischen Überlegungen zu gebrauchen.

Die *Beweise* der mathematischen Theorie der Linienintegrale so zu führen, nämlich die Unterteilungs- und Infinitesimalheuristik durch exaktes Ausführen der Limesprozesse in strenge Schlüsse zu verwandeln, wäre aber keine gute Idee.

Na wenn schon, denken Sie vielleicht. Wozu brauche ich eine ‘mathematische Theorie der Linienintegrale’? Wenn ich meine Linienintegrale ausrechnen kann und physikalisch verstehe, dann bin ich ganz zufrieden.

Das möchte eine etwas vorschnelle Zufriedenheit sein. Das Denken lässt sich nicht immer durch Rechnen ersetzen. Wenn sich zum Beispiel ein konkretes Problem auf die Frage zuspitzt, ob für ein gegebenes konkretes Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$ das Linienintegral $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ immer nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt, nicht aber vom Kurvenverlauf?



Immer das gleiche Integral?

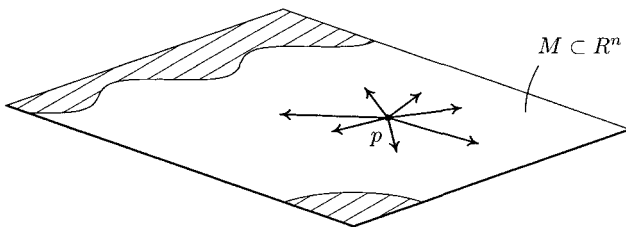
Wie wollen Sie das durch Ausrechnen verifizieren? Wollen Sie das Integral für *alle* Kurven von A nach B mit dem Computer ausrechnen? Also.

16.3 Linienintegrale über 1-Formen

Sei wieder $M \subset \mathbb{R}^n$ offen. Auf M sei eine stetige $m \times n$ -Matrixwertige Funktion, also eine stetige Abbildung $A : M \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ gegeben. Dann haben wir an jedem Punkt $p \in M$ eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} A(p) : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \vec{v} &\longmapsto A(p)\vec{v}. \end{aligned}$$

und wir wollen uns anschaulich vorstellen, dass die Vektoren $\vec{v}$, auf die wir die Matrix $A(p)$ anzuwenden gedenken, die am Punkte p “angebracht” sind,



Die Vektoren $\vec{v}$, für die $A(p)$ zuständig sein soll

wenn das auch rechnerisch nichts zu bedeuten hat, eine n -Spalte ist eben eine n -Spalte, man merkt ihr nicht an, ob sie irgendwo angebracht ist.

So ein $A : M \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ nennt man dann eine vektorwertige, genauer $\mathbb{R}^m$ -wertige stetige 1-Form auf M . Nur gebraucht man üblicherweise eine etwas andere Notation: weil die Variable p vielleicht mit dem Vektor $\vec{v}$ um den Platz neben dem A streiten könnte, schreibt man sie als Index, also A_p statt $A(p)$. Außerdem ist es üblich, die 1-Formen, wie auch später die k -Formen der mathematischen Vektoranalysis, eher mit den griechischen Buchstaben ω , η , ζ und wohl auch einmal α , β , ... zu bezeichnen.

Definition: Unter einer stetigen $\mathbb{R}^m$ -wertigen 1-Form ω auf einer offenen Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ verstehen wir eine stetige Abbildung $\omega : M \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$, eine Abbildung also, die jedem $p \in M$ eine lineare

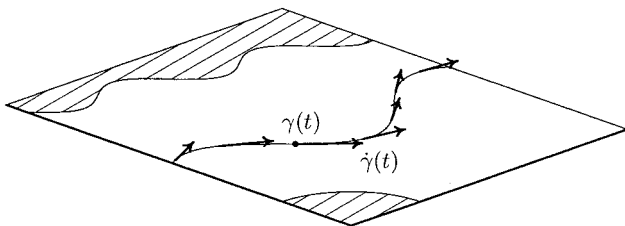
Abbildung, notiert als

$$\omega_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

zuordnet. Im Falle $m = 1$ spricht man von einer **reellwertigen 1-Form**. Ist ferner $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow M$ eine C^1 -Kurve, so heißt

$$\int_{\gamma} \omega := \int_{t_0}^{t_1} \omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt$$

das **Linienintegral** über ω längs γ . □



ω wirkt auf den Vektor, den es jeweils vorfindet,
daher die Formel $\omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))$

Ist ω eine $\mathbb{R}^m$ -wertige 1-Form, so ist durch $t \mapsto \omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))$ also eine $\mathbb{R}^m$ -wertige Funktion auf $[t_0, t_1]$ gegeben, und deshalb ist auch $\int_{\gamma} \omega \in \mathbb{R}^m$, im Falle $m = 1$ also eine Zahl.

Analog für stückweise C^1 -Kurven, es ist dann natürlich

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \omega$$

zu verstehen, insbesondere $\int_{\alpha\beta} \omega = \int_{\alpha} \omega + \int_{\beta} \omega$ beim Anstücken.

Lemma 1: *Linienintegrale über 1-Formen ändern sich nicht, wenn der Integrationsweg mit anderer Geschwindigkeit durchlaufen wird.*

BEWEIS: Genauer soll das heißen: ist $\varphi : [u_0, u_1] \rightarrow [t_0, t_1]$ eine C^1 -Funktion mit $\varphi(u_0) = t_0$ und $\varphi(u_1) = t_1$ und $\gamma : [t_0, t_1] \rightarrow M$ eine C^1 -Kurve, so gilt stets

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma \circ \varphi} \omega.$$

Das folgt aus der Linearität, ja schon aus der Homogenität der einzelnen ω_p , also aus der Eigenschaft $\omega_p(\lambda \vec{v}) = \lambda \omega_p(\vec{v})$. Denn nach der Kettenregel ist $\frac{d}{du} \gamma(\varphi(u)) = \dot{\gamma}(\varphi(u)) \varphi'(u)$ und wegen der Homogenität von $\omega_{\gamma(\varphi(u))}$ also

$$\omega_{\gamma(\varphi(u))} \left(\frac{d}{du} \gamma(\varphi(u)) \right) = \omega_{\gamma(\varphi(u))} (\dot{\gamma}(\varphi(u))) \varphi'(u).$$

Bezeichnen wir den Integranden für $\int_{\gamma} \omega$ zur Abkürzung mit $f(t) := \omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))$, so ist der Integrand $\omega_{\gamma(\varphi(u))}(\frac{d}{du} \gamma(\varphi(u)))$ für $\int_{\gamma \circ \varphi} \omega$ also nichts anderes als $f(\varphi(u)) \varphi'(u)$ und daher

$$\int_{\gamma \circ \varphi} \omega = \int_{u_0}^{u_1} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du = \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt = \int_{\gamma} \omega$$

nach der Substitutionsregel. $\square$

Hätten wir statt $\varphi(u_0) = t_0$ und $\varphi(u_1) = t_1$ aber $\varphi(u_0) = t_1$ und $\varphi(u_1) = t_0$ vorausgesetzt, so hätten wir bei sonst gleicher Argumentation $\int_{t_1}^{t_0} f(t) dt = - \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt$ für $\int_{\gamma \circ \varphi} \omega$ erhalten, also:

Lemma 2: Wird der Integrationsweg rückwärts durchlaufen, so kehrt das Linienintegral über eine 1-Form das Vorzeichen um:

$$\int_{\gamma^-} \omega = - \int_{\gamma} \omega.$$

$\square$

Wichtige, wenn auch sehr spezielle *Beispiele* von 1-Formen sind die Differentiale von C^1 -Funktionen $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ oder allgemeiner von C^1 -Abbildungen $\vec{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^m$. Für das einzelne $p \in M$ ist das Differential $d\vec{f}_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, beschrieben durch die Jacobimatrix, und so ist

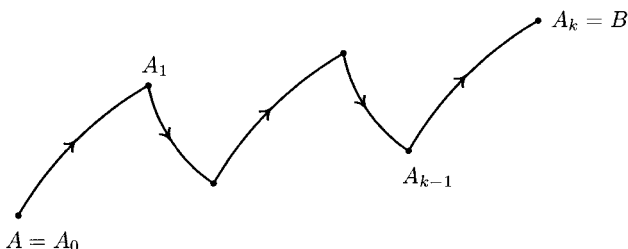
$$\begin{aligned} d\vec{f}: M &\longrightarrow \mathbb{R}^{m \times n} \\ p &\longmapsto d\vec{f}_p \end{aligned}$$

eine $\mathbb{R}^m$ -wertige 1-Form auf M . Die Linienintegrale dieser speziellen 1-Formen sind leicht zu bestimmen.

Lemma 3: Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\vec{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine C^1 -Abbildung, so gilt

$$\int_{\gamma} d\vec{f} = \vec{f}(B) - \vec{f}(A)$$

für jede stückweise C^1 -Kurve γ in M von A nach B .



Stückweise C^1 -Kurve von $A =: A_0$ nach $B =: A_k$ mit Knickpunkten $A_1, \dots, A_{k-1}$.

BEWEIS: Ist zunächst $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow M$ eine C^1 -Kurve, so ist nach der Kettenregel $\frac{d}{dt}\vec{f}(\gamma(t)) = d\vec{f}_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t))$ und daher ist $\vec{f}(\gamma(t))$ Stammfunktion des Integranden für

$$\int_{\gamma} d\vec{f} = \int_{t_0}^{t_1} d\vec{f}_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) dt = [\vec{f}(\gamma(t))]_{t_0}^{t_1} = \vec{f}(\gamma(t_1)) - \vec{f}(\gamma(t_0)).$$

Ist der Integrationsweg nur *stückweise* C^1 , so erhalten wir trotzdem dasselbe Ergebnis, denn die Knickstellenwerte heben sich in

$$\int_{\gamma} d\vec{f} = \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} d\vec{f} = \sum_{i=1}^k \vec{f}(\gamma(A_i)) - \vec{f}(\gamma(A_{i-1}))$$

gegenseitig auf. □

Ist $\gamma: [t_0, t_1] \rightarrow M$ geschlossen, d.h. $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$, so schreibt man statt $\int_{\gamma} \omega$ gern auch $\oint_{\gamma} \omega$, um die Geschlossenheit von γ zu

bezeichnen, ohne sie sonst erwähnen zu müssen. In dieser Notation erhält man aus Lemma 3 das

Korollar: Für alle C^1 -Abbildungen $\vec{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ gilt stets

$$\oint_{\gamma} d\vec{f} = 0.$$

□

16.4 Vektorfelder und 1-Formen

In den physikalischen Lehrbüchern werden Sie Wort und Notation “1-Form ω ” eher nicht finden, die Sache aber schon. Eine besonders einfache $\mathbb{R}^n$ -wertige 1-Form auf dem $\mathbb{R}^n$ oder einer offenen Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist das Differential $d\vec{r}$ der Ortsfunktion oder des ‘Ortsvektors’ $\vec{r}$, der als Abbildung $M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ja nichts anderes als die Identität oder Inklusion $\vec{r} \mapsto \vec{r}$ bezeichnet.

Notiz: Die 1-Form $d\vec{r}$ auf offenem $M \subset \mathbb{R}^n$ ist an jedem Punkte einfach die Einheitsmatrix: $d\vec{r}_p = E$, als lineare Abbildung $d\vec{r}_p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ also die Identität. □

Damit ist aber auch klar, wie $\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ als reellwertige bzw. $\vec{F}(\vec{r}) \times d\vec{r}$ im Falle $n = 3$ als $\mathbb{R}^3$ -wertige 1-Formen zu lesen sind, und ein Vergleich der im Abschnitt 16.2 gegebenen Rechenanleitung mit der Linienintegraldefinition für 1-Formen zeigt sofort, dass

$$\int_{\gamma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} := \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt$$

in beiden Interpretationen gilt, und ebenso für $\int_{\gamma} \vec{F}(\vec{r}) \times d\vec{r}$. Diese beiden Typen von Linienintegralen der physikalischen Lehrbuchliteratur sind also auch leicht als Linienintegrale über 1-Formen zu erkennen, und analog können Sie in vielen anderen Fällen verfahren: versuchen Sie das Differentialsymbol d im Linienintegral, das vielleicht aus einer ‘infinitesimalen’ Herleitung stammen mag, als Zeichen für das richtige Differential einer Funktion oder Abbildung

zu lesen und so das Integral als Linienintegral über eine 1-Form zu verstehen.

Auf eine Ausnahme muss ich Sie dabei aber gleich hinweisen, sie betrifft das sogenannte *skalare Linienelement* ds . Dieses ist nicht als Differential oder 1-Form gemeint, vielmehr kann man ds , wenn man es als selbständiges Objekt auffassen will, an jeder Stelle als die Wurzel aus einer quadratischen Form, nämlich aus

$$\begin{aligned} ds^2 = dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ \vec{v} &\longmapsto \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

interpretieren. Deshalb kehren die Linienintegrale mit ds auch nicht das Vorzeichen um, wenn der Integrationsweg rückwärts durchlaufen wird:

$$\int_{\gamma^-} F(\vec{r}) ds = \int_{\gamma} F(\vec{r}) ds.$$

Das ist ein wichtiger Unterschied zu den Linienintegralen über 1-Formen, wie sie zum Beispiel mit $d\vec{r}$ oder allgemeiner mit $d\vec{f}$ gebildet werden und denen wir uns jetzt wieder zuwenden.

Sprechweise: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir wollen sagen, eine reellwertige 1-Form $\omega : M \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times n}$ und ein Vektorfeld $\vec{F} : M \rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n \times 1}$ **gehören zueinander**, wenn sie die gleichen Komponenten haben, sich also nur durch ihre Schreibweise als Zeile bzw. Spalte unterscheiden. $\square$

Ausgedrückt mit dem Transponieren aus der Matrizenrechnung: aus der 1-Form (Zeile) erhält man durch $\vec{F}(p) = \omega_p^t$ das zugehörige Vektorfeld (Spalte), und umgekehrt: $\omega_p = \vec{F}(p)^t$.

Lemma: Eine 1-Form ω und ein Vektorfeld $\vec{F}$ auf M gehören genau dann zueinander, wenn $\omega = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ gilt.

BEWEIS: Die Gleichung bedeutet, dass $\omega_p(\vec{e}_i) = \vec{F}(p) \cdot d\vec{r}_p(\vec{e}_i) = \vec{F}(p) \cdot \vec{e}_i$ für $i = 1, \dots, n$ an jeder Stelle $p \in M$ gilt, und $\omega_p(\vec{e}_i)$ ist

die i -te Komponente von ω und $\vec{F}(p) \cdot \vec{e}_i = F_i(p)$ die von $\vec{F}$ an der Stelle p . $\square$

Insbesondere stehen Differential und Gradient einer C^1 -Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ in dieser Beziehung zueinander, da ja df_p die Zeile, $\text{grad}_p f$ aber die Spalte der partiellen Ableitungen von f an der Stelle p ist. Wir dürfen also

$$df = \text{grad} f \cdot d\vec{r}$$

schreiben. Das Lemma 3 aus dem 1-Formen-Abschnitt 16.3, wonach immer $\int_{\gamma} df = f(\gamma(t_1)) - f(\gamma(t_0))$ gilt, lautet daher in der Vektorsprache:

Korollar: Für jede C^1 -Funktion f gilt

$$\int_{\gamma} \text{grad} f \cdot d\vec{r} = f(\gamma(t_1)) - f(\gamma(t_0)),$$

für geschlossene Integrationswege also $\oint_{\gamma} \text{grad} f \cdot d\vec{r} = 0$. $\square$

Wie Sie bemerken, sprechen wir hier in zwei Sprachen von ein und derselben Sache. Weshalb konnten sich Physik und Mathematik nicht auf eine Sprache einigen? Und wenn es schon so ist, genügte es nicht, wenn wir nur die eine, sagen wir die Vektorsprache benutzten?

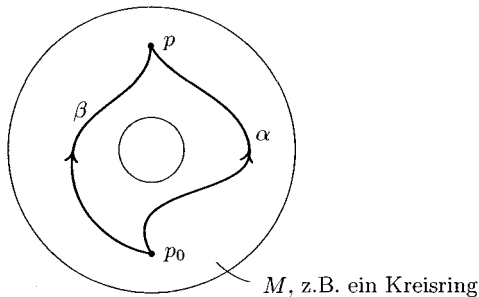
Die erste Frage ist etwas weitläufig, der will ich ausweichen. Aber zweisprachig sollen Sie schon aufwachsen in der Vektoranalysis, in der wir hier die ersten Schritte machen, indem wir über Linienintegrale sprechen. Lernten Sie nur die Formensprache, dann hätten Sie zwar Zugang zu viel schöner Mathematik, wüssten diese aber in der Physik nicht einzusetzen, lernten Sie nur die Vektorsprache kennen, so wären Ihnen später jene kurzen Wege der Mathematik verschlossen, die Ihnen manches Mal indexreiche und nicht leicht zu durchschauende Koordinatenrechnungen ersparen könnten.

16.5 Konservative Vektorfelder

Ein stetiges Vektorfeld $\vec{F} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ nennt man **konservativ**, wenn stets $\oint_{\gamma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$ gilt oder, was wegen

$$\oint_{\alpha\beta^{-}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\alpha} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} - \int_{\beta} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

dasselbe ist, wenn die Linienintegrale $\int_{\alpha} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ nur von Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges abhängen, nicht aber von dessen Verlauf.



$$\int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\beta} \vec{F} \cdot d\vec{r} \text{ bei konservativen Vektorfeldern}$$

Die zu konservativen Vektorfeldern gehörigen 1-Formen wollen wir auch **konservative 1-Formen** nennen, eine 1-Form ω ist also genau dann konservativ, wenn $\oint_{\gamma} \omega = 0$ für alle geschlossenen Integrationswege gilt.

Wie wir schon wissen, sind Gradientenfelder bzw. Differentiale konservativ:

$$\oint_{\gamma} \text{grad} f \cdot d\vec{r} = \oint_{\gamma} df = 0$$

für jede C^1 -Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Die Differentiale unter den 1-Formen haben auch einen eigenen Namen, man nennt sie aber nicht Gradientenformen, sondern **exakte 1-Formen**¹. Eine 1-Form ω ist also **exakt**, wenn sie eine "Stammfunktion" besitzt, eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $df = \omega$.

Gradientenfelder und exakte 1-Formen sind also konservativ, und jetzt zeigen wir die Umkehrung:

Lemma: *Jedes konservative Vektorfeld ist ein Gradientenfeld, jede konservative 1-Form ist exakt.*

BEWEIS: Die beiden Aussagen bedeuten ja dasselbe, führen wir den Beweis in der Formensprache, und sei es nur weil sich $\int \omega$ bequemer schreibt als $\int \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$.

Sei also ω eine konservative 1-Form. OBdA sei M zusammenhängend, worunter wir verstehen wollen, dass man von einem Punkte $p_0 \in M$ aus alle anderen durch stückweise C^1 -Wege in M erreichen kann. Wegen der vorausgesetzten Eigenschaft $\oint_\gamma \omega = 0$ dürfen wir von $\int_{p_0}^p \omega$ sprechen, denn auf den Verlauf des Integrationsweges kommt es nicht an. Wir sollen eine Funktion f mit $df = \omega$ finden. Idee?

Nun, wenn es überhaupt eine Stammfunktion für ω gibt, dann gibt es auch eine mit $f(p_0) = 0$, und für eine solche würde dann

$$\int_{p_0}^p \omega = \int_{p_0}^p df = f(p) - f(p_0) = f(p)$$

gelten. Deshalb können wir gar nicht fehlgehen, wenn wir jetzt das gesuchte f durch

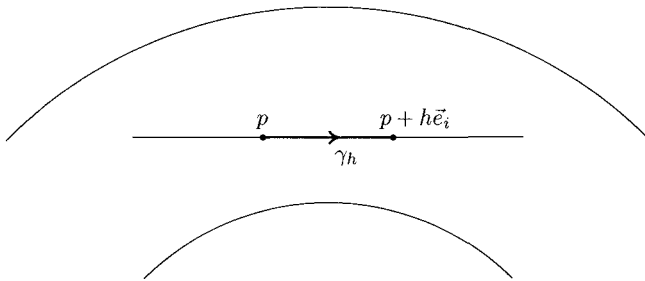
$$f(p) := \int_{p_0}^p \omega$$

definieren: wenn *diese* Funktion nicht die gewünschte Eigenschaft $df = \omega$ hat, dann überhaupt keine. Noch zu zeigen also: f ist C^1 und $df = \omega$.

Dazu rechnen wir ganz naiv die i -te partielle Ableitung von f aus. Definitionsgemäß ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_p^{p+h\vec{e}_i} \omega,$$

falls eben der Limes vorhanden ist. Um das Linienintegral auszurechnen, wählen wir den geradlinigen Integrationsweg, der ja für genügend kleines $|h| \neq 0$ ganz in M verläuft, also $\gamma_h : [0, 1] \rightarrow M$, $t \mapsto p + th\vec{e}_i$.



Integrationsweg auf der x_i -Koordinatenlinie

Der Geschwindigkeitsvektor des Integrationsweges ist $\dot{\gamma}_h(t) = h\vec{e}_i$, also ergibt sich nach der Linienintegraldefinition:

$$\frac{1}{h} \int_p^{p+h\vec{e}_i} \omega = \frac{1}{h} \int_0^1 \omega_{p+th\vec{e}_i}(h\vec{e}_i) dt = \int_0^1 \omega_{p+th\vec{e}_i}(\vec{e}_i) dt.$$

Wegen der Stetigkeit von ω konvergiert dieses Integral² für $h \rightarrow 0$ gegen die i -te Komponente $\omega_p(\vec{e}_i)$ von ω an der Stelle p , wir haben also $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \omega_p(\vec{e}_i)$ gezeigt, wegen der Stetigkeit von ω ist also f auch C^1 , und deshalb folgt aus der ‘partiellen’ Ableitungsinformation wirklich $df = \omega$. $\square$

Das ist schon einmal ein ganz nettes und nützliches Lemma, aber nicht sehr stark, weil wir eine große, nicht leicht zu verifizierende Voraussetzung mitbringen mussten:

$$\oint_{\gamma} \omega = 0$$

für alle geschlossenen γ ! Wie soll man das bei gegebenem ω oder $\vec{F}$ praktisch feststellen?

Denkt man weiter über die Frage nach, wie man einem Vektorfeld die Gradienteneigenschaft, einer 1-Form die Exaktheit ansieht,

so fällt einem früher oder später gewiss einmal ein, dass eine C^2 -Funktion ja stets

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

erfüllen muss, dass also ein C^1 -Vektorfeld $\vec{F}$ gar kein Gradientenfeld sein kann, wenn nicht zumindest

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

gilt, nur dann besteht eine Chance. Diese Felder bzw. Formen haben auch einen besonderen Namen:

Definition: Ein C^1 -Vektorfeld $\vec{F}$ heißt **rotationsfrei** und die zugehörige 1-Form $\omega = (F_1, \dots, F_n)$ eine **geschlossene** 1-Form, wenn

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

für alle $i, j = 1, \dots, n$ gilt. □

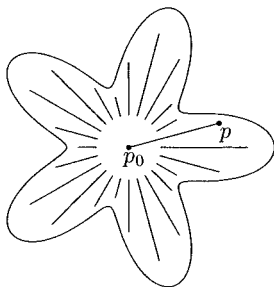
Wie die Eigenschaft zu diesen Benennungen kommt, ist für Sie jetzt nicht erkennbar, es sind Namen aus der Vektoranalysis, betrachten Sie sie einstweilen wie Vokabeln. Inhaltlich wissen wir aber schon: Jede exakte C^1 -1-Form ist geschlossen, jedes konservative C^1 -Vektorfeld, also jedes C^1 -Gradientenfeld, ist rotationsfrei. Gilt die Umkehrung?

Das wäre bequem, denn *diese* Bedingung ist durch bloßes partielles Ableiten, also leicht zu verifizieren. Leider gilt diese Umkehrung nicht ganz, aber immerhin fast — und warum ‘leider’: die nicht exakten geschlossenen 1-Formen bzw. die nicht konservativen rotationsfreien Vektorfelder sind sehr interessante Objekte! Magnetfelder zum Beispiel, die von stromdurchflossenen Leitern hervorgerufen werden.

Unsere Frage, ob *jedes* rotationsfreie Vektorfeld auf M ein Gradientenfeld ist, hat etwas mit der Geometrie, dem Aussehen von M zu tun. Es gibt in der Mathematik ein *algebraische Topologie* genanntes Teilgebiet, mit dessen Hilfsmitteln man ganz genau beschreiben kann, auf welchen offenen $M \subset \mathbb{R}^n$ alle rotationsfreien

Felder Gradientenfelder sind und auf welchen M nicht alle. Das würde uns hier etwas zu weit weg führen, aber ein sehr nützliches Teilresultat können wir aus eigener Kraft beweisen, es handelt von einem geometrisch besonders einfachen Typ von offenen Mengen, nämlich den *sternförmigen*.

Definition: Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **sternförmig**, wenn es einen Punkt $p_0 \in M$ gibt, von dem aus man alle anderen 'sehen' kann, d.h. $(1-t)p_0 + tp \in M$ für alle $p \in M$ und $t \in [0, 1]$ gilt.



sternförmig

Über die sternförmigen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sagt die einfachste Form eines in der Vektoranalysis unter dem Namen *Poincaré-Lemma* bekannten Resultats:

Satz: Auf einer sternförmigen offenen Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist jede geschlossene 1-Form auf M exakt, d.h. jedes rotationsfreie Vektorfeld auf M ein Gradientenfeld.

BEWEIS: OBdA $p_0 = 0$. Seien $(F_1, \dots, F_n)$ die Komponenten von $\vec{F}$ und ω . Wieder suchen wir ein f mit $\frac{\partial f}{\partial x_i} = F_i$, $i = 1, \dots, n$. Von 0 nach $\vec{x}$ betrachten wir jeweils den geradlinigen Weg $\gamma_{\vec{x}} : [0, 1] \rightarrow M$, $t \mapsto t\vec{x}$.

Wenn es überhaupt so ein f gibt, dann muss wieder wegen $\int_{\gamma_{\vec{x}}} df = f(\vec{x}) - f(0)$ auch durch

$$f(\vec{x}) := \int_{\gamma_{\vec{x}}} \omega = \int_0^1 \omega_{t\vec{x}}(\vec{x}) dt$$

eines gegeben sein. In den Komponenten geschrieben also

$$f(p) := \int_0^1 \sum_{i=1}^n F_i(t\vec{x}) x_i dt,$$

und wir brauchen “nur” noch

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = F_j$$

zu zeigen. Dazu:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 \sum_{i=1}^n F_i(t\vec{x}) x_i dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^n F_i(t\vec{x}) x_i dt,$$

und hier unterschlage allerdings etwas Beweisarbeit,³ denn diese Vertauschbarkeit von Integration und Ableitung ist doch auch begründungsbedürftig. Für C^1 -Funktionen geht aber alles gut, deshalb ergibt sich

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t\vec{x}) t x_i dt + \int_0^1 F_j(t\vec{x}) dt$$

nach der Produkt- und Kettenregel für die Ableitung. Jetzt nutzen wir die Rotationsfreiheit aus! Danach ist

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t\vec{x}) t x_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(t\vec{x}) t x_i$$

und letzteres erkennen wir sofort als $t \frac{d}{dt} F_j(t\vec{x})$. In unserer Berechnung der partiellen Ableitung von f nach der Variablen x_j fortfahrend erhalten wir damit

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \int_0^1 t \frac{d}{dt} F_j(t\vec{x}) dt + \int_0^1 F_j(t\vec{x}) dt,$$

und das erste dieser Integrale bittet ja geradezu auf den Knien um partielle Integration, welche dann

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = [tF_j(t\vec{x})]_0^1 - \int_0^1 F_j(t\vec{x})dt + \int_0^1 F_j(t\vec{x})dt = F_j(\vec{x})$$

ergibt. □

16.6 Übungsaufgaben

Aufgabe R16.1: Berechnen Sie für $\vec{F}(x, y) = (x + y, x - y)$ das Wegintegral $I = \int_{(-1,1)}^{(1,1)} \vec{F} d\vec{r}$. Weshalb ist die Aufgabe nicht missverständlich, obwohl der Integrationsweg nicht angegeben ist?

Aufgabe R16.2: a) Linienintegrale über zeitabhängige Vektorfelder sind zwar “nicht drangewesen”, berechnen Sie aber gleichwohl gutwillig die Arbeit $A = \int_0^T \vec{F}(t, \vec{r}) d\vec{r}$ vom Zeitpunkt 0 bis zum Zeitpunkt T für ein Teilchen der Ladung q , das sich im $\mathbb{R}^3$ auf der Bahn $\vec{r}(t) = \vec{v}t$ mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ in einem zeitabhängigen elektrischen Feld $\vec{E}$ bewegt, wobei $\vec{F} = q\vec{E}(t, \vec{r}) = qE_0\vec{e}_3 \cos(kx_1 - \omega t)$ sein soll.

b) Wie kann man ein Integral der Form $\int_\gamma \vec{F}(t, \vec{r}) d\vec{r}$ im $\mathbb{R}^3$ als ein gewöhnliches Linienintegral $\int_{\text{Graph}(\gamma)} \vec{V}(\vec{x}) d\vec{x}$ im $\mathbb{R}^4$ mit Koordinaten (x_0, x_1, x_2, x_3) auffassen?

Aufgabe R16.3: Sei $\ddot{\vec{x}} + 2\gamma\dot{\vec{x}} - \vec{F}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}, t)$ die Bewegungsgleichung für ein Teilchen in einem konservativen Kraftfeld $\vec{F}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}U(\vec{x})$ mit Reibung ($\gamma > 0$) und periodischem stetigem Antrieb: $\vec{f}(\vec{x}, t+T) = \vec{f}(\vec{x}, t)$. Zeigen Sie, dass für zeitlich periodische Lösungen mit der gleichen Periode T die von dem Antrieb über eine Periode geleistete Arbeit

$$W = \int_{t_0}^{t_0+T} \vec{f}(\vec{x}(t), t) \dot{\vec{x}}(t) dt$$

nicht negativ ist.

Aufgabe R16.4: Berechnen Sie das Wegintegral $\int_L \vec{B} \cdot d\vec{r}$ für das Vektorfeld $\vec{B} = (B_x, B_y)$ mit $B_x = -y/(x^2 + y^2)$, $B_y = x/(x^2 + y^2)$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ (magnetisches Feld eines stromdurchflossenen Drahtes durch den Nullpunkt in z -Richtung) für eine mathematisch positiv orientierte Kreislinie L a) die den Nullpunkt umschließt, b) die den Nullpunkt nicht umschließt und nicht berührt.

Aufgabe T16.1: Es seien $\vec{\gamma} : [t_0, t_1] \rightarrow L$ und $\vec{\alpha} : [u_0, u_1] \rightarrow L$ positive Durchlaufungen einer orientierten glatten Linie im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß die ‘Umparametrisierungsabbildung’ $t \mapsto u(t)$ eine C^1 -Abbildung mit $\dot{u}(t) > 0$ ist. (Hinweis: Umkehrregel aus Abschnitt 2.3 benutzen.)

Aufgabe T16.2: Beweisen Sie, daß es für jedes $n \geq 2$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und darauf ein rotationsfreies Vektorfeld gibt, das kein Gradientenfeld ist (oder: eine geschlossene, nicht exakte 1-Form). Benutzen Sie zum Beispiel den (mehrdeutigen) Winkel φ der Polarkoordinaten mit seinem (eindeutigen) Differential $d\varphi$ als Ausgangsmaterial.

Aufgabe T16.3: Eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ soll ein *Poincaré-Bereich* heißen, wenn darin jedes rotationsfreie C^1 -Vektorfeld ein Gradientenfeld ist. Beweisen Sie: sind U und V Poincaré-Bereiche und $U \cap V$ zusammenhängend, so ist auch $U \cup V$ ein Poincaré-Bereich.

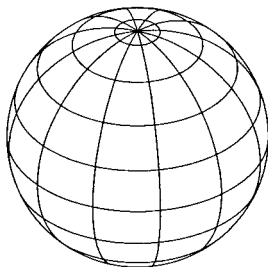
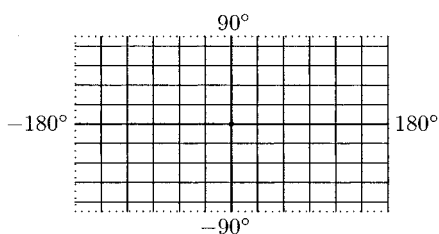
Aufgabe T16.4: Zeigen Sie, dass die sogenannte *geschlitzte Ebene* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$ ein Poincaré-Bereich in $\mathbb{R}^2$ ist, die *punktierte Ebene* $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ aber nicht. Ist $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ein Poincaré-Bereich im $\mathbb{R}^3$?

17

Koordinatentransformationen

17.1 Koordinaten

In der Physik muss man oft ein Koordinatennetz über ein physikalisches Objekt, z.B. über die Erdoberfläche werfen, um eine Beziehung zum mathematischen Zahlentupel-Raum $\mathbb{R}^n$ (hier $\mathbb{R}^2$) herzustellen, damit man die Formeln und Techniken der Analysis auf das physikalische Objekt anwenden kann.



Geographische Länge und Breite als Koordinaten

Koordinaten sind die üblichen Vermittler zwischen Mathematik und Physik. Mit raum-zeitlichen Koordinaten versteht man *die Raum-Zeit*, eine gewisse idealisierte Vorstellung vom ganzen Universum, ebenso wie das Labor, ein Galaxien-Cluster ebenso wie ein Kristallgitter, oder, um ein mathematisch komplizierteres Beispiel zu

nennen, die Gesamtheit der möglichen räumlichen Ausrichtungen eines starren Körpers (Stichwort *Eulersche Winkel*).

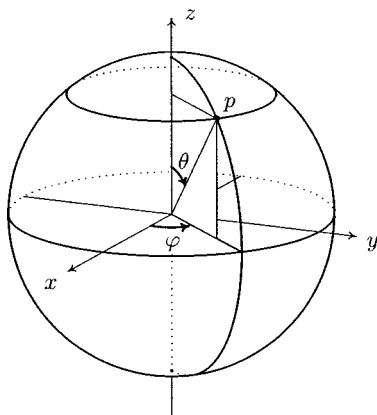
Aber auch *mathematische* Objekte können neue Koordinaten oftmals gut gebrauchen, sogar der $\mathbb{R}^n$ selbst und solche Objekte, die bereits im $\mathbb{R}^n$ untergebracht oder jedenfalls damit beschrieben sind, z.B. die mathematische Kugeloberfläche

$$S^2 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\| = 1\},$$

auf der man Punkte oft durch Winkel (φ, θ) beschreibt, ähnlich wie auf der Erdoberfläche. Genauer gesagt werden die kartesischen Koordinaten x, y, z des durch (φ, θ) beschriebenen Punktes $p \in S^2$ dabei durch

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi \sin \theta \\ y &= \sin \varphi \sin \theta \\ z &= \cos \theta \end{aligned}$$

festsetzt.



Die sphärischen Koordinaten φ und θ .

Nimmt man zu φ und θ auch noch den Abstand r vom Nullpunkt hinzu, so kann man Punkte im ganzen Raum $\mathbb{R}^3$ durch sogenannte *Kugelkoordinaten* (r, φ, θ) beschreiben, so wie wir zur Beschreibung von Punkten in der Ebene $\mathbb{R}^2$ die *Polarkoordinaten* (r, φ) kennen, die durch die dritte Koordinate z ergänzt die sogenannten *Zylinderkoordinaten* ergeben. Auch wenn wir den Werten dieser drei Arten von Koordinaten vorerst gar keine Beschränkungen auferlegen, sind

die zugehörigen kartesischen Koordinaten x, y, z durch wohldefinierte Abbildungen gegeben:

Definition: Die **Polarkoordinatenabbildung** $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(r, \varphi) \mapsto (x, y)$, ist durch

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \\y &= r \sin \varphi,\end{aligned}$$

Zylinderkoordinatenabbildung $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(r, \varphi, z) \mapsto (x, y, z)$, durch

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \\y &= r \sin \varphi \\z &= z,\end{aligned}$$

die **Kugelkoordinatenabbildung** $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(r, \varphi, \theta) \mapsto (x, y, z)$, durch

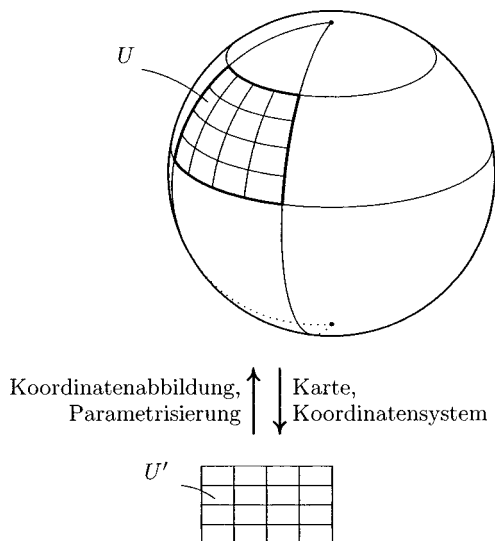
$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \sin \theta \\y &= r \sin \varphi \sin \theta \\z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

definiert. □

Diese Koordinatenabbildungen sind aber alle drei nicht bijektiv, die *Kugelkoordinaten* (r, φ, θ) etwa eines Punktes $p \in \mathbb{R}^3$ sind auch dann nicht eindeutig bestimmt, wenn wir $r \geq 0$ und $\theta \in [0, \pi]$ fordern — was wir bei der praktischen Benutzung der Koordinaten natürlich tun werden — da am Nullpunkt beide Winkel, entlang der z -Achse der Winkel φ völlig beliebig sind, und auch sonst ist φ nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt, und suchen wir durch $-\pi < \varphi \leq \pi$ eine eindeutige Festlegung zu treffen, so erhalten wir zwar eine auf dem $\mathbb{R}^3$ ohne z -Achse eindeutig definierte Koordinate $\varphi : \mathbb{R}^3 \setminus 0 \times 0 \times \mathbb{R} \rightarrow (-\pi, \pi]$, die aber einen Schönheitsfehler hat, nämlich eine Unstetigkeit über die linke (x, z) -Halbebene hinweg, sie macht dort einen Sprung um 2π .

Das ist unvermeidlich, man muss damit leben. Aber diese Unbestimmtheiten und Mehrdeutigkeiten haben ja nichts Geheimnisvolles an sich, und so weiß man sich im konkreten Falle immer

irgendwie zu helfen. Oft ist man damit zufrieden die Koordinatenabbildung, wenn man sie denn umkehren will, auf einen geeigneten Teilbereich einzuschränken.



*Koordinatenabbildung oder **Parametrisierung** und deren Umkehrung, ein Koordinatensystem oder eine **Karte**.*

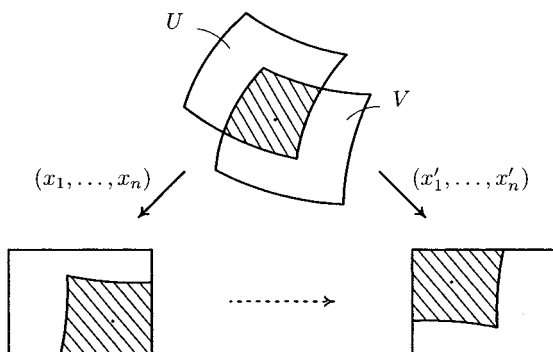
Wir haben dann auf diesem Teilbereich U des physikalischen oder mathematischen Objekts, auf dem wir Koordinaten einrichten wollen, wirklich ein **Koordinatensystem**, eine bijektive Abbildung $U \xrightarrow{\cong} U' \subset \mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^n$ etabliert.

In konkreten Beispielen von Koordinatensystemen, wie etwa den viel benutzten Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten, tragen die Koordinaten "sprechende Namen", die uns schon durch die Notation an ihre geometrische Bedeutung oder spezielle Definition erinnern. Wenn wir jetzt aber ganz allgemein über beliebige Koordinatensysteme sprechen, bezeichnen wir die Koordinaten angemessen allgemein durch $(x_1, \dots, x_n)$ oder $(x'_1, \dots, x'_n)$ oder $(y_1, \dots, y_n)$ oder dergleichen, solange das nicht mit einer Notation von älteren Rechten kollidiert. Das sollte es aber vor allem dann nicht, wenn Sie sich intuitiv das koordinatenbedürftige Objekt noch im physikali-

schen Urzustand denken, mit Zahlen noch gar nicht in Beziehung gebracht. Und mit dieser Vorstellung im Kopf verstehen Sie den Sinn von Koordinaten sowieso am allerbesten.

17.2 Transformation von Koordinaten

Zwei Koordinatensysteme auf Bereichen U und V ein und desselben Objekts können sich überlappen, und auf dem Durchschnitt $U \cap V$ hat man dann für jeden Punkt zweierlei Koordinaten.



Zwei Koordinatensysteme oder Karten

Die Zuordnung $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x'_1, \dots, x'_n)$, die den x -Koordinaten des Punktes $p \in U \cap V$ jeweils dessen x' -Koordinaten zuweist, heißt dann der **Koordinatenwechsel** oder die **Koordinatentransformation**,

$$\begin{aligned} x'_1 &= x'_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x'_n &= x'_n(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

definiert auf — na ja, wo es eben definiert ist, dafür stellt die klassische Notation meist keine Bezeichnung bereit, das muss man, wenn es darauf ankommt, auch so wissen. Es versteht sich, dass der Strich an x'_i hier nichts mit irgendwelcher Ableitung zu tun hat, sondern nur die neuen, die ‘gestrichenen’ Koordinaten markiert.

Natürlich soll eine Koordinatentransformation auch umkehrbar sein, in klassischer Notation

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(x'_1, \dots, x'_n) \\ &\vdots \\ x_n &= x_n(x'_1, \dots, x'_n), \end{aligned}$$

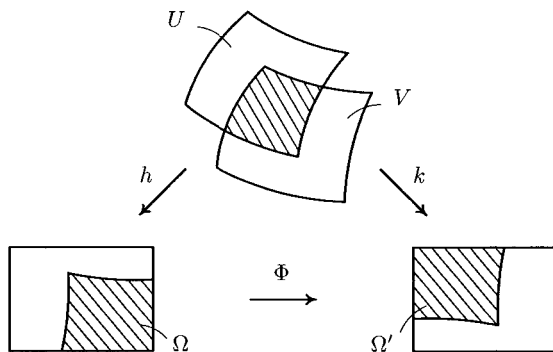
und sind beide Transformationen C^1 , so sind es sogar C^1 -Diffeomorphismen.

Erinnerung: Eine bijektive Abbildung $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ zwischen offenen Teilmengen $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein C^r -**Diffeomorphismus**, wenn sowohl Φ als auch Φ^{-1} C^r -Abbildungen sind. Fehlt eine C^r -Angabe, so ist meistens C^∞ gemeint. $\square$

In der mathematischen Abbildungs-Notation würde man die Koordinatensysteme etwa als $h : U \rightarrow \tilde{U}$ und $k : V \rightarrow \tilde{V}$ schreiben, und wäre die Bijektion

$$\Phi := k \circ h^{-1} | h(U \cap V) : h(U \cap V) \xrightarrow{\cong} k(U \cap V)$$

die zugehörige Koordinatentransformation oder der *Kartenwechsel*.



Koordinatentransformation in Abbildungsschreibweise

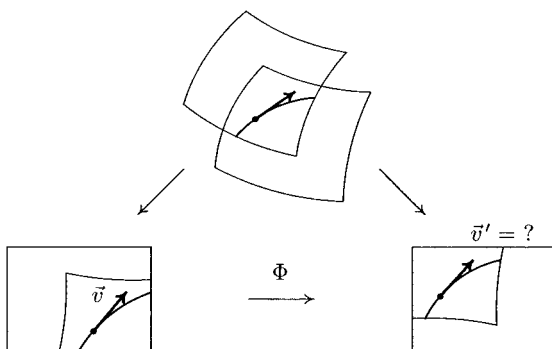
Wenn Sie finden, dass ich mich über die koordinatenbedürftigen Objekte (“zum Beispiel die Erdoberfläche”) und insofern auch über die Koordinaten reichlich vage ausdrücke, so haben Sie damit ganz

recht.¹ Mathematisches Ziel dieses Kapitels sind aber auch nur gewisse Aussagen über Koordinatentransformationen, und diese verstehen wir als C^1 -Diffeomorphismen zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und sind damit völlig auf dem sicheren Boden der gewöhnlichen Analysis. Trotzdem sollen Sie in Ihr intuitives Denken auch die Koordinaten selbst von Anfang an mit einbeziehen.

Man steht oftmals vor der Aufgabe, irgendwelche in den x -Koordinaten beschriebenen Daten oder Vorgänge im “Objekt” mittels der Koordinatentransformation in die x' -Koordinaten umzurechnen.

Was kann bei dieser Umrechnung denn schwierig sein, wenn ich die Koordinatentransformation $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ schon habe? Der Punkt p im Objekt, der in dem einen System die Koordinaten $\vec{x} \in \Omega$ hat, der hat im anderen eben die Koordinaten $\vec{x}' = \Phi(\vec{x})$, fertig!

Ja, ein Punkt — das ist freilich keine Kunst. Aber wenn Sie stattdessen oben im Objekt einen *Tangententialvektor* am Punkte p haben, der im x -Koordinatensystem die Komponenten $(v_1, \dots, v_n)$ hat, hat, wie lauten dann seine Koordinaten im x' -System, na?



Transformation eines Vektors

Ziehen Sie vielleicht $\Phi(v_1, \dots, v_n)$ in Erwägung? Eher nicht, was? Denn selbst wenn zufällig $\vec{v} \in \Omega$ sein sollte, ergibt das doch keinen Sinn. Vielmehr lässt sich der Tangentialvektor, dessen Koordinatenbeschreibung $\vec{v}$ nur ist, als der Tangentialvektor $\dot{\gamma}(0)$ einer Kurve

$\gamma(t)$ oben im Objekt auffassen, in den x -Koordinaten ist dann diese Kurve durch $h(\gamma(t))$ beschrieben, in den x' -Koordinaten durch $k(\gamma(t))$, wir kennen $(h \circ \gamma)'(0) = \vec{v}$ und sollen $(k \circ \gamma)'(0) =: \vec{v}'$ daraus ausrechnen. Das ist ein Fall für die Kettenregel, denn $k(\gamma(t)) = \Phi(h(\gamma(t)))$, also ist $\vec{v}' = J_{\Phi}(h(p))\vec{v}$, oder in klassischer Notation

$$v'_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} v_j.$$

Das ist das Transformationsgesetz für (Tangential- oder Geschwindigkeits-) Vektoren, nicht zu verwechseln mit dem Transformationsgesetz $\vec{x}' = \Phi(\vec{x})$ der bloßen Ortsangaben.

Und wieder anders transformieren sich Gradienten, die das Differential einer oben auf dem Objekt definierten Funktion f in Koordinaten beschreiben. Ist *das* der Sinn eines n -tupels $(w_1, \dots, w_n)$ in den x -Koordinaten, dann ist diese Zeile als $d(f \circ h^{-1})_{h(p)}$ zu verstehen, und wie berechnet man daraus die Komponenten $(w'_1, \dots, w'_n)$ von $d(f \circ k^{-1})_{k(p)}$? Wegen $f \circ k^{-1} = f \circ h^{-1} \circ \Phi^{-1}$ nach der Kettenregel, in Matrizen Schreibweise notiert: $\vec{w}'^t = \vec{w}^t J_{\Phi^{-1}}(k(p))$. In klassischer Notation würde das alles kurz als $w_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$, $w'_i = \frac{\partial f}{\partial x'_i}$ und

$$w'_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} w_j.$$

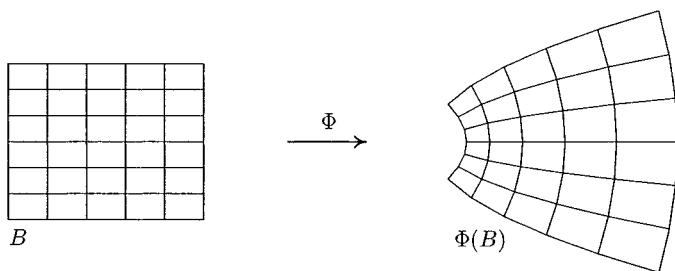
geschrieben. Das ist ein ganz anderes Transformationsgesetz als für Geschwindigkeitsvektoren.

Ganz klar kann diese Diskussion freilich erst werden, wenn man die *koordinatenbedürftigen Objekte oben* in die strengen mathematischen Begriffsbildungen mit einbezieht, und das würde uns vorläufig noch zu weit führen. Wenn Sie einstweilen verstehen, weshalb man das Transformationsgesetz einer Größe nicht schon an der Anzahl ihrer Komponenten ablesen kann, will ich ganz zufrieden sein.

17.3 Die Integraltransmutationsformel

In diesem Abschnitt wollen wir uns das Transformationsgesetz für Integranden herleiten. Dabei gehen wir davon aus, dass der Integrand in den x' -Koordinaten durch eine Funktion f beschrieben ist und rechnen aus, wie er demnach in den x -Koordinaten zu beschreiben wäre, weil es sich so herum im Hinblick auf die Rolle von Φ bzw. Φ^{-1} netter schreiben lässt. Von der Integration “oben” werde ich aber gar nicht reden, sondern alles unten im $\mathbb{R}^n$ behandeln, und deshalb formuliere ich das Problem wie folgt. Vektorpfeilchen auf Ortsangaben erlassen Sie mir vielleicht.

Es sei $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ ein C^1 -Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und $B \subset \Omega$ ein kompakter (d.h. beschränkter und abgeschlossener) Teilbereich in Ω , zum Beispiel ein kompakter Quader.



Transformation des Integrationsbereiches

Wie berechnet man Integrale $\int_{\Phi(B)} f(x') d^n x'$ als Integrale über B ?

Natürlich könnte man leicht f mittels Φ in den x -Koordinaten ausdrücken, indem man statt f auf $\Phi(B)$ eben $f \circ \Phi$ auf B betrachtet, in Koordinatenschreibweise also

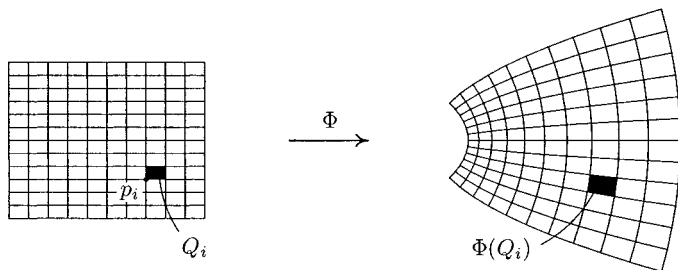
$$f(x'_1(x_1, \dots, x_n), \dots, x'_n(x_1, \dots, x_n)).$$

Aber man darf natürlich nicht $\int_B f \circ \Phi d^n x = \int_{\Phi(B)} f d^n x'$ erwarten, das sieht man schon an dem Fall $f \equiv 1$, denn dann ist auch $f \circ \Phi \equiv 1$, die Integrale daher gleich dem n -dimensionalen Volumen von B bzw. $\Phi(B)$, und es ist keine Rede davon, dass die immer gleich sein müssten.

Vielmehr werden wir einen “Korrekturfaktor” $\Lambda(x)$ brauchen, der uns ein für allemal — soll heißen für alle Riemann-integrierbaren Funktionen f auf $\Phi(B)$ — die Funktion $f \circ \Phi$ so justiert, dass

$$\int_B f(\Phi(x)) \Lambda(x) d^n x = \int_{\Phi(B)} f(x') d^n x'$$

gilt. Dieser Korrekturfaktor ist auch nicht schwer zu erraten. Sei oBdA $B =: Q$ wirklich ein Quader, und zerlegen wir ihn durch so feine Unterteilung in Teilquaderchen



$$Q_i = p_i + [0, \Delta x_1] \times \cdots \times [0, \Delta x_n], \quad Q = \bigcup_{i=1}^N Q_i$$

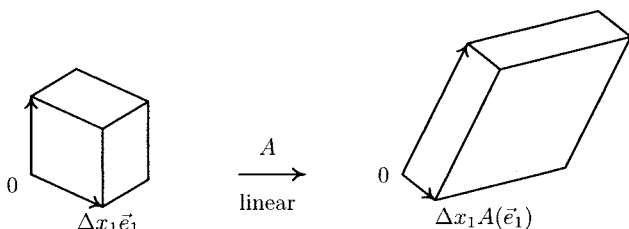
dass der Integralfehler kleiner als ein vorgegebenes ε bleibt, wenn wir f auf $\Phi(Q_i)$ jeweils durch den konstanten Wert $c_i = f(\Phi(p_i))$ ersetzen. Dann ist also

$$\int_{\Phi(Q)} f d^n x' \stackrel{\varepsilon}{\approx} \sum_{i=1}^N f(\Phi(p_i)) \int_{\Phi(Q_i)} 1 d^n x' = \sum_{i=1}^N f(\Phi(p_i)) \text{Vol}(\Phi(Q_i)).$$

Was wissen wir über das Volumen so eines kleinen Quaderbildes? Jetzt kommt die Differenzierbarkeit von Φ zum Zuge. Eine grundlegende Technik der Analysis ist die Approximation von nichtlinearen Abbildungen (kompliziert) durch lineare (einfach), wie Sie schon oft gehört haben, und hier sehen Sie wieder einmal, dass das keine leeren Worte sind. Auf jedem einzelnen der kleinen Quader Q_i ersetzen wir die Transformation Φ durch ihre lineare Approximation am Punkte p_i , also durch ihre Jacobi-Matrix:

$$\Phi(p_i + \vec{v}) \approx \Phi(p_i) + J_{\Phi}(p_i) \vec{v}.$$

Was die Jacobi-Matrix mit einem Quader $[0, \Delta x_1] \times \dots \times [0, \Delta x_n]$ macht, das wissen wir aber schon, sie bildet ihn auf ein Spat ab,



Erinnerung: Wirkung einer linearen Abbildung A auf einen Quader.

dessen Volumen wegen der geometrischen Bedeutung des Betrages der Determinante (Abschnitt 12.3) gleich $|\det J_\Phi(p_i)| \Delta x_1 \cdot \dots \cdot \Delta x_n$ ist. So erhalten wir bei genügend feiner Unterteilung

$$\int_{\Phi(Q)} f d^n x' \approx^{2\varepsilon} \sum_{i=1}^N f(\Phi(p_i)) |\det J_\Phi(p_i)| \Delta x_1 \cdot \dots \cdot \Delta x_n.$$

Aber die rechte Seite ist innerhalb von ε -Genauigkeit, wenn nur die Unterteilung fein genug ist, das Integral $\int_Q f \circ \Phi |\det J_\Phi(x)| d^n x$, und deshalb gilt

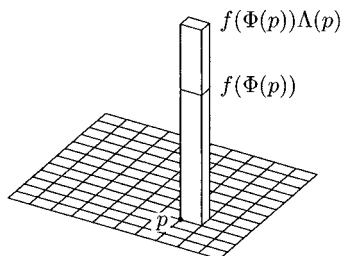
$$\int_{\Phi(B)} f d^n x' \approx^{3\varepsilon} \int_B f \circ \Phi \cdot |\det J_\Phi(x)| d^n x$$

für jedes $\varepsilon > 0$, also Gleichheit. Damit haben wir schon den Beweis des folgenden Satzes skizziert.

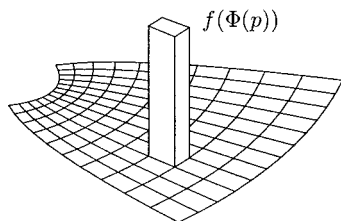
Satz (Integraltransformationsformel): Ist $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ ein C^1 -Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und $B \subset \Omega$ eine kompakte Teilmenge, zum Beispiel ein Quader, so ist mit jeder über $\Phi(B)$ Riemann-integrierbaren Funktion f auch $f \circ \Phi |\det J_\Phi|$ über B integrierbar, und es gilt

$$\int_{\Phi(Q)} f(x') d^n x' = \int_Q f(\Phi(x)) \cdot |\det J_\Phi(x)| d^n x.$$

Als der Korrekturfaktor hat sich also $\Lambda(x) := |\det J_\Phi(x)|$ herausgestellt, und das ist eben auch kein Wunder, denn es ist der lokale "Volumenverzerrungsfaktor" von Φ , das ja nahe x durch $J_\Phi(x)$ approximiert wird:



Beitrag zu $\int_B f \circ \Phi |\det J_\Phi| d^n x$

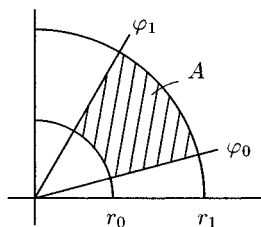


Beitrag zu $\int_{\Phi(B)} f d^n x'$

Die Säule links ist um den Korrekturfaktor $|\det J_\Phi(p)|$ höher, dafür ist die Grundfläche der Säule auf der $\Phi(B)$ -Seite, rechts, um den Korrekturfaktor größer, beide Säulen leisten denselben Beitrag zum Integral.

17.4 Infinitesimale Volumenelemente

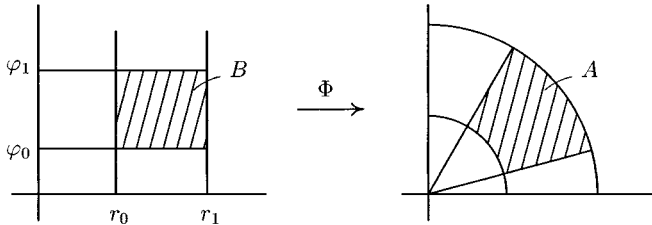
Stellen Sie sich vor, Sie hätten ein Integral $\iint_A f(x, y) dx dy$ zu berechnen, von dem Sie wegen der Form von A , etwa einem Kreisringsektor:



Integrationsbereich A

und von f , etwa $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}^3$, schon sehen, dass es in kartesischen Koordinaten ziemlich lästig, in Polarkoordinaten aber

ziemlich einfach werden würde. Was tun Sie also, nachdem Sie die Integraltransformationsformel kennen? Sie betrachten die durch die Polarkoordinatenabbildung $\Phi(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ gegebene Transformationsabbildung:



Kreisringsektor A als Bild $\Phi(B)$ des Rechtecks $B = [r_0, r_1] \times [\varphi_0, \varphi_1]$,

drücken f durch r und φ aus, gehen also zu der Funktion

$$f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r^{-3}$$

auf B über und berechnen sich den Korrekturfaktor

$$|\det J_{\Phi}(r, \varphi)| = \left| \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \right| = r$$

und wissen nun nach der Integraltransformationsformel

$$\iint_A \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}^3} dx dy = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \int_{r_0}^{r_1} r^{-3} r dr d\varphi = (\varphi_1 - \varphi_0) \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right),$$

und damit ist das Integral ausgerechnet.

Auch bei den Zylinderkoordinaten ist der Korrekturfaktor einfach r , für die Kugelkoordinatenabbildung aber ergibt sich die Jacobi-matrix als

$$J_{\Phi}(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{pmatrix}$$

und daher ist in dem uns sowieso nur interessierenden Bereich $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, der Kugelkoordinaten-Korrekturfaktor

$$|\det J_{\text{Kugelkoordinaten}}(r, \varphi, \theta)| = r^2 \sin \theta \geq 0.$$

Damit können Sie nun, wie bei dem obigen Polarkoordinatenbeispiel, geeignete Volumenintegrale der Form

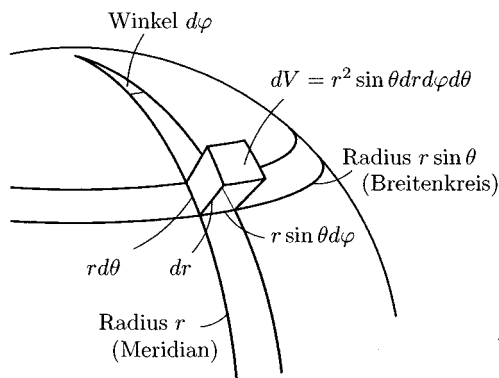
$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$$

in Integrale

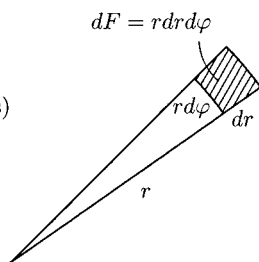
$$\iiint_B f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta$$

umrechnen, wenn das nach dem Aussehen von f und A zweckmäßig zu sein scheint.

So weit so gut! Sie haben aber gewiss schon bemerkt, dass in der Praxis der Korrekturfaktor meist gar nicht mittels der Jacobi-Matrix berechnet wird, sondern dass stattdessen ein *infinitesimales Flächenelement* dF oder im dreidimensionalen Fall ein *infinitesimales Volumenelement* dV bestimmt wird.

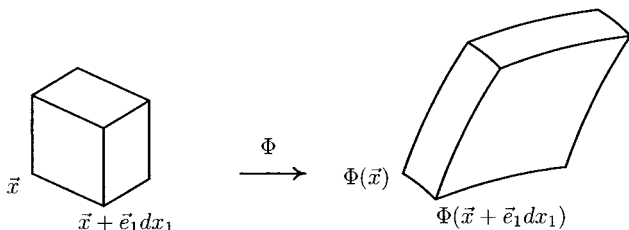


dV in Kugelkoordinaten



dF in Polarkoordinaten

Bei einer beliebigen Koordinatentransformation $\Omega \rightarrow \Omega'$, notiert als $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x'_1, \dots, x'_n)$, geht das so vor sich. Sie skizzieren sich, zumindest in Gedanken, das Bild eines mikroskopisch kleinen Quaders $[x_1, x_1+dx_1] \times \dots \times [x_n, x_n+dx_n]$ unter der Koordinatentransformation. Natürlich müssen Sie dieses Bild auch unter dem Mikroskop ansehen, sonst hätten Sie ja nur ein Pünktchen auf Ihrem Skizzenpapier. Dann erblicken Sie ein spatähnliches Gebilde, jedoch mit ganz leicht gekrümmten Seitenflächen und Kanten usw.



Berechnung des Volumenelements dV von Ω' in den x -Koordinaten

Rechnen Sie nun das n -dimensionale Volumen dV dieses Bildes auf elementare Weise aus, wobei Sie die ganz leichte, ohnehin kaum merkbare Abweichung von der geometrischen Spatgestalt ignorieren. Dann erhalten Sie eine Formel der Gestalt

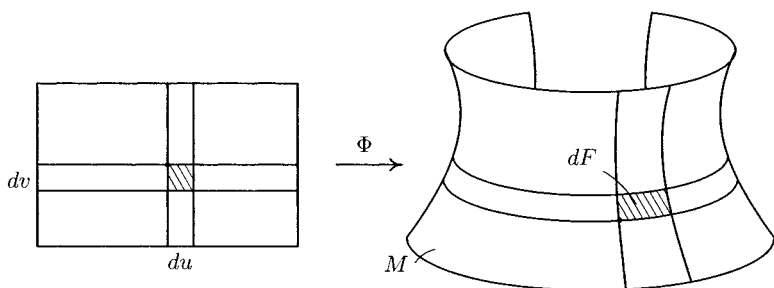
$$dV = \Lambda(x) dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n,$$

und damit dürfen Sie nun Volumenintegrale über Bereiche A in Ω' so ausrechnen, wie es die Kurznotation $\int f dV$ suggeriert, nämlich als $\int_B f(x'(x)) \Lambda(x) d^n x$, wobei $B \subset \Omega$ der dem x' -Bereich A entsprechende x -Bereich ist.

Als wir im Abschnitt 10.4 über die infinitesimalen Größen gesprochen haben, konnten Sie die *Volumenelemente* noch nicht richtig beurteilen, aber jetzt sehen Sie, weshalb diese Methode, die im Grunde der Beweislinie der Integraltransformationsformel folgt, ganz ohne Jacobimatrix und partielle Ableitungen genau den richtigen Korrekturfaktor liefert. Das Ignorieren der leichten Deformation des Bildspates ist keine Schlamperie, sondern im Gegenteil der streng geforderte Übergang zum Limes unendlicher Vergrößerung und damit zur linearen Approximation der Koordinatentransformation. Das berechnete Volumenelement dV in Abhängigkeit von

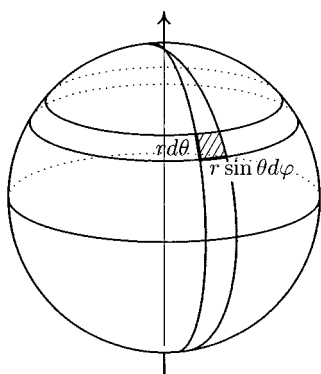
den Kantenlängen $dx_1, \dots, dx_n$ ist deshalb richtig das Volumen $|\det J_\Phi(x)| dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n$ des Bildspates unter dem Differential, wie es sein soll.

Die Methode der infinitesimalen Größen eröffnet Ihnen sogar einen Schnellzugang zur Integration auf zweidimensionalen Flächen M im Raum $\mathbb{R}^3$ und k -dimensionalen Flächen im $\mathbb{R}^n$ mittels Koordinatenabbildungen, die wir in mathematischer Ausführlichkeit erst später behandeln werden.² Vorausgesetzt, Sie können das Flächenelement oder k -dimensionale Volumenelement von M in den Koordinaten berechnen!

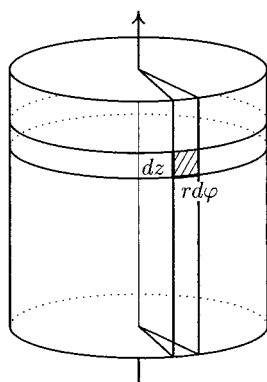


Flächenelement dF in Koordinaten (u, v) — anschaulich.

Das können Sie aber jedenfalls für die Kugeloberfläche und den Zylindermantel vom festen Radius r :



$$dF = r^2 \sin \theta d\varphi d\theta$$



$$dF = r d\varphi dz$$

Drücken Sie nun die zu integrierende Funktion, die vielleicht ur-

sprünglich in der Form $f(x, y, z)$ gegeben sein mag, auf dem Integrationsbereich A auf der Sphäre oder dem Zylinder durch die Koordinaten (φ, θ) bzw. (φ, z) aus. Dann erhalten Sie

$$\iint_A f \, dF = r^2 \iint_B f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) \sin \theta \, d\varphi d\theta$$

für Integrale auf der Kugeloberfläche und

$$\iint_A f \, dF = r \iint_B f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \, d\varphi dz$$

für Integrale auf dem Zylindermantel, jeweils über den richtigen Bereich B in der (φ, θ) - bzw. der (φ, z) -Ebene erstreckt.

Und hier endet ein erster Teil unseres Mathematikurses. In diesem Teil habe ich Ihnen, gleichsam auf der grünen Wiese, eine mathematische Grundausrüstung für angehende Physiker aus dem Boden gestampft, die wohl alles enthält was Ihre Physikprofessoren fairerweise von Erstsemestern erwarten dürfen. Nun wird es aber höchste Zeit, etwas für Ihre mathematische Infrastruktur zu tun, damit Sie auch den kommenden höheren Anforderungen gewachsen bleiben, denn nur auf idealisierten Schulkenntnissen aufzubauen wird auf die Dauer immer schwieriger.

17.5 Übungsaufgaben

Aufgabe R17.1: Durch $x(t) = r(t) \cos \varphi(t)$, $y(t) = r(t) \sin \varphi(t)$ sei eine Bahnkurve in $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ gegeben. Betrachten Sie an jedem Punkt die auf die Länge 1 normierten Spalten der Jacobi-Matrix der Polarkoordinatenabbildung als Basisvektoren $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$ und drücken Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und die Beschleunigung $\vec{b}(t)$ der Bahnkurve in dieser Basis aus.

Aufgabe R17.2: Sei $\vec{\alpha} : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Kurve von A nach B . Konstruieren Sie aus dt das infinitesimale ‘Längenelement’ ds der Kurve (analog der heuristischen Bestimmung des ‘Flächenelements’)

dF) und berechnen Sie für $a \in \mathbb{R}^+$ die Bogenlänge $\ell = \int_A^B ds$ der durch $x_1(t) := a(t - \sin t)$, $x_2(t) := a(1 - \cos t)$ gegebenen *Zykloide* im $\mathbb{R}^2$ für eine Periode: $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$.

Aufgabe R17.3: Konstruieren Sie aus $d\varphi$ und dz das Flächenelement dF für die Rotationsfläche

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r = f(z), z_1 < z < z_2\}.$$

wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ zu verstehen ist und f eine positive C^1 -Funktion bezeichnet. Geben Sie eine Formel für den Flächeninhalt F an und berechnen Sie F beim Paraboloid $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r^2 = z, 0 < r < R\}$.

Aufgabe R17.4: a) Betrachten Sie für festes $R > 0$ die durch

$$\begin{aligned} x(r, \varphi, \theta) &= (R + r \cos \theta) \cos \varphi \\ y(r, \varphi, \theta) &= (R + r \cos \theta) \sin \varphi \\ z(r, \varphi, \theta) &= r \sin \theta \end{aligned}$$

gegebene *Toruskoordinatenabbildung*. Berechnen Sie mittels dieser Koordinaten für festes $0 < r_0 < R$ den Volumeninhalt

$$V = \int_T dx dy dz$$

des durch $0 \leq r \leq r_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und $0 \leq \theta \leq 2\pi$ beschriebenen Volltorus T .

b) Berechnen Sie auf gleiche Weise auch das Trägheitsmoment

$$I = \int_T (x^2 + y^2) dx dy dz$$

um die z-Achse.

Aufgabe R17.5: Berechnen Sie den Flächeninhalt $A = \int_S dF$ der Oberfläche S des in R17.4 beschriebenen Volltorus T , wobei Sie das *Flächenelement* dF mittels infinitesimaler Größen ausdrücken.

Aufgabe R17.6: Für $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ bezeichne $r := |\vec{x}|$ und $\rho := |(x_1, x_2, x_3)|$. Sei ferner $\chi \in [0, \pi]$ der Winkel, den $\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \setminus 0$ gegen die x_4 -Achse bildet, festgelegt also durch $x_4 = r \cos \chi$. Bestimmen Sie in den Koordinaten (φ, θ, χ) das Volumenelement $dV_{(r)}$ der 3-Sphäre im $\mathbb{R}^4$ vom Radius r und damit auch das 4-dimensionale Volumenelement $dV_4 = dr dV_{(r)}$ des $\mathbb{R}^4$ in den Koordinaten $(r, \varphi, \theta, \chi)$. (Hinweis: $dF_{(\rho)} = \rho^2 \sin \theta d\varphi d\theta$ ist bekanntlich das Flächenelement der 2-Sphäre vom Radius ρ). Berechnen Sie nun das 4-dimensionale Volumen der Kugel $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid |\vec{x}| \leq R\}$ und das 3-dimensionale Volumen der Sphäre $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid |\vec{x}| = R\}$.

Aufgabe T17.1: Sei $\vec{x}' = \vec{x}'(\vec{x})$ eine n -dimensionale C^1 -Koordinatentransformation und

$$\partial \vec{x}' / \partial x_i \perp \partial \vec{x}' / \partial x_j$$

für alle $i \neq j$. Finden Sie eine Integralformel, welche das Volumen von $\{\vec{x}'(\vec{x}) \mid a_i \leq x_i \leq b_i \mid i = 1, \dots, n\}$ aus den $g_i(\vec{x}) := \|\partial \vec{x}' / \partial x_i\|$ zu berechnen gestattet.

Aufgabe T17.2: Es sei $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ ein C^1 -Diffeomorphismus ('Koordinatentransformation') zwischen offenen Teilmengen im $\mathbb{R}^n$. Die Transformation macht aus einem Vektorfeld $\vec{v}$ auf Ω ein transformiertes Vektorfeld $\vec{v}'$ auf Ω' und aus einer 1-Form ω auf Ω eine transformierte 1-Form ω' auf Ω' , und zwar nach den Transformationsgesetzen $\vec{v}'(\Phi(p)) = d\Phi_p(\vec{v}(p))$ und $\omega_p = \omega'_{\Phi(p)} \circ d\Phi_p$. Drücken Sie diese Transformationsgesetze in Komponentenschreibweise und mit der Jacobimatrix aus. Wie verhält sich die Zusammengehörigkeitsbeziehung zwischen Vektorfeldern und 1-Formen unter Transformation?

18.1 Der Gruppenbegriff

Als Erstes sollen Sie erfahren, dass *Zahlen*, *Funktionen* und *geometrische Figuren* im Begriffshaushalt der modernen Mathematik zwar immer noch einen ehrenvollen Platz einnehmen, aber in der mathematischen Metropolis doch eher den Altstadt kern bilden. Die Mathematik hat sich in den letzten hundert Jahren, ‘unbemerkt von der Öffentlichkeit’, wie man so sagt, zur *Strukturmathematik* gewandelt, das heißt sie entdeckt, erfindet, studiert und nutzt eine Vielzahl oft miteinander verbundener sogenannter *axiomatischer Strukturen*.

Dadurch konnten viele klassischen Probleme gelöst werden, die mit klassischen Mitteln allein nicht angreifbar waren, und gleichzeitig hat sich der Zuständigkeitsbereich der Mathematik, der Kreis der Fragen, denen ihre wissenschaftliche Neugier gilt, ungeheuer vergrößert.

Obwohl sich die axiomatischen Strukturen nicht fein säuberlich in algebraische, analytische und geometrische einteilen lassen, weil sie meist in mehrere Gebiete hineinreichen oder sich diesen klassischen Rubriken überhaupt entziehen, dürfen wir doch solche Benennungen zu grober Orientierung verwenden. In diesem Kapitel wollen wir einige wichtige *algebraische* axiomatische Strukturen kennenlernen. Mit dem Begriff *Gruppenstruktur* fangen wir an, weil er einfach ist und Ihnen doch eine gute Vorstellung davon gibt, was eine axiomatische Struktur überhaupt ist.

Eine Gruppenstruktur auf einer Menge G ist eine assoziative Verknüpfung in G mit Eins und Inversen: so werden Sie sich das später merken, wenn Sie es erst verstanden haben. Jetzt aber will ich den Gruppenbegriff ganz, ganz sorgfältig definieren und erläutern, es darf nämlich nicht der allergeringste Zweifel bleiben, wie das gemeint ist, sonst verstehen Sie auch alle anderen axiomatischen Strukturen nicht ganz richtig.

Besondere Vorkenntnisse braucht man dazu keine, Sie müssen nur wissen was eine Menge ist, was man unter dem kartesischen Produkt $X \times Y$ zweier Mengen versteht (das ist die Menge aller Paare (x, y) mit $x \in X$ und $y \in Y$) und was eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen zwei Mengen ist.

Bevor wir gewissermaßen zur notariellen Amtshandlung der Definition schreiten, möchte ich schon im Voraus einige Erklärungen geben. Sollten Sie es dafür zu eilig haben, so blättern Sie einfach vor: das ist ja das Schöne an Büchern, dass einem niemand vorschreiben kann, was und in welcher Reihenfolge man darin liest.

Eine Gruppe besteht immer aus zwei Bestimmungsstücken, nämlich erstens aus einer Menge, nennen wir sie einmal G , und zweitens aus einer Abbildung von $G \times G$ nach G , nennen wir sie einmal

$$\mu : G \times G \rightarrow G.$$

Diese beiden Bestimmungsstücke zusammen, also das Paar (G, μ) , heißt aber nur dann *eine Gruppe*, wenn es gewisse Bedingungen erfüllt, nämlich den sogenannten *Gruppenaxiomen* genügt, die ich in der Definition dann genau aufführen werde.

Wie kompliziert oder einfach diese Axiome sind, werden wir ja gleich sehen, aber die logische Form des Begriffes sollte doch jedenfalls leicht zu erfassen sein: eine Gruppe ist ein Paar, bestehend aus einer Menge G und einer Abbildung $G \times G \rightarrow G$, welches gewisse, in der Definition aufgezählte Bedingungen erfüllt.

In der Tat verstehen Sie das auch, aber nach kurzer Zeit geben Sie dieses Verständnis unter dem verführerischen Einfluss verlockender Sprechweisen wieder preis.

Wenn nämlich durch glasklare Definition außer Zweifel gestellt ist, was unter einer Gruppe zu verstehen sei, dann spricht alle Welt, ich auch, statt von der Gruppe (G, μ) kurz von der Gruppe G . Das ist zwar nur eine abkürzende Sprechweise unter Eingeweihten, an der Definition wird deshalb kein Iota geändert, aber der ständige Gebrauch von Wendungen wie “eine Gruppe G heißt kommutativ, wenn ...” oder “sei G eine endliche Gruppe” oder “sei G eine Gruppe und $g \in G$ ein Element darin” übt eine hypnotische Wirkung aus, und nach einiger Zeit meinen Sie, eine Gruppe sei doch nur eine Menge, eine Menge mit besonderen Eigenschaften zwar, aber einfach eine Menge.

Das glauben Sie nicht? Ich würde es ja auch nicht glauben, wenn ich es nicht schon so oft erlebt hätte. Aber die Unterdrückung der Gruppenstruktur $\mu : G \times G \rightarrow G$ in Notation und Sprechweise geht auch noch weiter. Scheint keine Verwechslungsgefahr zu bestehen, so billigt man der Verknüpfungsabbildung μ gar keinen eigenen Namen zu, sondern schreibt $a \cdot b$ statt $\mu(a, b)$, weshalb dieser anonyme Punkt gelegentlich auch das Abbildungssymbol in $\cdot : G \times G \rightarrow G$ übernehmen muss, was schon leicht humoristisch wirkt, und schließlich verschwindet selbst dieser Multiplikationspunkt noch, wenn nämlich das “Produkt” $\mu(a, b)$ einfach als ab geschrieben wird.

Mengenelemente, die man zum Zwecke der Multiplikation einfach nebeneinander schreibt, kennen Sie aber schon einige, zum Beispiel Zahlen, zum Beispiel Matrizen, zum Beispiel Funktionen. Aha! Und so glauben Sie die gängigen Sprechweisen Ihnen zuraunen zu hören: eine Gruppe ist doch einfach eine Menge, nämlich eine Menge von Elementen, *zu deren mathematischer Natur* ein durch Nebeneinanderschreiben notiertes Produkt gehört, welches die Axiome erfüllt, und wenn du also nur die Menge G hast, so *siehst* du ja, ob die Elemente multiplizierbar sind und ob G eine Gruppe ist. Man kann’s schon beinahe niemandem mehr übel nehmen, dass er die Definition aus den Augen verliert.

Indessen taugt diese heuristische Vorstellung zwar dazu, interessante *Beispiele* von Gruppen aufzuspüren, aber am Sinn der axiomatischen Definition des Gruppenbegriffes geht sie haarscharf daneben vorbei. Die Definition kümmert sich in Wirklichkeit überhaupt nicht um die *mathematische Natur der Elemente* von G . Es ist das souveräne Recht dessen, der eine Gruppenstruktur $\mu : G \times G \rightarrow G$

auf einer Menge G definiert, dies zu tun wie es ihm beliebt, ganz gleich ob die Elemente von G überhaupt multipliziert werden wollten oder ob sie anders multipliziert werden wollten: sofern nur die Axiome erfüllt sind, ist (G, μ) eine vollgültige Gruppe, und die Erkenntnisse der Gruppentheorie sind darauf anwendbar.

Sich nicht an den konkreten Eigenschaften der Elemente festhalten zu dürfen, mag Ihnen zunächst vorkommen, als würde Ihnen der mathematische Boden unter den Füßen weggezogen. Aber gerade dieses Abstrahieren von den individuellen Zügen der einzelnen Beispiele macht die axiomatische Methode so universell anwendbar. Und bald werden Sie es auch als eine das Denken befreiende Erleichterung begrüßen, über die Elemente $a, b \in G$ und deren Produkte $ab \in G$ gar nichts wissen zu *brauchen* als nur die wenigen Struktureigenschaften der Verknüpfungsabbildung $G \times G \rightarrow G$, welche die Axiome aussprechen.

Trotzdem haben Sie vielleicht das Gefühl, ich suchte Sie zu etwas zu überreden, das Sie von Ihren eigentlichen Interessen wegführt. Die abstrakte Welt der Axiome mag ja für einen Mathematiker sehr schön sein, aber ist sie nicht über den Wolken angesiedelt? Physik ist immer mit dem konkreten Fall befasst, und es ist gerade wichtig, stets zu wissen, ob die physikalischen Größen durch Vektoren, Matrizen oder Funktionen beschrieben werden und wie man Produkte, wenn sie vorkommen, praktisch ausrechnet.

Daran ist etwas Wahres, wenn auch diese Charakterisierung der Physik etwas vordergründig ist und nicht bedenkt, wieviel abstrakte Mathematik in die theoretische Physik eingeht. Vor allem aber wäre es falsch sich vorzustellen, die Strukturmathematik würde den konkreten Fall geringschätzen und beiseite schieben. Sie weiß wohl, dass hinter der konkreten Fragestellung oft die härtesten Probleme lauern. Aber gerade deshalb ist es wichtig, im verwirrenden Beziehungsgeflecht der handgreiflichen mathematischen Objekte das Walten der axiomatischen Strukturen wiederzuerkennen, um das, was aus allgemeinen Gründen “sowieso” gilt, vom Einmaligen des besonderen Falles unterscheiden zu können und damit den eigentlichen Kern des Problems freizulegen.

Definition 1: Unter einer **Gruppe** verstehen wir ein Paar $(G, \cdot)$, bestehend aus einer Menge G und einer Abbildung

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\longrightarrow G, & \text{notiert als} \\ (a, b) &\longmapsto a \cdot b \end{aligned}$$

oder noch kürzer als $(a, b) \mapsto ab$, so dass gilt:

- (1) Die Verknüpfung ist **assoziativ**, d.h. $(ab)c = a(bc)$ für alle $a, b, c \in G$.
- (2) Es gibt ein **linksneutrales** Element $e \in G$, d.h. ein e mit $ea = a$ für alle $a \in G$, und zwar eines mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass
- (3) zu jedem $a \in G$ ein **Linksinverses**, d.h. ein $b \in G$ mit $ba = e$ existiert.

Diese Forderungen (1)–(3) nennt man die **Gruppenaxiome**. $\square$

Nach didaktischen Faustregeln sollte ich nun gleich mit einem Beispiel aus der Physik, wenn nicht gar aus dem “täglichen Leben” herbei gesprungen kommen — mit dem Effekt, dass Sie bei allem, was ich aus den Axiomen schließe, in Ihren Gedanken nur die banale Verifikation durchführen, ob es in dem Beispiel auch stimmt. Freilich nehmen Sie das als eine Denkerleichterung wahr und loben mich deswegen am Ende womöglich noch, aber in Wirklichkeit hören Sie mir gar nicht mehr richtig zu! Sie sollen sich nämlich mit mir darauf konzentrieren, was man ohne Fremdeinwirkung störender Beispiele allein aus dem Wortlaut der Axiome entnehmen kann. Um die axiomatische Methode zu begreifen, müssen Sie das *ein* Mal in Ihrem Leben getan haben: jetzt.

Befremdlich genug sehen sie aus, die Axiome. *Linksneutral*, *linksinvers*, warum nicht rechtsneutral, rechtsinvers? Was soll das? Gute Frage. Und wie ist das überhaupt gemeint, darf es *mehrere* linksneutrale Elemente geben? Darf ein Element $a \in G$ mehrere Linksinversen haben? Dazu ist einstweilen nur zu sagen, dass der Wortlaut der

Axiome jedenfalls nur verlangt, dass *mindestens* ein Linksneutrales und zu jedem Element *mindestens* ein Linksinverses vorhanden sein muss. Genauer wird sich ergeben, wenn wir jetzt gleich anfangen, aus den Axiomen Folgerungen zu ziehen.

Als eine Folgerung aus der Assoziativität (Axiom 1) bemerken wir zunächst, dass nicht nur das Produkt $abc := (ab)c = a(bc)$ von *drei* Elementen auch ohne Klammersetzung unmissverständlich erklärt ist, sondern ebenso das Produkt $a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ von n Elementen $a_1, \dots, a_n \in G$. Induktion nach der Anzahl der Faktoren! Mit welcher Klammersetzung immer man $a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ aufbaut, der letzte Schritt führt zu einem Produkt $(a_1 \cdot \dots \cdot a_r)(a_{r+1} \cdot \dots \cdot a_n)$ aus zwei Produkten kürzerer Länge, und dass das von r nicht abhängt folgt, mittels Induktion nach r , aus dem Axiom 1, angewandt auf $a := a_1 \cdot \dots \cdot a_{r-1}$, $b := a_r$ und $c := a_{r+1} \cdot \dots \cdot a_n$.

Das wollen wir uns im Folgenden immer zu Nutze machen und Klammern nur ausnahmsweise setzen, wenn wir etwas damit verdeutlichen wollen.

Lemma 1: *In einer Gruppe gibt es nur ein linksneutrales Element.*

BEWEIS: Sei $\varepsilon \in G$ ebenfalls linksneutral. Wähle ein Element $\delta \in G$ mit $\delta\varepsilon = e$, was nach Axiom 3 möglich ist. Dann ist einerseits

$$\delta\varepsilon e\varepsilon = (\delta\varepsilon)(e\varepsilon) = e\varepsilon = \varepsilon,$$

weil e linksneutral ist, aber andererseits auch

$$\delta\varepsilon e\varepsilon = \delta(\varepsilon e)\varepsilon = \delta e\varepsilon = \delta\varepsilon,$$

weil auch ε linksneutral ist, aber $\delta\varepsilon = e$ nach Wahl von δ , also $\varepsilon = e$ wie behauptet. $\square$

Künftig dürfen wir also von *dem* linksneutralen Element e einer Gruppe sprechen, denn es gibt nur eines. Nun wollen wir versuchen zu zeigen, dass es zu jedem Gruppenelement auch nur ein Linksinverses gibt. Dazu benutzen wir noch ein anderes, auch für sich interessantes Lemma. Von $ab = ba$ ist in den Axiomen nicht die Rede, und es kann auch nicht aus den Axiomen gefolgert werden, denn es gibt Gruppen, in denen Elemente mit $ab \neq ba$ vorkommen.

Wenn aber $ba = e$ ist, dann ist auch $ab = e$, das ist ein allgemeines Gesetz:

Lemma 2: *Ist e das linksneutrale Element einer Gruppe, so folgt aus $ba = e$ auch $ab = e$.*

BEWEIS: Sei also $ba = e$. Wähle zu b ein linksinverses Element c . Dann ist $cba = ea = a$, also auch

$$ab = (cba)b = c(ba)b = ceb = cb = e,$$

was zu zeigen war. $\square$

Lemma 3: *In einer Gruppe hat jedes Element nur ein Linksinverses.*

BEWEIS: Ist $ba = ca = e$, so nach Lemma 2 auch $ab = ac = e$ und daher $b(ab) = b(ac)$, also $(ba)b = (ba)c$ und deshalb $b = c$, was zu zeigen war. $\square$

Lemma 4: *Das linksneutrale Element e einer Gruppe ist stets auch rechtsneutral, d.h. $ae = a$ für alle $a \in G$.*

BEWEIS: Sei b das Linksinverse zu $a \in G$, also $ba = e$. Nach Lemma 2 ist dann auch $ab = e$ und daher ist $ae = a(ba) = (ab)a = ea = a$, wie behauptet. $\square$

In einer Gruppe gibt es also nur *ein* linksneutrales Element, dieses ist auch rechtsneutral, also schlechthin **neutral**, wie wir sagen wollen, und zu jedem Gruppenelement $a \in G$ gibt es nur *ein* Linksinverses, dieses ist nach Lemma 2 zugleich rechtsinvers, also nennen wir es natürlich **das inverse Element von $a \in G$** und bezeichnen es, wie allgemein üblich, mit $a^{-1} \in G$.

Hätten wir also nicht gleich definieren können:

Eine Gruppe ist ein Paar $(G, \cdot)$, bestehend aus einer Menge G und einer assoziativen Verknüpfung darin, in der es genau ein e mit $ae = ea = a$ für alle a und zu jedem a genau ein a^{-1} mit $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ gibt.

Gewiss, das ist genau derselbe Begriff, und manchmal wird die Definition auch so angegeben. Aber beim Aufstellen eines Axiomensystems entwickeln die Mathematiker einen sportlichen Ehrgeiz, die axiomatischen Forderungen möglichst schwach zu formulieren, so dass sie gerade noch den gewünschten Begriff charakterisieren. Nichts Überflüssiges soll in den Axiomen stehen, keine Forderungen, die auf Grund bereits aufgestellter Axiome sowieso erfüllt sind. Die Aussagen der obigen vier Lemmas mit in das Axiomensystem zu schreiben ist zwar für die Definition *unschädlich*, aber *überflüssig*, weil die scheinbar zusätzlichen Forderungen ja sowieso erfüllt sind.

Der Grund für dieses Sparsamkeitsprinzip — abgesehen von der mathematischen Neugierde, auf wie einfache Grundforderungen ein gegebener aus vielen Beispielen abstrahierter Begriff sich wohl reduzieren lassen mag — ist durchaus ein ökonomischer: im Anwendungsfalle braucht man nur die Axiome zu verifizieren und erhält die Aussagen der Lemmas geschenkt.

Freilich wiegt das Geschenk nicht schwerer als die Beweise der Lemmas, hier also nicht gar so viel, und wer etwa in großer Eile den Gruppenbegriff mitteilen will, wird nicht erst von linksneutral und linksinvers sprechen, sondern gleich zu der Alternativdefinition greifen. Wir betrachten hier aber den Gruppenbegriff zugleich als Musterbeispiel einer axiomatischen Struktur, und deshalb sollten Sie ein abgespecktes Axiomensystem sehen. Die Beweise der vier Lemmas zeigen exemplarisch, wie man von den Axiomen zu ersten Schlussfolgerungen gelangt, ganz ähnlich dürfen Sie sich das bei anderen axiomatischen Strukturen vorstellen, wo ich analoge Beweise vielleicht nicht mehr ausführen werde.

Auch auf die eleganten Sprech- und Schreibweisen, die das Benutzen erleichtern und das Verstehen erschweren können, muss ich noch einmal zurückkommen. Dass man anstatt korrekt *die Gruppe (G, μ)* oder *die Gruppe $(G, \cdot)$* einfach lax zu sagen pflegt *die Gruppe G* , das wissen Sie schon, und auch dass damit kein Abrücken von der Definition beabsichtigt ist. Ferner kann ich Ihnen auf die Dauer ja nicht verhehlen, dass man das neutrale Element einer Gruppe nicht immer, aber oft und gern und aus naheliegendem Grund mit dem selben Symbol wie die Zahl Eins bezeichnet, $1 \in G$!

Ich kann nur hoffen, dass Sie dadurch nicht auf die irrige Vorstellung geführt werden, jede Gruppe müsse eine Zahl enthalten, nämlich die Zahl 1, und auch nicht auf die ebenso irrige Meinung, zwei Gruppen G und G' müssten immer ein gemeinsames Element haben, nämlich die Eins. In Fällen drohender Verwechslungsgefahr sollten Sie “Einsen” verschiedener Gruppen markieren, etwa als 1_G und $1_{G'}$, und sei es nur in Gedanken.

Schließlich haben wir die Gruppenverknüpfung $G \times G \rightarrow G$ hier immer mit einem Multiplikationspunkt oder durch einfaches Nebeneinanderschreiben notiert, jedenfalls *multiplikativ geschrieben*, wie man das nennt. Das ist zwar praktisch, aber natürlich nicht zwingend, und ebenso könnten wir eine Gruppe zum Beispiel *additiv schreiben*, die Verknüpfung von a mit b als $a + b$ notieren und *Summe* nennen. Die Assoziativität der Verknüpfung würde dann $a + (b + c) = (a + b) + c$ bedeuten, usw.

Tatsächlich tut man das auch oft, aber dabei wird eine Übereinkunft streng eingehalten: additiv wird eine Gruppe nur dann geschrieben, wenn es bei der Verknüpfung auf die Reihenfolge nicht ankommt. Solche Gruppen nennt man *kommutativ* oder, nach dem norwegischen Mathematiker Niels Henrik Abel (1802-1829), *abelsche Gruppen*:

Definition: Eine Gruppe $(G, \cdot)$ heißt **kommutativ** oder **abelsch**, wenn $ab = ba$ für alle $a, b \in G$ gilt. $\square$

Wenn Sie also eine multiplikativ geschriebene Gruppe in einem Text antreffen, so kann sie abelsch sein oder auch nicht, aber bei einer additiv geschriebenen können Sie sicher sein, dass eine abelsche Gruppe gemeint ist. Der Grund ist der schon vorhandene Gebrauch der Schreibweisen außerhalb der Gruppentheorie. Dass $AB \neq BA$ vorkommen kann, ist man zum Beispiel aus der Matrizenrechnung gewohnt, aber wo immer das Pluszeichen verwendet wird, sind die beiden Summanden vertauschbar, und daran will auch die Gruppennotation nicht rütteln.

Hinweis: Wird eine abelsche Gruppe additiv geschrieben, also als $(G, +)$, so wird das neutrale Element gewöhnlich mit dem selben Symbol wie die Zahl Null bezeichnet, und das Inverse von $a \in G$ mit $-a$. Anstatt $a + (-b)$ schreibt man dann auch $a - b$. $\square$

Damit sollten Sie nun auf alle Fährnisse der Notation vorbereitet sein, und wir können uns wieder dem Inhalt zuwenden. Hier sind einige Beispiele von Gruppen aus Ihrem Erfahrungsbereich:

Beispiele von Gruppen:

1. Die triviale Gruppe aus nur einem Element, also $\{1\}$ in multiplikativer, $\{0\}$ in additiver Schreibweise.
2. Die abelsche Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ der ganzen Zahlen.
3. Die abelsche Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ der reellen Zahlen.
4. Die abelsche Gruppe $\mathbb{R}^+$ der positiven reellen Zahlen mit der Multiplikation als Verknüpfung. Neutrales Element ist die Zahl 1.
5. Die Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ der invertierbaren reellen $n \times n$ -Matrizen mit der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung. Neutrales Element ist die Einheitsmatrix E .
6. Die Gruppe $\text{Bij}(M)$ aller bijektiven Abbildungen $f : M \rightarrow M$ einer Menge M auf sich selbst, mit der Verkettung $(f, g) \mapsto f \circ g$ als Verknüpfung. Neutrales Element ist die Identität Id_M auf M .
7. Die *symmetrische Gruppe* $S_n := \text{Bij}(\{1, \dots, n\})$ in n Elementen, auch die *Permutationsgruppe* in n Elementen genannt.
8. Die Gruppe $SO(3)$ der Drehungen im $\mathbb{R}^3$, mit der Verkettung als Verknüpfung, in Matrizenschreibweise $SO(3) = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid AA^t = E \text{ und } \det A = +1\}$ mit der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung.
9. Die abelsche Gruppe $U(1) := \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ der komplexen Zahlen vom Betrage 1, die Kreislinie in der komplexen Zahlenebene also, mit der komplexen Multiplikation als Verknüpfung. Neutrales Element ist die Zahl 1.
10. Die abelsche Gruppe $(\mathbb{R}^n, +)$ der Vektoren des $\mathbb{R}^n$ mit der Addition als Verknüpfung. Neutrales Element ist der Nullvektor.

Und andere dergleichen mehr; diese willkürlich herausgegriffenen Beispiele sollen Ihnen nur ein Gefühl dafür geben, wie vielen Gruppen Sie selbst schon begegnet sind.

Aus gegebenen Gruppen kann man auf verschiedene Weisen neue Gruppen konstruieren, sind zum Beispiel G und G' zwei Gruppen, so wird das kartesische Produkt $G \times G'$ durch die Festsetzung $(a, x) \cdot (b, y) := (ab, xy)$ für $a, b \in G$ und $x, y \in G'$ wieder zu einer Gruppe, die man das **direkte Produkt** der beiden Gruppen nennt, zur Unterscheidung von anderen, komplizierteren Produktbildungen, auf die ich jetzt nicht eingehe.¹ Sehr häufig definiert man neue Gruppen als sogenannte *Untergruppen* schon vorhandener Gruppen.

Notiz und Definition: Sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Teilmenge mit den Eigenschaften

- (1) $ab \in H$ für alle $a, b \in H$
- (2) $1 \in H$ und
- (3) $a^{-1} \in H$ für alle $a \in H$,

dann ist durch $H \times H \rightarrow H$, $(a, b) \mapsto ab$ eine Verknüpfung in H gegeben, die H zu einer Gruppe macht. Man nennt dann H eine **Untergruppe** der Gruppe G . □

Mit 1 ist hier natürlich das neutrale Element von G bezeichnet, es ist dann zugleich auch das neutrale Element von H . Die in den Gruppenaxiomen geforderten Eigenschaften $a(bc) = (ab)c$, $1a = a$ und $a^{-1}a = 1$ braucht man gar nicht mehr nachzuprüfen, sie gelten ja sogar für alle $a, b, c \in G$.

Wer im Umgang mit Untergruppen noch ungeübt ist, vergisst manchmal (1) zu überprüfen, vermutlich in dem Gefühl, dass die Assoziativität ja von selbst erfüllt ist und (2) für das zweite, (3) für das dritte Gruppenaxiom sorgt, also sind alle drei Axiome gecheckt, bingo! Tatsächlich entspricht (1) keinem der drei Axiome, aber etwas noch Fundamentalere: wenn eine Verknüpfung in H eine Gruppenverknüpfung sein soll, dann muss sie, noch bevor von

den Axiomen zu reden ist, überhaupt erst einmal wirklich eine Verknüpfung *in* H sein, eine Abbildung $H \times H \rightarrow H$, nicht nur $H \times H \rightarrow G$. Die Eigenschaften (2) und (3) alleine sichern das keineswegs, nehmen Sie das offene Intervall $(\frac{1}{3}, 3) \subset \mathbb{R}^+$ als Beispiel, es definiert keine Untergruppe der multiplikativen Gruppe $\mathbb{R}^+$, obwohl (2) und (3) erfüllt sind.

Man kann die drei Bedingungen auch zu einer zusammenfassen, eine Teilmenge $H \subset G$ in einer Gruppe G erfüllt nämlich die drei Bedingungen auch genau dann, wenn $H \neq \emptyset$ und $a^{-1}b \in H$ für alle $a, b \in H$ gilt. Dass (1)-(3) diese Eigenschaft implizieren ist klar, und umgekehrt: da H nicht leer ist, gibt es ein $a \in H$, und $a^{-1}a = 1 \in H$, also folgt (2), mit $b := 1$ nun auch (3) und deshalb auch $(a^{-1})^{-1}b = ab \in H$ für alle $a, b \in H$, das ist (1).

In die Gruppentheorie treten wir hier nicht ein, wo sollte im Rahmen unseres Kurses dafür die Zeit oder der Platz herkommen. Erfahren sollen Sie aber noch, was *Gruppenhomomorphismen* sind. Wenn man nämlich in der Strukturmathematik einen gewissen Typ von Objekten durch Axiome charakterisiert hat, wie in unserem Falle die Gruppen durch die Gruppenaxiome, dann studiert man diese Objekte nicht nur einzeln für sich, wie Ausstellungsstücke im Museum, sondern stellt durch sogenannte *Morphismen* interessante Beziehungen zwischen den Objekten her. Die Morphismen sind im allgemeinen Abbildungen, die in irgend einer Weise Rücksicht auf die axiomatische Struktur der Objekte nehmen. Im Falle der Gruppen heißen sie Gruppenhomomorphismen und sind so definiert:

Definition: Es seien G und G' Gruppen. Unter einem **Gruppenhomomorphismus** von G nach G' versteht man eine Abbildung $\varphi : G \rightarrow G'$ mit der Eigenschaft

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$$

für alle $a, b \in G$. □

Die Gruppenhomomorphismen sind also jene Abbildungen zwischen Gruppen, die die Verknüpfung respektieren, wie man sagt. Sie re-

spektieren dann automatisch auch das neutrale Element und die Inversenbildung:

Lemma: Für jeden Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \rightarrow G'$ gilt $\varphi(1) = 1$ und $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$ für alle $a \in G$.

BEWEIS: Es ist $\varphi(1)\varphi(1) = \varphi(1 \cdot 1) = \varphi(1)$ und daher

$$\varphi(1)^{-1}\varphi(1)\varphi(1) = \varphi(1)^{-1}\varphi(1) = 1,$$

also $\varphi(1) = 1$. Daraus nun aber auch $\varphi(a^{-1}a) = \varphi(a^{-1})\varphi(a) = 1$, also ist $\varphi(a^{-1})$ invers zu $\varphi(a)$. $\square$

An diesem Beweis können Sie testen, ob Sie auch die Einsen der beiden Gruppen nicht verwechseln, obwohl sie beide als 1 notiert sind.

Notiz und Definition: Ist $\varphi : G \rightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus, so heißt Kern $\varphi := \varphi^{-1}(1) = \{a \in G \mid \varphi(a) = 1\}$ der **Kern** und Bild $\varphi := \{\varphi(a) \mid a \in G\}$ das **Bild** von φ . Sowohl Kern $\varphi \subset G$ als auch Bild $\varphi \subset G'$ sind Untergruppen. $\square$

Auch hier ist mit dem Element $1 \in G'$ natürlich nicht die Zahl 1, sondern das neutrale Element der Gruppe G' gemeint, der Kern ist also das Urbild des neutralen Elements, und ist G' eine *additiv* geschriebene abelsche Gruppe, so muss man natürlich auch Kern $\varphi = \varphi^{-1}(0)$ schreiben.

Trivialerweise ist die Identität $\text{Id}_G : G \rightarrow G$ auf einer Gruppe immer ein Gruppenhomomorphismus, und sind $G \xrightarrow{\varphi} G' \xrightarrow{\psi} G''$ Gruppenhomomorphismen, so auch $\psi \circ \varphi : G \rightarrow G''$, das ist ganz allgemein so bei den "Morphismen" axiomatischer Strukturen. Und allgemeiner Brauch ist es auch, Morphismen, die einen inversen Morphismus besitzen, *Isomorphismen* zu nennen, in unserem Falle also:

Definition: Ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \rightarrow G'$ heißt ein **Gruppenisomorphismus**, wenn es einen dazu inversen Gruppenhomomorphismus $\psi : G' \rightarrow G$ gibt, d.h. einen Gruppenhomomorphismus mit $\psi \circ \varphi = \text{Id}_G$ und $\varphi \circ \psi = \text{Id}_{G'}$. $\square$

Gruppen, zwischen denen es einen Gruppenisomorphismus gibt, nennt man **isomorphe Gruppen**, was wörtlich soviel wie *gleich gestaltete* Gruppen heißt. Und aus dem Blickwinkel der Gruppentheorie ist es auch so. Isomorphe Gruppen G und G' mögen äußerlich sehr verschieden aussehen, wie aus getrennten mathematischen Welten stammend, aber alles, was die *Gruppentheorie* über G zu sagen hat, überträgt sich mittels eines Isomorphismus auf G' und gilt dort ebenfalls.

18.2 Ringe und Körper

Die nächsten axiomatischen Strukturen verstehen Sie nun ohne dass ich Ihnen jedes kleine Steinchen möglichen Anstoßes aus dem Weg kehre.

Definition: Unter einem **Ring** versteht man ein Tripel $(R, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge R und zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + : R \times R &\rightarrow R \quad (\text{'Addition' genannt}) \text{ und} \\ \cdot : R \times R &\rightarrow R \quad (\text{'Multiplikation'}), \end{aligned}$$

so dass die folgenden **Ringaxiome** erfüllt sind:

- (1) $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe
- (2) Die Multiplikation ist assoziativ
- (3) Es gelten die beiden Distributivgesetze, d.h.

$$a(b + c) = ab + ac \text{ und } (a + b)c = ac + bc$$

für alle $a, b, c \in R$. □

Definition: Seien R und S Ringe. Eine Abbildung $\varphi : R \rightarrow S$ heißt ein **Ringhomomorphismus**, wenn

$$\begin{aligned} \varphi(a + b) &= \varphi(a) + \varphi(b) \quad \text{und} \\ \varphi(ab) &= \varphi(a)\varphi(b) \end{aligned}$$

für alle $a, b \in R$ gilt. □

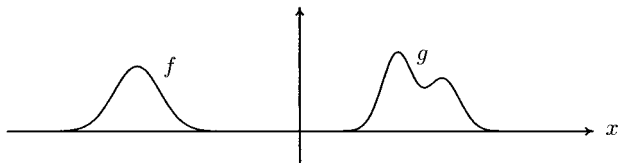
Einige Eigenschaften, die Ringe haben können, aber nicht haben müssen, geben zu Definitionen Anlass:

Definition: Gibt es in einem Ring R ein (und dann offenbar nur ein) Element 1 mit $1a = a1 = a$ für alle $a \in R$, dann heißt R ein **Ring mit Eins**. Gilt $ab = ba$ für alle a, b in einem Ring R , so heißt R ein **kommutativer Ring**, und gilt in einem Ring R , dass aus $a \neq 0$ und $b \neq 0$ stets auch $ab \neq 0$ folgt, so nennt man R einen **nullteilerfreien Ring**. $\square$

Beispiele: Hier zähle ich ein paar Ringe auf, die Sie schon kennen.

1. Der Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ der ganzen Zahlen mit den üblichen Verknüpfungen. Musterbeispiel eines Ringes, wie man vielleicht sagen darf. Wenn Sie an dieses Beispiel denken ist Ihnen auch jederzeit gegenwärtig, dass man beim Rechnen in einem Ring im Allgemeinen nicht dividieren darf: Brüche ganzer Zahlen sind nur ausnahmsweise ganzzahlig. Der Ring der ganzen Zahlen hat alle die oben genannten guten Eigenschaften, er ist ein kommutativer, nullteilerfreier Ring mit Eins. Das gilt auch für das nächste Beispiel.
2. Der Ring $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ der reellen Zahlen. Hierin darf man sogar dividieren — natürlich nicht durch Null.
3. Der Ring $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ der reellen Polynome ist auch ein kommutativer, nullteilerfreier Ring mit Eins. Dass aber nicht jeder Ring eine Eins hat, zeigt schon das folgende Beispiel.
4. Der Ring $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ der geraden Zahlen hat keine Eins.
5. Ein sehr wichtiger Ihnen schon bekannter *nichtkommutativer*, *nicht nullteilerfreier* Ring mit Eins ist, für $n \geq 2$, der Ring $(M(n \times n, \mathbb{R}), +, \cdot)$ der reellen $n \times n$ -Matrizen mit der Matrizenaddition und der Matrizenmultiplikation als Verknüpfungen. Ring-Eins ist die Einheitsmatrix.
6. Als ein willkürlich herausgegriffenes Beispiel der vielen Funktionenringe nenne ich den Ring $(C^k(M), +, \cdot)$ der reellen C^k -Funktionen auf einer offenen Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$, mit der

gewöhnlichen Addition und Multiplikation von Funktionen. Dieser kommutative Ring ist nicht nullteilerfrei, weil $fg \equiv 0$ zwar bedeutet, dass an jedem Punkte $p \in M$ eine der beiden Funktionen Null sein muss, aber es muss nicht überall dieselbe sein.



$fg \equiv 0$, obwohl weder f noch g die Nullfunktion ist.

Eine Eins hat der Ring, nämlich die konstante Funktion 1. Die konstante Funktion 1 ist in solchen Funktionenringen immer der einzige Kandidat für die Ring-Eins, braucht aber im Allgemeinen nicht im Ring enthalten zu sein, denken Sie etwa an einen Funktionenring, in dem alle Funktionen $f(0) = 0$ erfüllen müssen. Das sind dann eben Ringe ohne Eins.

Obwohl Ringe diesmal nur eine Durchgangsstation für uns sind, wollen wir zwei kleine Lemmas so im Vorüberfahren notieren:

Lemma 1: In jedem Ring R gilt $a0 = 0a = 0$ für alle $a \in R$.

BEWEIS: In den Axiomen steht's zwar nicht, aber die Null ist ja additiv neutral, also insbesondere $0 + 0 = 0$, deshalb folgt aus dem ersten Distributivgesetz $a0 = a(0 + 0) = a0 + a0$, und wenn wir, einfach in der abelschen Gruppe $(R, +)$ rechnend, jetzt auf beiden Seiten $a0$ subtrahieren, d.h. das Inverse $-(a0)$ addieren, dann folgt $0 = a0$, analog $0 = 0a$ als Folgerung aus dem zweiten Distributivgesetz. $\square$

Lemma 2: Ist R ein Ring mit Eins, so kann $1 = 0$ nur eintreten, wenn überhaupt $R = \{0\}$ gilt.

BEWEIS: Das folgt aus Lemma 1, denn aus $1 = 0$ würde für jedes $a \in R$ folgen: $a = 1a = 0a = 0$. $\square$

Ein kommutativer Ring $\mathbb{K} \neq \{0\}$ heißt ein *Körper*, wenn man darin nicht nur addieren, subtrahieren und multiplizieren, sondern auch noch *dividieren*, also alle vier Grundrechenarten ausführen kann. Genau bedeutet diese Forderung, dass der Ring kommutativ sein, eine $1 \neq 0$ und zu jedem $b \neq 0$ ein multiplikativ Inverses, also ein Element b^{-1} mit $b^{-1}b = 1$ haben soll. Ein solcher Ring ist natürlich automatisch nullteilerfrei, d.h. die Multiplikation definiert auch eine Verknüpfung *in* $\mathbb{K} \setminus 0$, denn ein Produkt ab von zwei Elementen $a, b \in \mathbb{K} \setminus 0$ kann ja wegen $(ab)b^{-1} = a$ nicht Null sein. Somit ist aber $(\mathbb{K} \setminus 0, \cdot)$ eine abelsche Gruppe, und umgekehrt enthält diese Aussage alle Zusatzforderungen, die einen Ring zum Körper machen, wegen $0a = a0 = 0$ auch die Kommutativität in ganz $\mathbb{K}$ und nicht nur in $\mathbb{K} \setminus 0$, und so erhalten wir eine prägnante Fassung der Definition des Körperbegriffes:

Definition: Ein Ring $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ heißt ein **Körper**, wenn $(\mathbb{K} \setminus 0, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist. $\square$

Da Körper einfach spezielle Ringe sind (und nicht etwa Paare, bestehend aus einem Ring und noch etwas anderem), sind Ringhomomorphismen auch die richtigen ‘Morphismen’ für Körper. Isomorphe Körper, also solche zwischen denen ein Ringisomorphismus existiert, unterscheiden sich nicht wesentlich, vom Standpunkt der Körpertheorie aus gesehen.

Ein Körper lässt sich übrigens durch einen Ringhomomorphismus gewissermaßen nur unversehrt oder gar nicht wo anders hin transportieren, genauer:

Lemma: Ein Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbb{K} \rightarrow R$ von einem Körper in einen Ring ist entweder Null oder injektiv.

BEWEIS: Wie in der linearen Algebra ist $\varphi(a) = \varphi(b)$ gleichbedeutend mit $\varphi(a - b) = 0$, dazu brauchen wir nur φ in seiner Eigenschaft als Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{K}, +)$ nach $(R, +)$ zu betrachten, was φ ja auch ist. Wäre also φ nicht injektiv, so gäbe es ein $c \neq 0$ in $\mathbb{K}$ mit $\varphi(c) = 0$, aber dann ist $\varphi(a) = \varphi(ac^{-1}c) = \varphi(ac^{-1})\varphi(c) = \varphi(ac^{-1})0 = 0$ für jedes $a \in \mathbb{K}$. $\square$

Beispiele: Auch Körper kennen Sie schon einige, wenn auch nicht unter diesem Namen.

1. Am längsten, nämlich ungefähr seit Sie bruchrechnen können, den Körper $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ der rationalen Zahlen,

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation.

2. Außerdem halte ich immer noch an der Vorstellung fest,² Sie kennen den Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ der reellen Zahlen.
3. Ähnlich wie aus dem Ring der ganzen Zahlen der Körper $\mathbb{Q}$ entsteht, bildet man aus dem Ring $\mathbb{R}[x]$ der Polynome den Körper

$$\mathbb{R}(x) := \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{R}[x], q \neq 0 \right\}$$

der rationalen Funktionen mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation.

4. Ein vierter Körper, den Sie vielleicht nicht kennen, der aber so einfach ist, dass ich ihn sofort hinschreiben kann, ist der Körper $\mathbb{F}_2$, der beim “Rechnen modulo 2” aus den ganzen Zahlen entsteht. Es ist der kleinste denkbare Körper, denn jeder Körper muss ja mindestens zwei Elemente haben, nämlich $0 \neq 1$, und $\mathbb{F}_2$ hat *nur* diese: $\mathbb{F}_2 := \{0, 1\}$, und wenn es überhaupt möglich ist, daraus einen Körper mit 0 als Null zu machen, dann liegen auch die Verknüpfungen eindeutig fest, denn es muss $0 + 0 = 0$ und $0 + 1 = 1 + 0 = 1$ sein, weil 0 additiv neutral ist, $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ nach Lemma 1 wie in jedem Körper, $1 \cdot 1 = 1$ weil 1 multiplikativ neutral ist oder weil $\mathbb{F}_2$ nullteilerfrei sein muss, und auch zu $1 + 1 = 0$ gibt es keine Wahl, weil $1 + 1 = 1$ ja $1 = 0$ implizieren würde. Und in der Tat, wie man unter Abhaken erst der Ringaxiome und dann der Körperdefinition feststellt: $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ ist ein Körper.

18.3 Der Körper der komplexen Zahlen

Kennen Sie den Körper der komplexen Zahlen? Jedenfalls haben Sie schon allerhand Übung darin, heuristisch so zu rechnen, als ob es eine Wurzel i aus -1 gäbe. Mit diesem ALS OB soll aber nun endgültig Schluss sein, wir führen die *imaginären* Zahlen jetzt aus dem heuristischen Wartesaal in die mathematische Wirklichkeit. Die mathematische Grundlage der Definition der komplexen Zahlen ist der folgende Satz über den $\mathbb{R}^2$.

Satz: In $\mathbb{R}^2$ werde eine **komplexe Multiplikation** genannte Verknüpfung $*$: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ux - vy \\ uy + vx \end{pmatrix}$$

definiert. Dann ist $(\mathbb{R}^2, +, *)$, mit der gewöhnlichen Addition $+$ und der soeben definierten komplexen Multiplikation $*$ ein Körper.

BEWEIS: Dass $(\mathbb{R}^2, +)$ eine abelsche Gruppe ist, wissen wir schon. Ein erster Blick auf $*$ zeigt, dass diese Multiplikation jedenfalls kommutativ ist, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, ein zweiter überzeugt uns davon, dass $*$ auch die Distributivgesetze erfüllt, die in den Ringaxiomen aufgestellt sind, denn $*$ ist ja sogar eine *bilineare* Abbildung von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

damit haben wir die Linearität im zweiten Faktor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ komplett mit Matrix vor uns,³ und analog für den ersten Faktor, weil die Faktoren vertauschbar sind. Rechnen wir noch die Assoziativität von $*$ nach:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} * \left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

andererseits

$$\left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right] * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au - bv \\ av + bu \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

oder in Matrizenschreibweise

$$\left[\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right] * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au - bv & -(av + bu) \\ av + bu & au - bv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

und diese Matrix ist das Matrizenprodukt, das es sein soll. Also ist $*$ assoziativ und $(\mathbb{R}^2, +, *)$ jedenfalls ein Ring.

Der Ring hat eine Eins, nämlich $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, und zu jedem $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$ ein multiplikativ Inverses, denn offensichtlich ist

$$\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daher

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{-1} := \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

invers zu $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bezüglich $*$, und $(\mathbb{R}^2, +, *)$ ist damit als Körper nachgewiesen. $\square$

Beachte: Der Körper $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ steht in einer leicht durchschau-
baren Beziehung zu dem Körper $(\mathbb{R}^2, +, *)$. Für die Elemente von $\mathbb{R} \times 0 \subset \mathbb{R}^2$ ist die komplexe Multiplikation einfach durch

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Daher ist die kanonische lineare Abbildung

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \times 0 & \subset & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} & & \end{array}$$

ein (sowieso injektiver) Körperhomomorphismus und $\mathbb{R} \times 0$ ein zu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ isomorpher Teilkörper von $(\mathbb{R}^2, +, *)$. $\square$

Ich habe bisher absichtlich nicht das Symbol i für die imaginäre Einheit benutzt, um den Körper $(\mathbb{R}^2, +, *)$ während seiner Erschaffung von allen Assoziationen zu mysteriösen ‘imaginären’ Zahlen fern zu halten. Jetzt aber können wir ohne Bedenken zu den üblichen **Notationen und Sprechweisen** übergehen:

1. Spricht man vom Körper $(\mathbb{R}^2, +, *)$, so benutzt man die Bezeichnung $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ und nennt die Elemente $z \in \mathbb{C}$ **komplexe Zahlen**.

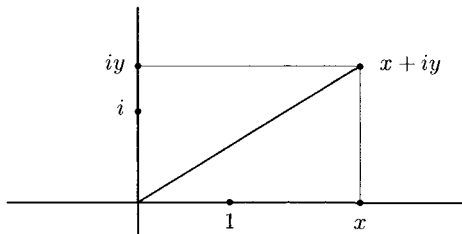
2. Das Symbol $*$ habe ich nur vorläufig benutzt, um bei der Einführung der komplexen Multiplikation und den notwendigen Nachweisen Verwechslungen mit anderen Verknüpfungen zu vermeiden. Man schreibt statt $z_1 * z_2$ aber einfach $z_1 z_2$.

3. Die Körper-Eins $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$ wird, wie auch bei anderen Körpern üblich, mit $1 \in \mathbb{C}$ bezeichnet, allgemeiner wird für reelle Zahlen $x \in \mathbb{R}$ statt $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ einfach $x \in \mathbb{C}$ geschrieben und auf diese Weise $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ verstanden, was keine Verwirrung bei den Körperverknüpfungen nach sich ziehen kann, da die kanonische Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times 0$ ja ein Körperisomorphismus ist.

4. Es wird

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =: i \in \mathbb{C}$$

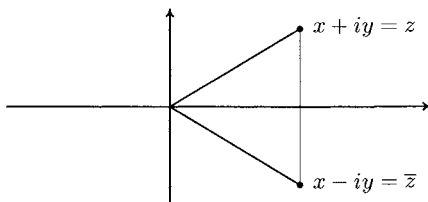
als feststehendes Symbol benutzt. Die Elemente $1 \in \mathbb{C}$ und $i \in \mathbb{C}$ sind in der $\mathbb{R}^2$ -Notation also gerade die beiden Vektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ der Standardbasis. Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist die komplexe Zahl $z := x + iy \in \mathbb{C}$ in der $\mathbb{R}^2$ -Notation der Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$.



In der komplexen Zahlenebene.

Man nennt dann $x =: \text{Re} z$ den **Realteil** und $y =: \text{Im} z$ den **Imaginärteil** von z . Auch der Imaginärteil ist also eine reelle Zahl!

5. Für $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, heißt $\bar{z} = x - iy$ die zu z **konjugiert komplexe** Zahl und die Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ die **komplexe Konjugation**.



Komplexe Konjugation

Die komplexe Konjugation ist offensichtlich mit der Addition verträglich, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, aber auch mit der Multiplikation, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, was man leicht überprüft, und worüber man sich im Nachhinein auch nicht zu wundern braucht, denn die Multiplikation ruht auf $i^2 = -1$, und $(-i)^2 = -1$ gilt auch. Jedenfalls ist die komplexe Konjugation ein Körperisomorphismus von $\mathbb{C}$ auf sich.

Damit haben wir die früher einmal so dubiosen komplexen Zahlen in den Kreis der honetten mathematischen Objekte aufgenommen. Die komplexen Zahlen werden im Laufe der Zeit immer mehr in Ihr Blickfeld rücken, die Quantenmechanik handelt zum Beispiel von komplexen Wellenfunktionen und Operatoren in komplexen Hilberträumen. Zur mathematischen Grundausbildung der Physiker gehört deshalb, im zweiten Studienjahr, auch die sogenannte *Funktionentheorie*, das ist die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Variablen, in der Sie die Ihnen im Reellen schon vertrauten elementaren Funktionen wie die Exponentialfunktion, den Logarithmus, Sinus und Cosinus usw. von ihrer komplexen Seite her kennen lernen werden.

Man sollte meinen, dass reelle Fragestellungen durch die Ausweitung auf's Komplexe auch 'komplexer' im Sinne von komplizierter werden, aber oft ist das Gegenteil der Fall, und man findet erst im Komplexen den einfachen Mechanismus, der die verwirrende Vielfalt scheinbar unzusammenhängender reeller Phänomene hervorbringt. Der tiefere mathematische Grund dafür ist die *algebraische Vollständigkeit* von $\mathbb{C}$, die im sogenannten Fundamentalsatz

der Algebra ausgesprochen wird:

Satz (Fundamentalsatz der Algebra): *Jedes komplexe Polynom hat eine Nullstelle, genauer: ist $n \geq 1$ und $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$, so läßt sich immer ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit*

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

finden. □

Auf den Beweis gehe ich nicht ein, Sie lernen ihn in der Funktionentheorie kennen.⁴ Auf einfache Weise, nämlich durch Induktion über n , erhält man aus dem Fundamentalsatz:

Korollar (Linearfaktorzerlegung): *Zu jedem normierten komplexen Polynom*

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0,$$

wobei also $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$, gibt es (abgesehen von der Reihenfolge) eindeutig bestimmte Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, so dass

$$P(z) = (z - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (z - \lambda_n).$$

□

Das Wort *normiert* bedeutet hier nur, dass wir oBdA den höchsten Koeffizienten des Polynoms als $a_n := 1$ angenommen haben. — Es ist klar, dass $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die einzigen Nullstellen von P sind, aber sie brauchen nicht alle verschieden zu sein, für $P(z) = z^n$ zum Beispiel ist $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Die Nullstellen treten daher mit einer gewissen “Vielfachheit” auf, und wenn man mit $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ nur die paarweise *verschiedenen* Nullstellen von P bezeichnet, so sind die **Vielfachheiten** der Nullstellen jene eindeutig bestimmten Zahlen $m_1, \dots, m_r \geq 1$ mit

$$P(z) = \prod_{k=1}^r (z - \lambda_k)^{m_k}.$$

Offenbar muss die Summe $m_1 + \cdots + m_r$ der Vielfachheiten gerade n sein.

Auch Polynome mit *reellen* Koeffizienten fallen mit unter diese Betrachtung, da ja $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ist. Für reelle Polynome gilt aber, wenn man komplexe z einsetzt, $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$ und deshalb gilt $P(\lambda) = 0$ genau dann, wenn $P(\bar{\lambda}) = 0$ ist, d.h. die komplexen Nullstellen reeller Polynome treten in Paaren komplex konjugierter Zahlen auf, als $\lambda = \gamma \pm i\omega$, wie wir es in der Theorie der Differentialgleichungen bei den charakteristischen Polynomen schon bemerkt hatten, und zwei komplex konjugierte Nullstellen eines reellen Polynoms haben auch dieselbe Vielfachheit, wie man z.B. leicht aus $\overline{P(\bar{z})} = P(z)$ sieht.

Diese Tatsachen über reelle und komplexe Polynome erzähle ich Ihnen aber nicht einfach nur so, etwa um den wichtigen Fundamentalsatz der Algebra noch ein wenig zu beleuchten, sondern weil wir sie bald in der Eigenwerttheorie von Operatoren in endlichdimensionalen Vektorräumen benutzen müssen. Und der letzte Abschnitt im gegenwärtigen Kapitel handelt davon, was *Vektorräume* eigentlich sind.

18.4 Vektorräume

In diesem Abschnitt bezeichnet $\mathbb{K}$ zwar immer einen beliebigen Körper, ich habe aber nichts dagegen, wenn Sie vor allem an die Beispiele $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ denken, nur auf $\mathbb{R}$ alleine dürfen Sie sich nicht beschränken, auch die komplexen Vektorräume gehören zum mathematischen Alltag eines Physikers.

Definition: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Unter einem $\mathbb{K}$ -**Vektorraum** versteht man ein Tripel $(V, +, \cdot)$, gegeben durch eine abelsche Gruppe $(V, +)$ und eine **skalare Multiplikation** genannte Verknüpfung

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times V &\longrightarrow V, \quad \text{notiert als} \\ (\lambda, v) &\longmapsto \lambda v, \end{aligned}$$

so dass die folgenden Axiome erfüllt sind:

- (1) $1v = v$
- (2) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$
- (3) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
- (4) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $u, v \in V$. □

Sprechweise: Anstatt $\mathbb{K}$ -Vektorraum sagt man auch Vektorraum **über** $\mathbb{K}$, und statt $\mathbb{R}$ -Vektorraum und $\mathbb{C}$ -Vektorraum sagt man **reeller Vektorraum** bzw. **komplexer Vektorraum**. □

Die vier Rechenregeln (1)-(4) der skalaren Multiplikation haben nichts Exotisches an sich. Auch wenn Sie sich nur von der Suggestion der Worte *Skalare* für die Elemente von $\mathbb{K}$ und *Vektoren* für die Elemente von V leiten ließen, würden Sie diese Regeln instinktiv anwenden. Eher könnte man schon Bedenken haben, ob genügend viele Rechenregeln hier als Axiome aufgenommen sind, um vor unliebsamen Überraschungen gefeit zu sein. Zum Beispiel steht nichts über $0v$ und $\lambda 0$ in den Axiomen, aber auch dabei ist keine Gefahr: $0v = (0+0)v = 0v + 0v$ nach Axiom (4), also $0v = 0$, analog $\lambda 0 = 0$ nach Axiom (3). Das sieht einfach aus und ist es auch, achten Sie aber immerhin einmal darauf, ob Sie sehen, welche dieser Nullen die Körper-Null in $\mathbb{K}$ und welche die abelsche-Gruppen-Null in V bezeichnen.

Wenn ich es nicht am Beispiel des Gruppenbegriffes schon so ausführlich erklärt hätte, müsste ich Sie nun schonend darauf vorbereiten, dass man zwar vom $\mathbb{K}$ -Vektorraum V spricht, es aber trotz dieser laxen Sprechweise dabei bleibt, dass ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum nicht eine bloße Menge V , sondern ein Tripel $(V, +, \cdot)$ ist, und so weiter.⁵

Definition und Notiz: Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Eine Teilmenge $V_0 \subset V$ heißt ein $\mathbb{K}$ -**Untervektorraum** von V , wenn

- (1) $0 \in V_0$
- (2) $\lambda u + \mu v \in V_0$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $u, v \in V_0$.

Mit den aus V stammenden Verknüpfungen wird dann auch V_0 zu einem $\mathbb{K}$ -Vektorraum, und als solcher wird er künftig auch betrachtet. □

Beispiele von $\mathbb{K}$ -Vektorräumen: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{K}^n$ mit den üblichen Verknüpfungen ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum, und die üblichen Verknüpfungen sind natürlich

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

und

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix},$$

eben so wie Sie es vom $\mathbb{R}^n$ schon gewohnt sind. Weitere Beispiele von $\mathbb{K}$ -Vektorräumen sind sodann alle $\mathbb{K}$ -Untervektorräume von $\mathbb{K}^n$, und für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ war das unser bisheriges Beispielmateriale, jetzt verallgemeinert für beliebige Körper. Den wesentliche Zugewinn an konkreten Beispielen stellen aber die vielen Funktionen-, Abbildungs-, Matrizen-, Operatorräume dar, auf die wir künftig auch alles anwenden dürfen, was wir an linearer Algebra für beliebige Vektorräume etwa beweisen werden.

Ist zum Beispiel M irgend eine Menge, so haben wir den reellen Vektorraum $\text{Abb}(M, \mathbb{R}^m)$ aller Abbildungen $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit den üblichen Verknüpfungen, ein an sich nicht so interessanter Vektorraum, der aber viele wichtige Untervektorräume enthalten kann, etwa wenn M eine offene Teilmenge im $\mathbb{R}^n$ ist den reellen Vektorraum $C^k(M, \mathbb{R}^m)$ der C^k -Abbildungen von M nach $\mathbb{R}^m$.

Oder betrachten Sie eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ mit stetigen Koeffizienten $a_0, a_1 : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist der Lösungsraum, nämlich die Menge aller Lösungen $\varphi : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ dieser Gleichung mit den gewöhnlichen Verknüpfungen ein reeller Vektorraum.

Oder denken Sie an die reellen Vektorräume aller $\frac{2\pi}{\omega}$ -periodischen Funktionen, Fourierreihen, konvergenten Fourierreihen, beschränkten Funktionen mit nur endlich vielen Unstetigkeitsstellen, trigonometrischen Polynomen, trigonometrischen Polynomen vom Grade $\leq n$, um einige zu nennen, mit denen wir schon beschäftigt waren.

Aber was bedeutet es schon, ob wir einem Vektorraum zufällig schon begegnet sind oder noch nicht: die Analysis, ja die ganze

Mathematik ist voll von Vektorräumen. Auch im Zusammenhang mit scheinbar ganz nichtlinearen Gebilden tauchen sie wieder auf, weil man nichtlineare Objekte oft lokal durch lineare Objekte approximiert: durch Vektorräume. Eine überaus häufig anzutreffende axiomatische Struktur!

Die Morphismen dieser Struktur sind die **$\mathbb{K}$ -linearen Abbildungen** $f : V \rightarrow W$ zwischen $\mathbb{K}$ -Vektorräumen, also die Abbildungen, welche additiv und homogen sind, d.h.

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

für alle $u, v \in V$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ erfüllen. Und die Theorie der $\mathbb{K}$ -Vektorräume und $\mathbb{K}$ -linearen Abbildungen nennt man lineare Algebra.

18.5 Übungsaufgaben

Aufgabe R18.1: Sei G die Gruppe der Kongruenzabbildungen, die ein gleichseitiges Dreieck mit den Ecken P_1, P_2, P_3 in sich überführen ($G = \{I, D_+, D_-, S_1, S_2, S_3\}$, Identität, Drehungen $D_\pm$ um ± 120 Grad, drei Spiegelungen an den Seitenhalbierenden, alles im Sinne der Elementargeometrie). Stellen Sie eine Multiplikationstabelle auf und bestimmen Sie alle Untergruppen von G .

Aufgabe R18.2: Die komplexen 2×2 -Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

nennt man die *Pauli-Matrizen*, sie spielen in der Quantenmechanik eine wichtige Rolle. Es bezeichne noch $\sigma_0 := E$ die 2×2 -Einheitsmatrix.

a) Drücken Sie die Matrizenprodukte $\sigma_\mu \sigma_\nu$ für $\mu, \nu = 0, \dots, 3$ wieder durch $\sigma_0, \dots, \sigma_3$ aus.

b) Die komplexen 2×2 -Matrizen I, J, K seien durch $I := \frac{1}{i}\sigma_1$, $J := \frac{1}{i}\sigma_2$ und $K := \frac{1}{i}\sigma_3$ definiert. Beweisen Sie, dass die achtelementige Menge $Q := \{\pm E, \pm I, \pm J, \pm K\}$ durch die Matrizenmultiplikation

zu einer Gruppe wird und bestimmen Sie alle Untergruppen dieser Gruppe.

Aufgabe R18.3: Zeigen Sie, dass der reelle Untervektorraum

$$\mathbb{H} := \{x_0E + x_1I + x_2J + x_3K \mid x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

von $M(2 \times 2, \mathbb{C})$ durch die Matrizenaddition und -multiplikation ein Ring wird und $(\mathbb{H} \setminus 0, \cdot)$ eine Gruppe. Ist $\mathbb{H}$ damit ein Körper?

Aufgabe R18.4: a) Zeigen Sie $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Berechnen Sie $w = \bar{z}/z$ und $|w|$ für $z \in \mathbb{C} \setminus 0$.

b) Zeigen Sie ohne Verwendung der Exponential- oder trigonometrischen Funktionen, allein mittels der Wurzelfunktion auf $\mathbb{R}^+$, dass es zu jedem $z \in \mathbb{C} \setminus 0$ genau zwei $w \in \mathbb{C} \setminus 0$ mit $w^2 = z$ gibt. Berechnen Sie diese beiden Wurzeln im Falle $z := i$.

Aufgabe R18.5: Sei $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl in Polarform, $r > 0$. Bestimmen Sie alle dritten Wurzeln von z , d.h. alle komplexen Zahlen w mit $w^3 = z$.

Aufgabe R18.6: Die Koordinaten im $\mathbb{R}^2$ seien mit x_0, x_1 bezeichnet. Die speziellen Lorentztransformationen $\Lambda(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$ mit $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ und $\beta \in (-1, +1)$ bilden eine abelsche Untergruppe $L_+^\uparrow$ von $GL(2, \mathbb{R})$ und lassen die Größe $x_0^2 - x_1^2$ invariant. Wie sehen die Orbits der Aktion von $L_+^\uparrow$ auf $\mathbb{R}^2$ aus? (Skizze). Bestimmen Sie die Gruppe L aller linearen Transformationen, die die quadratische Form $x_0^2 - x_1^2$ invariant lassen (z.B. indem Sie überlegen, weshalb es zu $\Lambda \in L$ ein $\Lambda_0 \in L_+^\uparrow$ geben muss, mit dem $\Lambda_0^{-1}\Lambda$ zu einer der vier Matrizen $\begin{pmatrix} \pm 1 & \\ & \pm 1 \end{pmatrix}$ wird).

Aufgabe T18.1: Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. a) Zeigen Sie, dass jede nichtleere Teilmenge $H \subset G$ mit der Eigenschaft $a \cdot b^{-1} \in H$ für alle $a, b \in H$ eine Untergruppe ist. b) Es bezeichne $\varphi : G \rightarrow G$ die Inversenbildung, $\varphi(a) := a^{-1}$. Definieren Sie eine Gruppenverknüpfung $*$ für die Menge G so, dass φ zu einem Gruppenisomorphismus von $(G, \cdot)$ nach $(G, *)$ wird.

Aufgabe T18.2: a) Sei G eine Gruppe, $a \in G$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $G \rightarrow G$, $g \mapsto aga^{-1}$ ein Gruppenisomorphismus ist.

b) Eine Untergruppe $H \subset G$ heißt ein *Normalteiler*, geschrieben $H \triangleleft G$, wenn $aHa^{-1} = H$ für alle $a \in G$ gilt. Zeigen Sie $\text{Kern } \varphi \triangleleft G$ für jeden Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \rightarrow \tilde{G}$.

Aufgabe T18.3: Ein injektiver Homomorphismus einer endlichen Gruppe G nach $GL(n, \mathbb{R})$ heißt eine n -dimensionale treue Darstellung von G . Zeigen Sie, dass die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_n$ eine solche Darstellung besitzt. (Denken Sie an die Permutationen der Koordinatenachsen.)

Aufgabe T18.4: Sei G eine Gruppe, M eine Menge. Eine Abbildung $G \times M \rightarrow M$, notiert als $(g, x) \mapsto gx$, heißt eine *Aktion* oder *Operation* von G auf M , wenn $1x = x$ und $a(bx) = (ab)x$ für alle $x \in M$ und $a, b \in G$ gilt. Für $x \in M$ heißt $\alpha_x : G \rightarrow M$, $g \mapsto gx$ die *Bahnabbildung*, ihr Bild $Gx := \{gx \mid g \in G\}$ die *Bahn* oder der *Orbit* von x und $G_x := \{g \mid gx = x\}$ die *Standgruppe* von x . Zeigen Sie, dass die Standgruppen Untergruppen von G sind und die Standgruppen von Punkten im gleichen Orbit *konjugiert* sind, d.h. dass es zu $y, z \in Gx$ stets ein $a \in G$ mit $G_z = aG_ya^{-1}$ gibt.

Aufgabe T18.5: Auf der Menge $Q(n, \mathbb{R})$ der quadratischen Formen auf $\mathbb{R}^n$ operiert $GL(n, \mathbb{R})$ durch $Aq := q \circ A^{-1}$. Wieviele Bahnen hat diese Aktion? (Hinweis: Satz von Sylvester.)

Aufgabe T18.6: Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Nullstellen des komplexen Polynoms $z^n - 1$ eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus 0$ bilden. Hat $\mathbb{C}^*$ noch andere endliche Untergruppen?

Aufgabe T18.7: Sei $B \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ offen und $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ eine C^1 -Abbildung. Wie müssen die partiellen Ableitungen $\partial u / \partial x$, $\partial u / \partial y$, $\partial v / \partial x$ und $\partial v / \partial y$ von $\text{Ref} =: u$ und $\text{Im } f =: v$ beschaffen sein, damit das Differential $df_z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ von f an jeder Stelle $z \in B$ die Multiplikation mit einer komplexen Zahl ist?

19.1 Metrische Räume

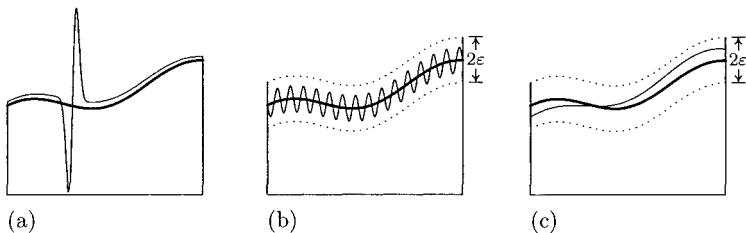
Im vorigen Kapitel haben wir einige algebraische Strukturen kennengelernt, jetzt zeige ich Ihnen zwei grundlegende axiomatische Strukturen, die auf dem Boden der Geometrie und Analysis gewachsen sind.

Im Begriff des *metrischen Raumes* wird unsere Vorstellung vom Abstand axiomatisiert. Von *Abstand* ist zunächst in der Elementargeometrie die Rede, je zwei Punkte haben einen gewissen Abstand voneinander, eine Kreislinie ist der geometrische Ort aller Punkte in der Ebene, die von einem gegebenen Mittelpunkt M einen festen Abstand r haben usw.

In der Analysis wird der Abstand gewöhnlich als Maß für eine Abweichung verwendet. Ich erinnere zum Beispiel an die Definition der Stetigkeit einer Abbildung $\vec{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ an einem Punkte $\vec{x}_0 \in M$. Die Abbildung heißt dort *stetig*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass die *Abweichung* $\|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)\|$ des Bildpunktes $\vec{f}(\vec{x})$ von $\vec{f}(\vec{x}_0)$ kleiner als ε ist, sofern nur die Abweichung $\|\vec{x} - \vec{x}_0\|$ der Originalpunkte kleiner als δ ist.

Hierbei wird die Abweichung durch den gewöhnlichen Abstand der Punkte im $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$ gemessen, aber die Analysis hat auch die Abweichung komplizierterer Objekte zu kontrollieren, etwa die

Abweichung zweier *Funktionen* voneinander. Es kommt ganz auf die Umstände an, mit welchem Abstandsbegriff man die Abweichung zu messen *wünscht*. Ist zum Beispiel eine Funktion f_0 und ein $\varepsilon > 0$ gegeben, und hat man alle Funktionen f zu betrachten, die *in einem geeigneten Sinne* um weniger als ε von f_0 abweichen, so ist es ein großer Unterschied, ob man von f nur verlangt, dass die Abweichung im quadratischen Mittel kleiner als ε ist, oder ob man zum Beispiel $|f(x) - f_0(x)| < \varepsilon$ für alle x zugleich oder sogar $|f(x) - f_0(x)| < \varepsilon$ und $|f'(x) - f'_0(x)| < \varepsilon$ für alle x zugleich fordert.



Beispiel je einer Funktion f nahe f_0 , gemessen (a) im quadratischen Mittel, (b) im C^0 -Abstand bzw. (c) im C^1 -Abstand.

Die Analysis kennt sehr viele verschiedene Abstandsbegriffe, und welcher der geeignete ist, hängt eben von Sinn und Zweck der jeweiligen mathematischen Untersuchung ab. Gewisse Grundeigenschaften haben aber alle diese Abstandsbegriffe gemeinsam.

Definition: Unter einem *metrischen Raum* versteht man ein Paar (X, d) , bestehend aus einer Menge X und einer **Metrik** oder **Abstand** genannten Funktion $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, welche die folgenden Axiome erfüllt:

- (1) Positivität: $d(x, y) \geq 0$, und $d(x, y) = 0$ genau für $x = y$,
- (2) Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$,
- (3) Dreiecksungleichung: $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

für alle $x, y, z \in X$. □

Der Buchstabe d soll an *Distanz* erinnern. Muss ich erneut davon anfangen (vergl. 18.1), dass man zwar kurz von einem metrischen

Raum X spricht, ein metrischer Raum aber trotzdem ein *Paar* (X, d) bleibt? Nicht schon wieder, was.

Die strukturerohaltenden Abbildungen $f : X \rightarrow \tilde{X}$ im engeren Sinne zwischen metrischen Räumen sind die **isometrischen Abbildungen**, die nämlich $\tilde{d}(f(x), f(y)) = d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ erfüllen. Nach Axiom (1) sind sie automatisch injektiv. Ist eine isometrische Abbildung zusätzlich auch noch surjektiv, insgesamt also bijektiv, so ist ihre Umkehrung $f^{-1} : \tilde{X} \rightarrow X$ offenbar auch isometrisch, und die Abbildung heißt eine **Isometrie** zwischen X und $\tilde{X}$.

Die isometrischen Abbildungen und Isometrien sind vor allem dann die richtigen ‘Morphismen’ und ‘Isomorphismen’, wenn die Metrik d selbst der eigentliche Gegenstand der Untersuchung ist, zum Beispiel in der sogenannten *Differentialgeometrie*, die historisch aus dem Studium der metrischen Eigenschaften glatter Flächen im $\mathbb{R}^3$ entstanden ist. Im Hinblick auf die Zwecke der Analysis, wo die Metrik oft nur als Hilfsmittel zur Präzisierung von Approximation dient, ist auch ein anderer Typ von ‘Morphismen’ wichtig, die auch auf ihre Weise auf die Metriken Rücksicht nehmen:

Definition: Eine Abbildung $f : X \rightarrow \tilde{X}$ zwischen metrischen Räumen heißt **stetig am Punkte** $x_0 \in X$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $\tilde{d}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ für alle $x \in X$ mit $d(x, x_0) < \delta$ gibt. Ist f an jedem Punkte in X stetig, so nennt man f **stetig** schlechthin. $\square$

Von den verschiedenen Arten, aus gegebenen metrischen Räumen neue zu konstruieren, erwähne ich jetzt nur die einfachste, nämlich den Übergang zu einem **metrischen Teilraum**. Ist (X, d) ein metrischer Raum und $X_0 \subset X$ irgend eine Teilmenge, so definiert d durch bloße Einschränkung auch eine Metrik

$$d|X_0 \times X_0 : X_0 \times X_0 \rightarrow \mathbb{R}$$

auf X_0 . Evident erfüllt auch $(X_0, d|X_0 \times X_0)$ die drei Axiome.

Beispiele von metrischen Räumen sind zunächst natürlich die Räume $\mathbb{R}^n$ mit dem üblichen, durch $d(\vec{x}, \vec{y}) := \|\vec{x} - \vec{y}\|$ definierten Abstand, und deren metrische Teilräume. Aus diesen Beispielen

beziehen wir unsere Anschauung über die Verhältnisse in metrischen Räumen. In der Analysis sind es im Anwendungsfalle aber oft Räume von Funktionen oder Abbildungen mit maßgeschneiderten, zuweilen auf komplizierte Weise definierten Metriken.

Es ist von vornherein klar, dass die primitiven drei metrischen Axiome nicht *alle* Aspekte einer analytisch gehaltvollen Metrik aus dem wirklichen Leben widerspiegeln können. Das sollen sie aber auch gar nicht, vielmehr geht es, wie auch bei anderen axiomatischen Strukturen, gerade darum, das Allgemeine, das aufgrund der Axiome sowieso gilt, nicht in der komplizierten Sprache des verwinkelten Anwendungsfalles von Neuem zu beweisen, sondern auf einen Blick zu erkennen. Dann sieht man auch im konkreten Fall besser, wo das eigentliche Problem liegt.

19.2 Topologische Räume

Als vorläufig letzte in unserer kleinen Auswahl axiomatischer Strukturen, nach den Gruppen, Ringen, Körpern, Vektorräumen und metrischen Räumen, erkläre ich Ihnen jetzt die *topologischen Räume* und deren Morphismen. Wie die metrischen Räume kommen sie aus der Geometrie und Analysis her, aber die Struktur ist um noch eine Stufe einfacher und beschreibt gemeinsame Züge einer noch größeren Klasse konkreter Objekte.

Definition: Ein *topologischer Raum* ist ein Paar $(X, \mathcal{O})$, bestehend aus einer Menge X und einer Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X , welche im Folgenden *offene Mengen* genannt werden, so dass diese drei Axiome erfüllt sind:

- (1) Die leere Menge $\emptyset$ und X selbst sind offen.
- (2) Jede Vereinigung offener Mengen ist offen.
- (3) Der Durchschnitt von je zwei offenen Mengen ist offen.

□

Unter Topologie versteht man das Studium oder die Theorie der topologischen Räume. Daneben verwendet man das Wort aber auch

in einer anderen, technischen Bedeutung, man nennt nämlich $\mathcal{O}$ **die Topologie** des topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$. Die Menge X heißt die dem topologischen Raum $(X, \mathcal{O})$ **zu Grunde liegende Menge**. Dass man auch kurz vom *topologischen Raum* X spricht, aber trotzdem $(X, \mathcal{O})$ meint, wird Sie nicht mehr überraschen.

Die Rolle der *Morphismen*, der mit der Struktur verträglichen Abbildungen, spielen in der Topologie die sogenannten *stetigen* Abbildungen, Stetigkeit so verstanden:

Definition: Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißt **stetig**, wenn für jede offene Teilmenge $\Omega \subset Y$ auch das Urbild $f^{-1}(\Omega) \subset X$ offen ist. $\square$

Wie das mit den Ihnen schon vertrauten Stetigkeitsbegriffen zusammenhängt, müssen wir noch besprechen. Registrieren Sie einstweilen die logische Schlichtheit des topologischen Stetigkeitsbegriffes. Kein Epsilon, kein Delta, nur *Urbilder offener Mengen offen*, das ist schon alles.

Ein Beispiel eines topologischen Raumes kennen Sie schon, es ist der $\mathbb{R}^n$, versehen mit dem üblichen Offenheitsbegriff, den wir schon seit dem Kapitel 6 verwenden. Wenn ich aber sagen soll, ob ich ihn für ein *gutes* Beispiel halte, dann zögere ich sehr. Allzu speziell ist er doch, der $\mathbb{R}^n$, untypisch in seiner Einförmigkeit und Gestaltlosigkeit. Ein reiches Anschauungsmaterial interessanter topologischer Räume bieten aber seine *topologischen Teilräume*.

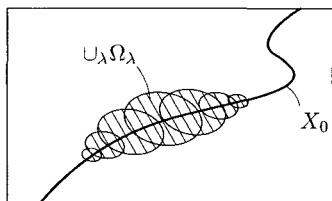
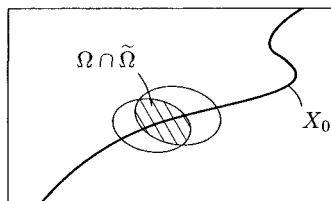
Definition: Ist $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und $X_0 \subset X$ eine Teilmenge, so heißt die durch

$$\mathcal{O}|X_0 := \{\Omega \cap X_0 \mid \Omega \in \mathcal{O}\}$$

definierte Topologie für X_0 die **Teilraumtopologie** oder **induzierte** Topologie, und der topologische Raum $(X_0, \mathcal{O}|X_0)$ heißt ein **topologischer Teilraum** von X . $\square$

Wollen wir uns übungshalber auch überzeugen, dass die drei Axiome für $\mathcal{O}|X_0$ wirklich erfüllt sind. Dass $\emptyset$ und X_0 zu $\mathcal{O}|X_0$ gehören

ist klar, da $\emptyset = \emptyset \cap X_0$ und $X_0 = X \cap X_0$ gilt und daher (1) für $\mathcal{O}|_{X_0}$ aus (1) für $\mathcal{O}$ folgt. Weshalb ist jede Vereinigung $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ von Mengen $U_\lambda \in \mathcal{O}|_{X_0}$ wieder in $\mathcal{O}|_{X_0}$? Weil $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\Omega_\lambda \cap X_0) = (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda) \cap X_0$ ist, also folgt (2) für $\mathcal{O}|_{X_0}$ aus (2) für $\mathcal{O}$. Analog für (3), es ist eben auch $(\Omega \cap X_0) \cap (\tilde{\Omega} \cap X_0) = (\Omega \cap \tilde{\Omega}) \cap X_0$.

Zu Axiom (2) für $\mathcal{O}|_{X_0}$ Zu Axiom (3) für $\mathcal{O}|_{X_0}$

Vielleicht dürfen wir die topologischen Teilräume des $\mathbb{R}^n$ hier einmal, nur für die nächsten zehn Zeilen, die *konkreten* topologischen Räume nennen. Jede Kugel, jeder Quader, jede Graphenfläche, jede Kurvenbahn, na eben überhaupt jede Punktmenge $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ ist mit ihrer induzierten Topologie ein konkreter topologischer Raum und nimmt vollberechtigt an allen topologischen Begriffsbildungen teil.

Die konkreten topologischen Räume bieten uns Ersatz für die fehlende Anschauung beim Umgang mit abstrakteren Beispielen. Gerade so, wie wir schon immer *niederdimensionale Skizzen mit hochdimensionalen Beschriftungen* verwenden, helfen in der Topologie *konkrete Skizzen mit abstrakten Beschriftungen*.

Im Zusammenhang mit der induzierten Topologie gibt es ein eigenartiges und psychologisch interessantes didaktisches Problem. Hat man mit einem topologischen Raum X und seinen vielen Teilräumen $X_0 \subset X$ zu tun, so ist natürlich die Unterscheidung wichtig, ob eine Teilmenge $U \subset X_0$ etwa als offen in der Topologie von X , d.h. als $U \in \mathcal{O}$ vorausgesetzt wird, oder ob sie nur offen in der induzierten Topologie von X_0 , kurz **offen in X_0** zu sein braucht.

Man mag aber noch so viel predigen und noch so viele Skizzen und Bildchen an die Tafel malen — wenn man dann die Testfrage stellt, ob das halboffene Intervall $[0, \frac{1}{2})$ offen in $[0, 1]$ ist, wird das

sicher jemand unter Hinweis auf den linken Randpunkt bestreiten wollen. Diese Studenten verhalten sich regelmäßig so, als würden sie die Wendung

offen in [der induzierten Topologie von] X_0

entgegen der Verabredung als

offen [in X und enthalten] in X_0

lesen. Weshalb? Das ist keine Frage der mathematischen Intelligenz, sondern der mentalen *Bereitschaft*. Es handelt sich aber nicht etwa um zerstreute oder unaufmerksame Hörer, die immer nur die Hälfte von dem vernehmen, was man sagt, sondern gewissermaßen um Feinschmecker: was ihnen zusagt, nehmen sie auf, das andere kommt in den Ordner, der in meiner Mailbox ‘Trash’ heißt. Insbesondere unterhalten sie ein starkes Bollwerk gegen alles, was ihre heile mathematische Welt stören könnte. Ist etwas bloß neu und womöglich noch interessant und potentiell nützlich, so ist es grundsätzlich willkommen, stört es aber bereits verfestigte Vorstellungen, so wird es als beunruhigend abgewiesen. Das halboffene Intervall $[0, \frac{1}{2})$ soll auf einmal offen sein? Das woll’n wir nicht. Trash.

Ich erzähle Ihnen das natürlich, um Ihr eigenes Bollwerk zu unterminieren. Aber wenn Sie nicht wollen, dann wollen Sie nicht, daran kann ich gar nichts ändern.

Jeder metrische Raum (X, d) trägt in naheliegender Weise auch eine Topologie $\mathcal{O}(d)$, sie ist wie folgt definiert:

Definition: Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $\Omega \subset X$ heißt **offen bezüglich der Metrik d** , wenn es zu jedem $x \in \Omega$ ein $\varepsilon > 0$ mit $\{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} \subset \Omega$ gibt. Die Menge $\mathcal{O}(d)$ aller bezüglich d offenen Mengen, ersichtlich eine Topologie für X , heißt **die Topologie des metrischen Raumes (X, d)** . $\square$

Schutzkugeln, wie im $\mathbb{R}^n$! Jedenfalls wenn Sie $\{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ als die offene ε -Kugel um x (bezüglich der Metrik d) gelten lassen. Freilich, seltsame Metriken werden auch seltsame Kugeln hervorbringen, definiert man im $\mathbb{R}^2$ zum Beispiel durch

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := \max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\}$$

eine neue Metrik, so sind deren “Kugeln” Quadrate. Gleichwohl ist die Kugelvorstellung sehr brauchbar beim intuitiven Umgang mit allgemeinen metrischen Räumen.

Beachten Sie, dass die Topologie $\mathcal{O}(d|X_0 \times X_0)$ eines metrischen Teilraums wirklich die von $\mathcal{O}(d)$ auf X_0 induzierte Topologie ist: die Topologisierung der metrischen Räume ist mit der Teilraumbildung verträglich.

Metrische Räume, z.B. Funktionenräume mit den unterschiedlichsten Metriken sowie deren metrische Teilräume spielen in der höheren Analysis zwar eine große Rolle, aber vielfach kommt es dabei gar nicht auf die Details der Metrik, sondern nur auf die Topologie $\mathcal{O}(d)$ an. Indem Sie die Grundbegriffe der Topologie lernen, bereiten Sie sich damit auch auf das Arbeiten mit metrischen Räumen wie etwa Hilberträumen vor, und wollte ich die topologischen Abschnitte kürzen, so müsste ich die metrischen Abschnitte entsprechend verlängern. Ich will aber gar nicht, denn die Topologie ist als Grundlagentechnik auch in anderen Bereichen gefragt.

Jetzt will ich Ihnen zwei etwas exotische Typen von topologischen Räumen vorstellen.

Definition: Ist X eine Menge, so heißt $\{X, \emptyset\}$ die *triviale Topologie* auf X . □

Das ist also die Topologie mit so wenigen offenen Mengen, wie eine Topologie auf X überhaupt haben kann. Das andere Extrem, die Topologie mit den meisten offenen Mengen, erhält man einfach, indem man *alle* Teilmengen von X für offen erklärt. Die Menge aller Teilmengen von X nennt man ja bekanntlich die *Potenzmenge* von X und bezeichnet sie mit $\mathcal{P}(X)$.

Definition: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ einer Menge X heißt die *diskrete Topologie* auf X und $(X, \mathcal{P}(X))$ heißt ein *diskreter topologischer Raum*. □

Diese Beispiele, die zunächst eher wie ein Missbrauch der eigentlich intendierten Begriffe ausschauen, liefern manchmal heilsame Ge-

genbeispiele, wenn man sich allzu sehr auf die Intuition verlassen und die Axiome etwas aus den Augen verloren hat.

Weshalb man die triviale Topologie trivial nennt, ist wohl einleuchtend, aber wieso heißt die diskrete Topologie diskret? Das Wort *diskret* wird in der Mathematik als Gegensatz zu *kontinuierlich* verwendet, die reellen Zahlen zum Beispiel bilden den kontinuierlichen Zahlenstrahl $\mathbb{R}$, aber die ganzen Zahlen liegen darin diskret oder vereinzelt. Und in der Tat ist $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ mit der Teilraumtopologie ein diskreter topologischer Raum, denn jede einpunktige Teilmenge $\{n\}$ von $\mathbb{Z}$ ist der Durchschnitt $\{n\} = (n - \varepsilon, n + \varepsilon) \cap \mathbb{Z}$ einer in $\mathbb{R}$ offenen Menge mit $\mathbb{Z}$, ist also offen in der induzierten Topologie oder *offen in* $\mathbb{Z}$, wie wir ja sagen wollen, und da jede Menge die Vereinigung ihrer einpunktigen Teilmengen ist, ist nach Axiom 2 in $\mathbb{Z}$ überhaupt jede Teilmenge offen, die Topologie also diskret. Das Beispiel macht deutlich, weshalb man die Offenheit einpunktiger Mengen als den topologischen Ausdruck ihrer Vereinzelung ansieht.

Mit der geometrischen Intuition für topologische Gegebenheiten hat auch der *Umgebungsbegriff* zu tun, dem wir uns jetzt zuwenden. Im $\mathbb{R}^n$ wollten wir das Wort *umgeben* jedenfalls so verstanden wissen, dass eine Kugel stets ihren Mittelpunkt umgibt, jede die Kugel umfassende größere Menge deshalb auch, und welche anderen Mengen könnten denn noch den Anspruch erheben, den Punkt zu umgeben? Keine.

Das motiviert den üblichen Umgebungsbegriff im $\mathbb{R}^n$. Dieser lässt sich aber auch ohne Rückgriff auf Kugeln und damit auf die Metrik, allein mittels des Offenheitsbegriffes formulieren und in dieser Form dann auf beliebige topologische Räume übertragen.

Definition: Sei X ein topologischer Raum, $x \in X$. Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt **Umgebung von x in X** , wenn es eine in X offene Menge Ω mit $x \in \Omega \subset U$ gibt. □

So wird aus Gurkensalat wirklich der Essig erzeugt, mit Goethe zu reden. Denn eigentlich ist der Umgebungsbegriff intuitiv der

primäre, und als Felix Hausdorff 1914 erstmals die topologischen Axiome aufstellte, tat er es in der Sprache der Umgebungen.

Es sind aber tatsächlich nur verschiedene Sprachen, denn wie wir oben die Umgebungen mittels des Offenheitsbegriffs charakterisiert haben, lässt sich jetzt umgekehrt die Offenheit durch den Umgebungsbegriff beschreiben:

Notiz: Eine Teilmenge Ω eines topologischen Raumes X ist genau dann offen, wenn sie jeden ihrer Punkte umgibt. $\square$

Eines der Hausdorffschen Umgebungsaxiome hat man aber schließlich doch nicht in die Definition des Grundbegriffes *topologischer Raum* mit aufgenommen, obwohl es eine anschaulich sehr plausible Forderung ausspricht. Hausdorffs Räume hatten nämlich per zusätzlichem Axiom die Eigenschaft, dass es für je zwei verschiedene Punkte möglich ist, disjunkte Umgebungen zu finden. Heute sagt man deshalb:

Definition: Ein topologischer Raum heißt ein *Hausdorffraum*, wenn es zu Punkten $x \neq y$ in X stets Umgebungen U von x und V von y mit $U \cap V = \emptyset$ gibt. $\square$

Metrische Räume sind zum Beispiel immer hausdorffsch, denn aus $x \neq y$ folgt $d(x, y) > 0$, und setzen wir dann $\varepsilon := \frac{1}{2}d(x, y)$, so sind die offenen ε -Kugeln um x und y disjunkte Umgebungen, denn hätten Sie einen Punkt z gemeinsam, so wäre nach der Dreiecksungleichung $2\varepsilon = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$, was ja nicht sein kann. — Wenn Sie diese Argumentation ganz kritisch und argwöhnisch verfolgen, werden Sie den Nachweis fordern, dass die Kugeln ihre Mittelpunkte wirklich *umgeben* und meine Einrede, dass es ja *offene* Kugeln seien, die also sogar *jeden* ihrer Punkte umgeben, nicht gelten lassen, weil die offenen Kugeln, ihrer Definition nach, nur *so genannte* offene Kugeln seien, ein Nachweis für deren wirkliche Offenheit aber bisher nicht geführt wurde, und wer weiß denn, was in irgendwelchen bizarren metrischen Räumen alles passieren kann.

Da haben Sie ganz Recht. Der Nachweis ist aber leicht nachzuholen. Ist nämlich U die *so genannte* offene ε -Kugel um x und u irgend ein Punkt darin, also $r := \varepsilon - d(x, u) > 0$, so versichert uns die

Dreiecksungleichung, dass jeder Punkt z der r -Kugel um u in U enthalten ist, denn $d(x, z) \leq d(x, u) + d(u, z) < d(x, u) + \varepsilon - d(x, u) = \varepsilon$. Also ist U wirklich offen.

Dass alle metrischen Räume, insbesondere alle Teilräume des $\mathbb{R}^n$, Hausdorffräume sind lässt Sie vermuten, dass Ihnen als Physikern *nichthausdorffsche* Räume in freier Wildbahn selten begegnen werden. Na ja, stimmt. In der Mathematik kommen sie aber vor¹, und dass es sie überhaupt gibt, sehen Sie an den *trivialen* topologischen Räumen. In einem solchen Raum ist jede Umgebung natürlich immer gleich der ganze Raum, es gibt also keine disjunkten Umgebungen.

Zum Schluss wollen wir die Stetigkeit in der Umgebungssprache ausdrücken und den Anschluss an die gewohnte ε - δ -Stetigkeit herstellen.

Lemma: *Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn es zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung V von $f(x)$ in Y eine Umgebung U von x in X mit $f(U) \subset V$ gibt.*

BEWEIS: “ $\Rightarrow$ ”: Sei also f stetig und sei V eine Umgebung von $f(x)$, d.h. es gibt eine offene Menge Ω in Y mit $f(x) \in \Omega \subset V$. Dann ist jedenfalls $x \in U := f^{-1}(\Omega)$ und $f(U) \subset \Omega \subset V$, selbst wenn f nicht stetig wäre. Wegen der Stetigkeit von f ist U aber auch noch offen, insbesondere umgibt es x , und wir haben die geforderte Umgebung schon gefunden. $\Rightarrow \square$

“ $\Leftarrow$ ”: Habe jetzt f die im Lemma genannte Umgebungseigenschaft und sei Ω irgend eine in Y offene Menge. Wie folgt daraus die Offenheit von $f^{-1}(\Omega)$ in X ? Da Ω als offene Menge jeden ihrer Punkte umgibt, hat nach Voraussetzung jedes $x \in f^{-1}(\Omega)$ eine Umgebung, nennen wir sie U_x , mit $f(U_x) \subset \Omega$. Da in jeder Umgebung definitionsgemäß eine *offene* Umgebung steckt, dürfen wir U_x oBdA als offen annehmen, und wegen $f^{-1}(\Omega) = \bigcup_{x \in f^{-1}(\Omega)} U_x$ folgt die Offenheit von $f^{-1}(\Omega)$ aus dem Vereinigungsaxiom. $\Leftarrow \square$

Umgebungen oBdA als offen vorauszusetzen, wie hier im zweiten Teil des Beweises, ist überhaupt sehr oft zulässig und dann meist

auch zu empfehlen, es vereinfacht die nachfolgenden Formulierungen. Freilich muss man jeweils wissen, weshalb es zulässig ist.

Sie sehen schon die Analogie zur ε - δ -Formulierung der Stetigkeit, bei der ε und δ die Rolle von Toleranzmaßen spielen: *und ist das ε auch noch so klein, so muss es doch ein δ geben, so dass* usw. In topologischen Räumen kann man eine erlaubte Toleranz im Allgemeinen nicht mehr durch eine Schranke für den Abstand beschreiben, weil die karge axiomatische Ausstattung keine Abstandsfunktion enthält. Diese Aufgabe müssen die Umgebungen übernehmen: *und ist die Umgebung V auch noch so klein, so muss es doch eine Umgebung U geben, so dass* usw.

In metrischen Räumen aber stimmen der topologisch formulierte und der metrisch formulierte Stetigkeitsbegriff überein. Sind nämlich X und Y metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ wieder eine Abbildung, so folgt aus der topologischen Stetigkeit zu gegebenem $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ die Existenz einer Umgebung U von x , die unter f in der ε -Kugel um $f(x)$ landet, und wir brauchen $\delta > 0$ nur so klein zu machen, dass die δ -Kugel um x in dieses U passt, um die Forderung der metrischen Stetigkeit zu erfüllen. Ist aber umgekehrt f als metrisch stetig vorausgesetzt und V eine offene Umgebung von $f(x)$, so wählen wir zuerst ein $\varepsilon > 0$ so klein, dass die ε -Kugel um $f(x)$ in V enthalten ist. Dann ist jede genügend kleine δ -Kugel um x eine solche Umgebung U , wie sie in der topologischen Stetigkeitsbedingung gefordert wird.

19.3 Kompaktheit

Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X heißt **abgeschlossen**, wenn ihr Komplement $X \setminus A$ offen ist. Weshalb nennt man gerade diese Mengen abgeschlossen?

Mit Blick auf eine gegebene Teilmenge $B \subset X$ lassen sich die Punkte eines topologischen Raumes X immer in drei Klassen einteilen: die Punkte, die von B umgeben werden, heißen die **inneren** Punkte von B , sie bilden das **Innere** $B^\circ \subset B$ von B . Die vom Komplement, also von $X \setminus B$ umgebenen Punkte werden die **äußeren** Punkte von B oder **bezüglich B** genannt, wie man eigentlich sagen müsste, denn Punkte von B sind das ja nicht. Alle übrigen Punkte

heißen **Randpunkte** von (oder besser bezüglich) B , sie bilden den **topologischen Rand** $\dot{B}$ von B .

Die Randpunkte sind also jene Punkte von X , von denen jede Umgebung, wie klein auch immer, sowohl Punkte von B als auch von $X \setminus B$ beherbergt. Der Rand ist gewissermaßen der Ort, wo sich B und Nicht- B treffen. Bei Grenzstreitigkeiten zwischen B und $X \setminus B$ würde es also um diese Randpunkte gehen, denn die Punkte im jeweiligen Landesinneren wären wohl außer Disput. Würde dem B der ganze Rand $\dot{B}$ zugesprochen, so hätte es gleichsam seinen maximalen territorialen Besitzstand erreicht, denn neue Randpunkte und damit neuer Streit würden durch diese Änderung von B nicht entstehen. Man nennt daher $\overline{B} := B \cup \dot{B}$ den **Abschluss** von B , und die *abgeschlossenen* sind eben die Mengen, die in diesem Sinne schon abgeschlossen *sind*, d.h. $A = \overline{A}$ erfüllen, denn das bedeutet ja gerade, dass sich $X \setminus A$ mit seinen inneren Punkten zufrieden geben, also offen sein muss. Daher das Wort.

Bei all diesen Begriffen, insbesondere bei der Abgeschlossenheit, muss Klarheit über X bestehen. Ist zum Beispiel $B \subset X_0 \subset X$, so ist es ein Unterschied, ob man vom Abschluss von B in X , wie oben, oder aber vom Abschluss von B *in* [dem mit der induzierten Topologie versehenen Teilraum] X_0 sprechen will, usw. Zum Beispiel ist X_0 selbst natürlich immer abgeschlossen *in* X_0 , als Komplement der leeren Menge, aber nicht immer in X . Testen Sie Ihren sich entwickelnden Sinn für Topologie an der Aussage *das offene Intervall (a, b) ist abgeschlossen in (a, b)* : wie klingt das?

Im $\mathbb{R}^n$ hatten wir die *Kompaktheit* als einen mit der Abgeschlossenheit scheinbar nahe verwandten Begriff kennengelernt, denn kompakt hießen jene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, die beschränkt und abgeschlossen sind. Das ist aber gewissermaßen nur ein Zufall und für die Verallgemeinerung des Begriffs die falsche Fährte.

Definition: Ein topologischer Raum X heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung hat, das soll heißen, wenn sich zu jeder Familie $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ offener Mengen $U_\lambda \subset X$ mit $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = X$ endlich viele $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda$ so finden lassen, dass bereits $U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_r} = X$ gilt. $\square$

Es gibt verschiedenen Stufen des Verstehens. Die unterste, in der Vorlesung, besteht darin, den Dozenten erst einmal *akustisch* zu verstehen und seine Handschrift lesen zu können, welch letzteres, wie man mir sagt, nicht immer ganz einfach ist.

Die zweite Stufe ist das formale Verstehen. Sind alle Symbole und Fachausdrücke bekannt, die Grammatik eindeutig, kein Missverständnis möglich? Zum Beispiel könnte hier jemand fragen, was mit einer *Familie* von Mengen gemeint sei. Antwort: unter einer **Familie** irgendwelcher mathematischer Objekte, in unserem Falle offener Mengen in X , versteht man eine Zuordnung, die jedem Element λ einer Indexmenge Λ ein solches Objekt U_λ zuordnet, die übliche Notation für so eine Zuordnung $\lambda \mapsto U_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, ist eben $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Zufrieden?

Nein, denn was ist eine *Indexmenge*? Eine Menge, nichts weiter. Der Zusatz *Index-* soll nur daran erinnern helfen, dass es die Elemente dieser Menge sind, denen die Familie etwas zuordnet, und dass sie bei der Notation dieser zugeordneten Objekte als Indices geführt werden.

Na gut, aber trotzdem: *welche* Menge ist Λ in der obigen Definition? $\mathbb{Z}$ oder was? Nein, keine bestimmte. Buchstäblich *jede* nicht-leere Menge Λ kann als Indexmenge einer offenen Überdeckung von X vorkommen, und die Kompaktheitsbedingung verlangt, dass *jede* offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt, auch wenn das im Moment noch so aussieht, als sei das im konkreten Fall kaum nachzuprüfen — wie soll man denn *jede* überhaupt denkbare offene Überdeckung auch nur ins Auge fassen? Wie auch immer: diese Eigenschaft heißt Kompaktheit.

Es kommt immer wieder vor, dass jemand das Kleingedruckte nicht gelesen hat und aus der Formel $U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_r} = X$ schließt: aha, ein Raum X ist kompakt, wenn man ihn durch endlich viele offene Mengen überdecken kann. So jemand hat die zweite Stufe der Erkenntnis noch nicht erklommen. Jeden topologischen Raum kann man sogar mit *einer* offenen Menge überdecken, mit sich selbst nämlich, das ist doch keine interessante Eigenschaft.

Die dritte und höchste Stufe des Verständnisses hat man aber erst erreicht, wenn man sich über den *Sinn* der Definition Rechenschaft geben kann. Was soll das, wozu betrachtet man das, was hat man davon? Auf diese dritte Stufe will ich Sie jetzt heraufheben.

In kompakten Räumen ist es unter bestimmten, genau umschriebenen Fällen möglich, von lokalen Sachverhalten auf globale zu schließen, genauer:

Bemerkung (“Kompaktheitsschluss”): Sei X ein kompakter topologischer Raum und $\mathbf{E}$ bezeichne eine Eigenschaft oder einen Sachverhalt, der für jede offene Teilmenge U von X entweder gilt oder nicht. Überträgt sich $\mathbf{E}$ von U und V auf $U \cup V$ und gibt es um jeden Punkt $x \in X$ eine (“wenn auch noch so kleine”) offene Umgebung U_x , welche die Eigenschaft $\mathbf{E}$ hat, dann hat auch ganz X diese Eigenschaft.

Das ist klar, denn $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_r}$ für geeignete $x_1, \dots, x_r$ weil X kompakt ist, und $\mathbf{E}$ überträgt sich induktiv von $U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_i}$ auf $U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_{i+1}}$, also schließlich auf ganz X . $\square$

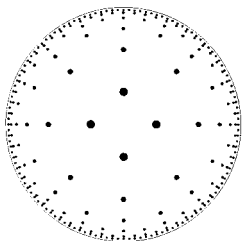
Dass man etwas nur *lokal* weiß, jeweils in einer nicht näher bekannten, vielleicht sehr kleinen Umgebung, ist aber in der Analysis und der Geometrie eine ganz alltägliche Situation. Teils sind die Informationen schon ihrer Natur nach lokal, teils sind sie mittels lokalen Approximationen aus Jacobi-Matrix, Hesseform, Taylorpolynomen gewonnen und aus diesem Grunde nur lokal bekannt. Beim Beweis *globaler* Aussagen ist der Kompaktheitsschluss oft der entscheidende Kunstgriff. Hier ein paar Beispiele.

Beispiel 1: Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem topologischen Raum heißt **lokal beschränkt** wenn es zu jedem $x \in X$ eine oBdA offene Umgebung U_x von x und eine Zahl $c_x \in \mathbb{R}$ mit $|f(u)| \leq c_x$ für alle $u \in U_x$ gibt. Stetige Funktionen sind zum Beispiel immer lokal beschränkt.

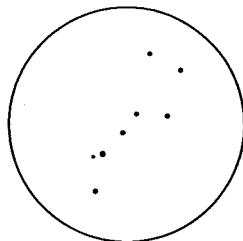
Lokal beschränkte Funktionen brauchen nicht beschränkt zu sein, unbeschränkte stetige Funktionen wie etwa den Tangens auf $X := (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gibt es ja in Hülle und Fülle. Aber der Kompaktheitsschluss sagt uns: *Auf einem kompakten topologischen Raum ist jede lokal beschränkte Funktion auch global beschränkt.* Denn dann ist $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_r}$ für geeignete $x_1, \dots, x_r \in X$ und daher $|f(x)| \leq c := \max\{c_{x_1}, \dots, c_{x_r}\}$ für alle $x \in X$. $\square$

Beispiel 2: Eine Teilmenge $N \subset X$ eines topologischen Raumes X heißt **lokal endlich**, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine oBdA offene

Umgebung U_x hat, in der nur endlich viele der Punkte von N enthalten sind. Eine solche Teilmenge braucht nicht endlich zu sein, zum Beispiel ist $\mathbb{Z}$ lokal endlich in $\mathbb{R}$. Aber mit dem Kompaktheitschluss folgt sofort: *Eine in einem kompakten Raum lokal endliche Teilmenge kann nur endlich viele Elemente haben.* $\square$



$X = \{\vec{x} \mid \|\vec{x}\| < 1\}$, nicht kompakt



$X = \{\vec{x} \mid \|\vec{x}\| \leq 1\}$, kompakt

Die offene Kreisscheibe hat unendliche lokal endliche Teilmengen, die abgeschlossene Kreisscheibe aber nicht.

Beachten Sie übrigens, dass die Eigenschaft der lokalen Endlichkeit nicht der Menge N an sich innewohnt, sondern erst in Bezug auf einen topologischen Raum X mit $N \subset X$ ihren Sinn erhält. So ist zum Beispiel die Menge $N := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ der ‘Stammbrüche’ lokal endlich in dem halboffenen Intervall $(0, 1]$, nicht jedoch in dem kompakten Intervall $[0, 1]$, weil dafür auch der Punkt $0 \in [0, 1]$ eine Umgebung mit nur endlich vielen Stammbrüchen haben müsste, was aber nicht der Fall ist.

Beispiel 3: Wenn wir über die Konvergenz von Funktionenfolgen werden gesprochen haben (Kapitel 24), werden Sie die folgende Anwendung des Kompaktheitsschlusses zu schätzen wissen: *Auf einem kompakten topologischen Raum konvergiert jede lokal gleichmäßig konvergente Funktionenfolge auch global gleichmäßig.* $\square$

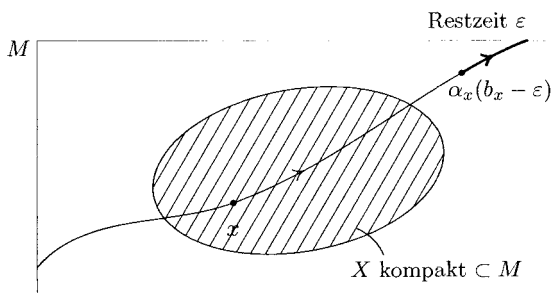
Beispiel 4: Hier aber noch ein Beispiel aus Ihrem Erfahrungsbereich. Betrachten Sie ein Lipschitz-Vektorfeld $\vec{v}$ auf einem offenen Teilgebiet $M \subset \mathbb{R}^n$. Wie in Abschnitt 14.5 schon besprochen, gibt es nach dem Satz von Picard-Lindelöf zu jedem $x \in M$ eine offene Umgebung $U_x \subset M$ und ein $\varepsilon_x > 0$, so dass $(-\varepsilon_x, \varepsilon_x) \times U_x \subset \mathbb{R} \times M$

ganz im Definitionsbereich des maximalen lokalen Flusses liegt, da dieser ja offen ist.

Insbesondere ist dann $|a_u|, b_u \geq \varepsilon_x$ für alle $u \in U_x$, d.h. für Alter und Lebensdauer gibt es lokale positive untere Schranken. Mit dem Kompaktheitsschluss folgt daraus: *Ist $X \subset M$ ein kompakter Teilraum, so gibt es eine auf ganz X gültige positive untere Schranke für Alter und Lebensdauer.* Denn $X = (U_{x_1} \cap X) \cup \dots \cup (U_{x_r} \cap X)$ für geeignete $x_1, \dots, x_r \in X$ und daher

$$|a_u|, b_u \geq \varepsilon := \min\{\varepsilon_{x_1}, \dots, \varepsilon_{x_r}\} \text{ für alle } u \in X.$$

Na und? Na dies: Wenn zum Beispiel $b_x < \infty$ für ein $x \in X$ gilt, dann muss die Flusslinie α_x ihren Lebensabend $t \in (b_x - \varepsilon, b_x)$ jedenfalls außerhalb von X verbringen, denn dann ist die Lebensdauer $b_{\alpha_x(t)} = b_x - t$ jedenfalls kleiner als ε , was in X nicht vorkommt!

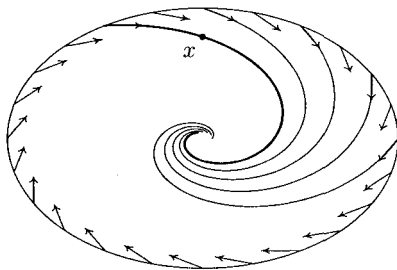


Eine Flusslinie endlicher Lebensdauer muss jeden kompakten Teilraum von M schließlich verlassen.

Wenn aber eine Flusslinie α_x den kompakten Teilraum X aufgrund besonderer Umstände gar nicht verlassen *kann*, etwa weil, anschaulich gesagt, der Rand mit nach innen weisenden Vektoren des Feldes $\vec{v}$ verbarriadiert ist, z.B. speziell wenn eine C^1 -Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $X = f^{-1}((-\infty, c])$ und $\text{grad} f \cdot \vec{v} < 0$ auf X vorhanden ist?

Dann ist eben $b_x = \infty$, die Lösung zum Anfangswert x also für alle positiven Zeiten vorhanden. Analog für das Alter; wissen Sie zum Beispiel, dass eine Funktion $E : M \rightarrow \mathbb{R}$ längs einer Lösung

$\alpha_x : (a_x, b_x) \rightarrow M$ konstant E_0 bleibt — eine Situation die in der Physik etwa im Zusammenhang mit der Energieerhaltung leicht vorkommt — und ist ferner bekannt, dass $E^{-1}(E_0)$ ein kompakter Teilraum von M ist, so folgt $(a_x, b_x) = \mathbb{R}$, die Lösung ist für alle Zeiten definiert.



α kann aus $X = f^{-1}((-\infty, c])$ nicht heraus,
weil $f \circ \alpha$ monoton fällt.

Solche Aussagen über Lösungen von Differentialgleichungssystemen erhalten wir durch einen bloßen Kompaktheitsschluss, gleichsam kostenlos, nämlich ohne dass wir das System dafür lösen müssten, was im konkreten Fall vielleicht auch sehr schwierig sein mag.

19.4 Wie erkennt man kompakte Räume?

Den Kompaktheitsschluss kann man natürlich nur anwenden, wenn man wirklich weiß, dass X kompakt ist. Wie erkennt man das im konkreten Falle?

Direkt von der Definition auszugehen und den Nachweis zu führen, dass jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung hat, ist eher selten zu empfehlen. Zwar kann das in Ausnahmefällen auch ganz einfach sein, wenn zum Beispiel X überhaupt nur endlich viele offene Mengen hat, weil die Topologie trivial ist oder X nur endlich viele Elemente enthält, dann ist X natürlich kompakt. Im Allgemeinen macht man es aber wie bei anderen mathematischen Eigenschaften auch: man kennt einen gewissen Vorrat an Grundbeispielen und weiß, wie aus gegebenen kompakten Räumen neue entstehen, und seine Entstehungsgeschichte

sieht man dem konkreten Falle in der Praxis meist an. Deshalb erkennt man im täglichen Leben die Kompaktheit eines kompakten Raumes gewöhnlich auf einen Blick.

Bei der Etablierung der Grundbeispiele und beim Beweis der Entstehungslemmas muss man freilich auf die Begriffsbestimmung durch die Überdeckungseigenschaft zurückgehen, aber eben zu dem *Zwecke*, es dann später nicht andauernd wieder tun zu müssen.

Im Wesentlichen kommt man überhaupt mit einem einzigen, allerdings grundlegenden Grundbeispiel aus, dem von uns schon immer so genannten *kompakten Intervall*.

Satz: Die sogenannten kompakten Intervalle $[a, b]$ sind wirklich kompakt. $\square$

Beweis im Kapitel 23, das sowieso den Grundlagenfragen der Analysis gewidmet sein wird. Rein topologisch sind aber die drei Lemmas über das Entstehen neuer kompakter Räume aus alten, in Kurzfassung besagen sie:

- Stetige Bilder kompakter Räume sind kompakt.
- Abgeschlossene Teilmengen kompakter Räume sind kompakt.
- Produkte kompakter Räume sind kompakt.

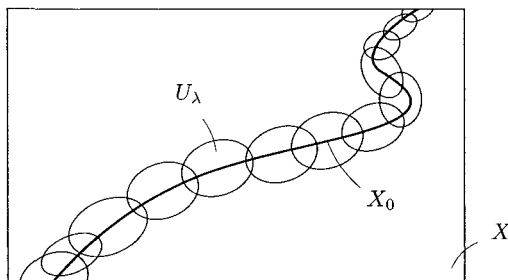
Zuvor noch ein Wort über die Sprechweise ***kompakte Teilmenge***. Davon kann natürlich nur die Rede sein, wenn es sich um eine Teilmenge $X_0 \subset X$ eines topologischen Raumes $(X, \mathcal{O})$ handelt, und *kompakt* nennt man die Teilmenge, wenn eben der topologische Teilraum $(X_0, \mathcal{O}|X_0)$ kompakt ist.

Ob eine gegebene Teilmenge $X_0 \subset X$ kompakt ist, entscheidet sich also allein durch die induzierte Topologie auf X_0 , weitergehende Informationen über die Lage von X_0 in X spielen dabei keine Rolle — sehr im Unterschied etwa zum Begriff der Abgeschlossenheit: ob eine Teilmenge X_0 abgeschlossen in X ist, lässt sich im Allgemeinen nicht aus der induzierten Topologie von X_0 ermitteln, so ist zum Beispiel $(0, \frac{1}{2}]$ abgeschlossen in $(0, 1]$, aber nicht in $[0, 1]$, obwohl die induzierte Topologie beide Male dieselbe ist.

Für Teilräume X_0 lässt sich die Überdeckungseigenschaft auch direkt mittels offener Mengen im großen Raum X ausdrücken, was oft bequemer ist, und zwar so. Da die offenen Mengen des Teilraums gerade die Durchschnitte $U \cap X_0$ von X_0 mit den offenen Mengen $U \subset X$ von X sind, und da $X_0 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (U_\lambda \cap X_0)$ nichts anderes als $X_0 \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ bedeutet, gilt also offenbar:

Notiz: Eine Teilmenge X_0 eines topologischen Raumes X ist genau dann kompakt, wenn sich für jede Familie $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ offener Mengen $U_\lambda \subset X$ mit $X_0 \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ endlich viele $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda$ so finden lassen, dass bereits $X_0 \subset U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_r}$ gilt. $\square$

Verständlicherweise spricht man dann davon, dass jede *Überdeckung* von X_0 durch offene Mengen in X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.



“Überdeckung von X_0 durch offene Mengen in X ”

Lemma 1: Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig und X kompakt, so ist $f(X) \subset Y$ ein kompakter Teilraum.

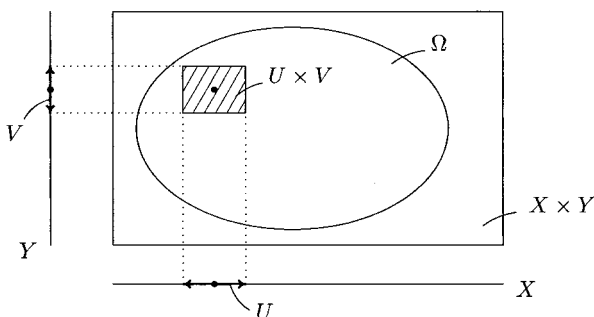
BEWEIS: Sei also $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ eine Überdeckung von $f(X)$ durch offene Mengen in Y , im Sinne der obigen Sprechweise. Dann ist, wegen der Stetigkeit von f , die Familie $\{f^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ der Urbilder eine offene Überdeckung von X , hat wegen der Kompaktheit von X also eine endliche Teilüberdeckung, d.h. für geeignete $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda$ gilt bereits $X = f^{-1}(U_{\lambda_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(U_{\lambda_r})$ und daher für dieselben Indices auch $f(X) \subset U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_r}$. $\square$

Lemma 2: *Abgeschlossene Teilmengen kompakter Räume sind kompakt.*

BEWEIS: Sei X kompakt und $A \subset X$ abgeschlossen. Sei $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ eine Überdeckung von A durch offene Mengen in X . Dann ergänzt die offene Menge $X \setminus A$ diese Familie zu einer offenen Überdeckung von X selbst. Wegen der Kompaktheit von X gibt es also jedenfalls $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \Lambda$ mit $X = U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_r} \cup (X \setminus A)$ und daher mit $A \subset U_{\lambda_1} \cup \dots \cup U_{\lambda_r}$. $\square$

In der Praxis begegnen uns solche abgeschlossenen Teilmengen oft als Urbilder $f^{-1}(B)$ abgeschlossener Mengen $B \subset Y$ unter stetigen Abbildungen $f : X \rightarrow Y$, denn da die Urbilder offener Mengen offen sind, sind auch die Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen. Insbesondere sind die einpunktigen Mengen $B = \{b_0\}$ meistens (in Hausdorffräumen immer) abgeschlossen, und dann definiert also ein stetiges Gleichungssystem $f(x) = b_0$ auf einem kompakten Raum X auch eine kompakte Erfüllungsmenge $\{x \in X \mid f(x) = b_0\}$.

Um das dritte Lemma formulieren zu können, muss ich erst noch erklären, was man unter dem Produkt zweier topologischer Räume versteht.



$\Omega \subset X \times Y$ heißt offen, wenn es um jeden Punkt ein "offenes Kästchen" $U \times V$ enthält.

Definition: Sind X und Y topologische Räume, so heißt eine Teilmenge $\Omega \subset X \times Y$ *offen in der Produkttopologie*, wenn es zu

jedem Punkt $(x, y) \in \Omega$ offene Umgebungen U von x in X und V von y in Y mit $U \times V \subset \Omega$ gibt. Der topologische Raum, zu dem $X \times Y$ durch die Produkttopologie wird, heißt der **Produktraum** oder einfach **das Produkt** der topologischen Räume X und Y . $\square$

Je mehr Begriffe man kennenlernt, desto mehr Querverbindungen tun sich auf, das ist einmal so. Denken Sie zum Beispiel an zwei Teilmengen $X \subset \mathbb{R}^n$ und $Y \subset \mathbb{R}^k$ mit der jeweils induzierten Topologie. Dann hat $X \times Y \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{n+k}$ jetzt zwei Topologien: zum einen die induzierte Topologie als topologischer Teilraum von $\mathbb{R}^{n+k}$, zum anderen die Produkttopologie! Aber unbesorgt, Induzieren und Multiplizieren sind in der Topologie verträglich, wie man sich leicht überlegt; die beiden Topologien stimmen überein. Andernfalls hätte auch die Notation gewiss gut sichtbare Warnschilder aufgestellt.

Lemma 3: *Produkte kompakter Räume sind kompakt.*

BEWEIS: Seien also X und Y kompakte topologische Räume und $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ eine offene Überdeckung von $X \times Y$. Wähle zu jedem Punkt (x, y) ein $\lambda(x, y) \in \Lambda$ und ein offenes Kästchen

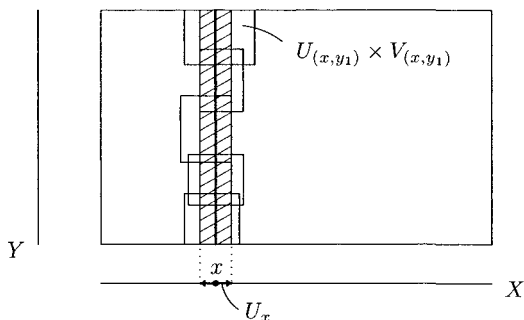
$$U_{(x,y)} \times V_{(x,y)} \subset \Omega_{\lambda(x,y)}$$

um (x, y) . Es genügt zu zeigen, dass $X \times Y$ bereits von endlich vielen der so gewählten offenen Kästchen überdeckt wird.

Für jedes feste $x \in X$ ist nun $\{V_{(x,y)}\}_{y \in Y}$ eine offene Überdeckung von Y , und hat daher, weil Y kompakt ist, eine endliche Teilüberdeckung, $Y = V_{(x,y_1)} \cup \dots \cup V_{(x,y_{r(x)})}$. Sei nun U_x der Durchschnitt der entsprechenden Umgebungen von x in X , also $U_x := U_{(x,y_1)} \cap \dots \cap U_{(x,y_{r(x)})}$, wie in der Skizze auf der folgenden Seite illustriert. Da auch X kompakt ist, gilt dann $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_s}$ für geeignete $x_1, \dots, x_s \in X$, und folglich ist

$$X \times Y = \bigcup_{i=1}^s \bigcup_{j=1}^{r(x_i)} U_{(x_i,y_j)} \times V_{(x_i,y_j)},$$

und damit ist $X \times Y$ als kompakt nachgewiesen. $\square$



Zum Beweis der Kompaktheit des Produkts kompakter Räume

Als Korollar aus dem Satz von der Kompaktheit der kompakten Intervalle erhalten wir nun mittels der Lemmas 2 und 3 leicht den bekannten *Satz von Heine-Borel*, der unseren Gebrauch des Wortes *kompakt* aus dem Kapitel 6 nun auch in Bezug auf die topologische Kompaktheitsdefinition legitimiert.

Satz von Heine-Borel: *Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ ist mit der induzierten Topologie genau dann ein kompakter topologischer Raum, wenn X in $\mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen ist.*

BEWEIS: “ $\Rightarrow$ ”: Sei also $X \subset \mathbb{R}^n$ kompakt im topologischen Sinne. Nach dem Kompaktheitsargument ist X jedenfalls beschränkt, überdecke z.B. X mit endlich vielen offenen Kugeln. Angenommen, X wäre nicht abgeschlossen als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Dann gäbe es einen Punkt $p \in \mathbb{R}^n \setminus X$, der in jeder seiner Umgebungen auch Punkte von X beherbergt, und deshalb könnte die Überdeckung von X durch die Familie $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - p\| > \frac{1}{k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^n$ offener Mengen keine endliche Teilüberdeckung haben und X deshalb nicht kompakt sein. $\Rightarrow \square$

“ $\Leftarrow$ ”: Sei also jetzt $X \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen. Wegen der Beschränktheit ist X jedenfalls in einem großen Würfel $W := [-c, c]^n \subset \mathbb{R}^n$ enthalten. Auch im Würfel ist X noch abgeschlossen, denn sein Komplement im Würfel ist ja $W \setminus X = W \cap (\mathbb{R}^n \setminus X)$, also offen in der Topologie des Würfels. Nach Lemma 3 ist der Würfel als Produkt kompakter Intervalle kompakt — hier geht der Satz

von der Kompaktheit der kompakten Intervalle ein. Nach Lemma 2 ist also auch X kompakt. $\Leftarrow \square$

Der Satz von Heine-Borel lädt zu der Vermutung ein, man könne vielleicht in beliebigen metrischen Räumen die kompakten Teilmengen als die beschränkten abgeschlossenen charakterisieren. Dass jede kompakte Teilmenge X eines metrischen Raumes M beschränkt und abgeschlossen sein muss, ist auch wahr, es folgt mit genau derselben Argumentation wie oben im ersten Teil des Beweises für den $\mathbb{R}^n$. Die Umkehrung ist aber falsch, nehmen Sie beispielsweise das offene Intervall $(0, 1)$ als den metrischen Raum M , dann ist $X := M$ selbst beschränkt, und abgeschlossen als der ganze Raum sowieso, aber nicht kompakt.

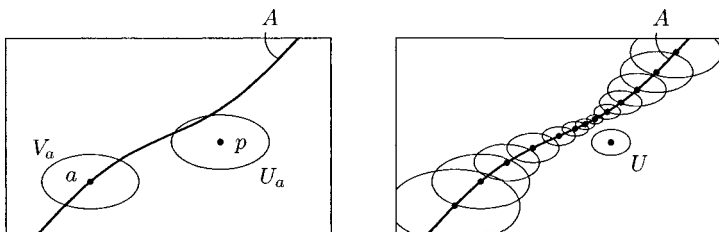
Das simple Gegenbeispiel wirkt wie eine Fopperei, man glaubt nach geringem Nachdenken müsse einem eine vernünftige, natürliche Zusatzforderung an den metrischen Raum M einfallen, die den Heine-Borel für M dann sichert. So einfach ist das aber nicht², Kompaktheit in metrischen Räumen lässt sich nicht im Handstreich erledigen.

In beliebigen topologischen Räumen brauchen die kompakten Teilmengen nicht einmal abgeschlossen zu sein, so ist in Räumen mit nur endlich vielen Punkten jede Teilmenge kompakt, aber nicht jede Teilmenge braucht abgeschlossen zu sein, denke etwa an die triviale Topologie. Hier gibt es aber eine einfache Zusatzbedingung, die solchen Beispielen Einhalt gebietet. Es gilt nämlich:

Lemma 4: *In einem Hausdorffraum ist jede kompakte Teilmenge abgeschlossen.*

BEWEIS: Sei also X ein Hausdorffraum und $A \subset X$ kompakt. Es genüge zu zeigen, dass jeder Punkt $p \in X \setminus A$ eine offene Umgebung U hat, die A nicht trifft, denn dann wäre ja $X \setminus A$ offen und A daher abgeschlossen. Sei also $p \in X \setminus A$ und suchen wir U .

Da wir in einem Hausdorffraum sind, können wir zu jedem $a \in A$ disjunkte offene Umgebungen U_a von p und V_a von a in X finden.



$$U_a \cap V_a = \emptyset, \text{ also } (\bigcap_i U_{a_i}) \cap (\bigcup_i V_{a_i}) = \emptyset$$

Da A kompakt ist, gilt $A \subset V_{a_1} \cup \dots \cup V_{a_r}$ für geeignete $a_1, \dots, a_r \in A$, und daher löst $U := U_{a_1} \cap \dots \cap U_{a_r}$ unser Problem. $\square$

Aus den Lemmas 1, 2 und 4 gewinnen wir als Korollar nun einen schönen und nützlichen Satz über die Umkehrung stetiger Bijektionen, den wir gleich im nächsten Kapitel gut gebrauchen können.

Unter einem **Homöomorphismus** $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen versteht man eine *bijektive* Abbildung, die in beide Richtungen stetig ist, d.h. dass sowohl $f : X \rightarrow Y$ als auch $f^{-1} : Y \rightarrow X$ stetig sind. Betrachtet man die stetigen Abbildungen als die ‘Morphismen’ für die topologischen Räume, so wären die Homöomorphismen also die ‘Iso-Morphismen’, analog zu der Sichtweise in anderen axiomatischen Strukturen, die uns schon begegnet sind. **Homöomorphe Räume**, d.h. solche, zwischen denen ein Homöomorphismus existiert, unterscheiden sich in topologischer Hinsicht so gut wie gar nicht. Ein Homöomorphismus $f : X \rightarrow Y$ übersetzt jede richtige Aussage über X , die sich in der Sprache der offenen Mengen formulieren lässt, also topologischer Natur ist, in eine ebenso richtige Aussage über Y , weil die offenen Mengen in X und Y einander unter f genau entsprechen.

Wenn Sie einen topologischen Raum X verstehen sollen, der im Zuge irgendwelcher mathematischen Konstruktionen mit entstanden ist, und er schaut Sie so fremd an, dann ist es ein Glücksfall, wenn Sie einen Homöomorphismus zwischen X und einem Ihnen wohlvertrauten Raum Y finden können. Mit einem Schlag sind Sie aller topologischer Sorgen ledig. Zuweilen bietet sich ein kanonischer Kandidat $f : X \rightarrow Y$ für einen solchen Homöomorphismus

an, man sieht dass er stetig und bijektiv ist und kann ihm doch nicht trauen, weil man nicht weiß, ob auch $f^{-1} : Y \rightarrow X$ wirklich stetig ist.

In manchen anderen axiomatischen Strukturen sind die bijektiven Morphismen automatisch stets Isomorphismen, also f^{-1} wieder ein Morphismus, so war es zum Beispiel bei den Gruppenhomomorphismen und bei den linearen Abbildungen. In der Topologie aber nicht, wickeln Sie zum Beispiel das halboffene Intervall $[0, 2\pi)$ mittels $f(t) := (\cos t, \sin t)$ stetig und bijektiv auf die Kreislinie $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ auf, dann ist $f^{-1} : S^1 \rightarrow [0, 2\pi)$ am Punkte $f(0)$ unstetig, es zerreißt dort gewissermaßen die Kreislinie. In der Tat sind die Kreislinie und das halboffene Intervall auch gar nicht homöomorph, weil die Kreislinie kompakt ist, das halboffene Intervall aber nicht.

Das Beispiel sollte nur zeigen, dass es stetige Bijektionen gibt, die keine Homöomorphismen sind; eine Schwierigkeit in der *Beurteilung* der inversen Abbildung bietet es natürlich nicht. Im Allgemeinen kann es aber ziemlich schwierig sein, die Stetigkeit einer Umkehrabbildung *durch Inspektion* zu zeigen, d.h. durch Ausrechnen und Hinschauen, weil dieses Ausrechnen z.B. auf das Lösen nicht-linearer Gleichungssysteme hinauslaufen kann. Deshalb soll man einen Satz, der die Stetigkeit der Umkehrabbildung in vielen Fällen kostenlos garantiert, fein in Ehren halten:

Satz: *Eine stetige Bijektion von einem kompakten Raum auf einen Hausdorffraum ist stets ein Homöomorphismus.*

BEWEIS: Sei also $f : X \rightarrow Y$ stetig und bijektiv, X kompakt und Y hausdorffsch. Eine Abbildung ist stetig, wenn die Urbilder offener Mengen offen oder, was dasselbe ist, wenn die Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind. Wir haben die Stetigkeit von $f^{-1} : Y \rightarrow X$ zu zeigen, sei also $A \subset X$ abgeschlossen. Das Urbild von A ist dann $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A) \subset Y$. Aber A ist kompakt als abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raumes X (Lemma 2), $f(A)$ ist kompakt als stetiges Bild eines kompakten Raumes (Lemma 1) und deshalb abgeschlossen als kompakte Teilmenge des Hausdorffraumes Y (Lemma 4). $\square$

19.5 Übungsaufgaben

Aufgabe R19.1: Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Für je zwei Vektoren $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ im $\mathbb{R}^2$ werde ein Abstand durch

$$d(x, y) := a|y_1 - x_1| + b|y_2 - x_2|$$

definiert. Für welche a, b sind die Metrik-Axiome erfüllt?

Aufgabe T19.1: a) Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Zeigen Sie, dass auch $g \circ f$ stetig ist. b) Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig, Y ein Hausdorffraum, $y_0 \in Y$. Zeigen Sie, dass $f^{-1}(y_0)$ abgeschlossen ist.

Aufgabe T19.2: Sei X eine Menge. Führen Sie eine Metrik d auf X ein, die $(X, \mathcal{O}(d))$ zum diskreten topologischen Raum macht.

Aufgabe T19.3: Sei X ein topologischer Raum. Unter einer Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ in X versteht man eine Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow X$, notiert als $n \mapsto x_n$. Man sagt, die Folge konvergiere gegen $a \in X$, wenn es zu jeder offenen Umgebung U von a ein n_0 gibt, so dass $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Beweisen Sie: a) Eine Folge in einem Hausdorffraum kann gegen höchstens einen Punkt konvergieren. b) Konvergiert in einem topologischen Raum X jede Folge überall hin, so ist X trivial.

Aufgabe T19.4: Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *stetig bei* $a \in X$, wenn für jede Umgebung V von $f(a)$ auch $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von a ist. Beweisen Sie: a) Ist f stetig bei a und konvergiert $(x_n)_{n \geq 1}$ gegen a , so konvergiert auch $(f(x_n))_{n \geq 1}$ gegen $f(a)$. b) Ist X ein metrischer Raum, $a \in X$ und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung mit der Eigenschaft, dass für jede gegen a konvergierende Folge auch die Bildfolge gegen $f(a)$ konvergiert, so ist f bei a stetig.

Aufgabe T19.5: Ist $(x_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in X und $(n_k)_{k \geq 1}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}$, so heißt $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ eine Teilfolge von $(x_n)_{n \geq 1}$. Zeigen Sie, dass in einem kompakten metrischen Raum jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.

Aufgabe T19.6: Sei $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion. Mit $(q, p) := (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ seien die Koordinaten im $\mathbb{R}^{2n}$ bezeichnet. Zeigen Sie zunächst, dass H ein erstes Integral für das System

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{und} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

$i = 1, \dots, n$ ist. Über H sei nun weiter bekannt, dass es zu jedem C ein R gibt, so dass $H(q, p) \geq C$ für alle (q, p) mit $\|(q, p)\| \geq R$. Folgern Sie daraus mittels eines Kompaktheitsschlusses, dass die Lösungen des Systems für alle Zeiten definiert sind.

20.1 Kategorien

Sie haben nun zwar einige axiomatische Strukturen gesehen, aber eine formale Definition dessen, was unter einer *axiomatischen Struktur* zu verstehen sei, kennen Sie noch nicht. Eine solche bietet der Oberbegriff der *Kategorie*, für den die Strukturen der Gruppen, Ringe, Körper, der Vektorräume, metrischen Räume, topologischen Räume einzelne Beispiele sind. Der Kategorienbegriff hilft Ihnen, Ihre wachsenden strukturmathematischen Kenntnisse zu überschauen und künftige neue Strukturen einzuordnen.

Definition: Eine *Kategorie* ist ein Tripel $(\mathbf{Ob}, \text{Mor}, \circ)$, bestehend erstens aus einer Klasse $\mathbf{Ob}$ von *Objekten* — womit einfach gemeint ist, dass eine Definition vorliegt, die angibt, was unter einem solchen ‘Objekt’ zu verstehen sei — zweitens aus ... [Fortsetzung folgt]

Ich fahre in der Definition gleich fort, will Ihnen aber erst erzählen, weshalb wir im Hinblick auf die schon betrachteten Beispiele nicht von einer *Menge* von Objekten sprechen mögen, etwa von der “Menge aller topologischen Räume”. Das liegt an den schlechten Erfahrungen, welche die Mathematiker Ende des 19. Jahrhunderts mit Ausdrücken wie “die Menge aller Mengen” gemacht haben.

Die Menge $\mathcal{M}$ aller Mengen? Dazu gehörte ja auch $\mathcal{M}$ selbst, also $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$, eine Menge, die sich selbst als Element enthält? Je nun, weshalb nicht. Es gäbe demnach Mengen, die sich selbst

enthalten und solche, die sich nicht selbst enthalten. Sei $\mathcal{N}$ die Menge aller der Mengen, die sich *nicht* selbst als Element enthalten. Eine Menge X ist also genau dann Element von $\mathcal{N}$, wenn sie nicht Element von sich selbst ist,

$$X \in \mathcal{N} \iff X \notin X.$$

Frage: Enthält $\mathcal{N}$ sich selbst als Element? Antwort:

$$\mathcal{N} \in \mathcal{N} \iff \mathcal{N} \notin \mathcal{N}.$$

Oha. Ein Widerspruch — aber wozu? Zu der Annahme, man könne sinnvoll von der “Menge aller Mengen” und der “Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten” sprechen. Um aber in der Definition des Kategorienbegriffs fortzufahren:

... zweitens also aus einer Zuordnung Mor , die jedem Paar (A, B) von Objekten aus **Ob** eine Menge (diesmal wirklich eine Menge) $\text{Mor}(A, B)$ zuordnet, deren Elemente im Folgenden **Morphismen** genannt werden, und drittens aus einer Verknüpfung $\circ$, die je drei Objekten A, B, C eine Abbildung

$$\text{Mor}(B, C) \times \text{Mor}(A, B) \rightarrow \text{Mor}(A, C),$$

notiert als $(f, g) \mapsto f \circ g$, zuweist, derart dass die beiden Axiome gelten:

- (1) Die Verknüpfung ist assoziativ, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
- (2) Für jedes Objekt A gibt es ein Element $1_A \in \text{Mor}(A, A)$, welches $f \circ 1_A = f$ und $1_A \circ g = g$ für alle $f \in \text{Mor}(A, B)$ und $g \in \text{Mor}(B, A)$ erfüllt. $\square$

Die Morphismen $f \in \text{Mor}(A, B)$ werden auch als $f : A \rightarrow B$ notiert, ohne dass damit gefordert wäre, den Objekten müssten Mengen zugrunde liegen und die Morphismen müssten Abbildungen sein. In den meisten Anwendungsbeispielen ist es aber doch so, der neutrale Morphismus 1_A ist dann die Identität auf A , und es schadet gar nichts, wenn Sie sich das intuitiv so vorstellen.

Ein Morphismus $f \in \text{Mor}(A, B)$ heißt ein **Isomorphismus** in der Kategorie, wenn es einen Morphismus $g \in \text{Mor}(B, A)$ mit $f \circ g = 1_B$ und $g \circ f = 1_A$ gibt.

Sie sehen sofort, dass die *Mengen* als Objekte mit den *Abbildungen* als Morphismen und der gewöhnlichen Abbildungs-Verknüpfung $(f, g) \mapsto f \circ g$ eine Kategorie bilden, die **Kategorie der Mengen**, wie man kurz sagt. Die Isomorphismen in dieser Kategorie sind einfach die bijektiven Abbildungen.

Desgleichen bilden die *Gruppen* als Objekte mit den *Gruppenhomomorphismen* als Morphismen die **Kategorie der Gruppen**, analog die Kategorie der Ringe, die Kategorie der Körper. Ist $\mathbb{K}$ ein Körper, so bilden $\mathbb{K}$ -Vektorräume als Objekte zusammen mit den $\mathbb{K}$ -linearen Abbildungen als Morphismen die **Kategorie der Vektorräume**, auch die **lineare Kategorie** genannt, über $\mathbb{K}$, die Isomorphismen dieser Kategorie sind das, was man beim Studium zuerst unter diesem Namen kennenlernt: die linearen Isomorphismen zwischen Vektorräumen.

Die metrischen Räume als Objekte bilden mit den isometrischen Abbildungen eine Kategorie, und die metrischen Räume als Objekte und die *stetigen* Abbildungen als Morphismen bilden eine andere, aber eben so wichtige Kategorie. Schließlich finden Sie in Ihrem bisherigen Erfahrungsbereich noch die **topologische Kategorie** der topologischen Räume als Objekte und der stetigen Abbildungen als Morphismen, deren Isomorphismen also die Homöomorphismen sind.

In der Mathematik werden sehr viele Kategorien studiert, ein Mathematikstudent lernt während seines Studiums gewiss ein paar Dutzend davon kennen. Die Fragestellungen und vor allem die *Methoden* der modernen Mathematik haben oft mit den Beziehungen, den *Funktoren* zwischen verschiedenen Kategorien zu tun, worauf ich nicht näher eingehen will. Sollten Sie aber hochgezogenen Augenbrauen begegnen, die etwa sagen wollen: “Kategorien? Für Physiker im ersten Semester?“, dann bestellen Sie meinen Gruß und ich ließe ausrichten, dass gerade jungen Leuten, die sich ein Bild von der Mathematik zu machen suchen und mit der Fülle der Begriffe

kämpfen, das Leben durch Bekanntschaft mit diesem Ordnungsprinzip etwas leichter gemacht werden sollte.

20.2 Äquivalenzrelationen

Unter einer **Relation** auf einer Menge X versteht man zwar einfach eine Teilmenge von $X \times X$, aber eine Teilmenge $R \subset X \times X$ so zu nennen geht meist damit einher, die Aussage $(x, y) \in R$ mittels eines gewählten ‘Relationssymbols’ wie “ $\prec$ ” oder “ $\sim$ ” als $x \prec y$ oder $x \sim y$ oder dergleichen zu notieren.

Definition: Eine Relation $\sim$ auf einer Menge X heißt eine **Äquivalenzrelation**, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, d.h. wenn die drei Bedingungen

- (1) Für alle $x \in X$ gilt $x \sim x$,
- (2) Aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$,
- (3) Aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt $x \sim z$

erfüllt sind. Für jedes $x \in X$ heißt dann $[x] := \{y \in X \mid y \sim x\}$ die **Äquivalenzklasse** von x , die Menge $X/\sim := \{[x] \mid x \in X\}$ aller Äquivalenzklassen heißt die **Quotientenmenge** von X nach $\sim$, und die Abbildung

$$\pi : X \rightarrow X/\sim, x \mapsto [x],$$

die jedem Element seine Äquivalenzklasse zuordnet, die **Quotientenabbildung** oder **kanonische Projektion**. $\square$

Im Wesentlichen gleichbedeutend mit dem Begriff der Äquivalenzrelation auf X ist der einer **Zerlegung** von X . Damit ist gemeint:

Definition: Unter einer **Zerlegung** $\mathcal{Z}$ einer Menge X versteht man eine Menge von paarweise disjunkten, nichtleeren Teilmengen von X , deren Vereinigung ganz X ist. $\square$

Ist $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von X , und nennt man x und y äquivalent bezüglich $\mathcal{Z}$, wenn sie derselben Zerlegungsmenge $Z \in \mathcal{Z}$ angehören, so ist dadurch offensichtlich eine Äquivalenzrelation $\sim_{\mathcal{Z}}$ auf X

definiert. Umgekehrt definiert jede Äquivalenzrelation eine Zerlegung, denn es gilt:

Lemma: Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X , so ist die Menge $X/\sim$ der Äquivalenzklassen eine Zerlegung von X .

BEWEIS: Führen wir den Beweis, zu um so schnellerem Gewöhnen an den Umgang mit Äquivalenzklassen, ruhig einmal ganz langsam aus. Zu zeigen haben wir, dass die Äquivalenzklassen nicht leer, paarweise disjunkt und ihre Vereinigung ganz X ist. Über $\sim$ wissen wir nicht mehr, als dass es die Eigenschaften (1)-(3) hat.

Wegen (1) gilt $x \in [x]$ für jedes $x \in X$, also ist die Teilmenge $[x] \subset X$ jedenfalls nicht leer, sie enthält ja x , und aus demselben Grunde ist die Vereinigung $\bigcup_{x \in X} [x]$ ganz X . Für diese Feststellungen haben wir die Eigenschaften (2) und (3) noch gar nicht gebraucht.

Zu zeigen bleibt, dass die Äquivalenzklassen paarweise disjunkt sind, das heißt dass je zwei *verschiedene* Äquivalenzklassen leeren Durchschnitt haben, oder, was ja dasselbe bedeutet, dass zwei Äquivalenzklassen mit einem gemeinsamen Element schon gleich sein müssen. Sei also $z \in [x] \cap [y]$. Wir haben nun $[x] = [y]$ zu zeigen (nicht etwa $x = y$, das wäre etwas zu viel verlangt!).

Für jedes $u \in [x]$ gilt $u \sim x$ nach Definition von $[x]$, und es gilt $z \sim x$ und $z \sim y$ nach Annahme. Dann auch $x \sim z$ nach (2) und wegen $u \sim x \sim z$ also $u \sim z$ nach (3) und somit $u \sim z \sim y$, also $u \sim y$ nochmals nach (3), und das heißt $u \in [y]$. Also haben wir $[x] \subset [y]$ gezeigt, und da die Voraussetzungen ganz symmetrisch in Bezug auf x und y sind, auch $[y] \subset [x]$, insgesamt also $[x] = [y]$. $\square$

Dass jede Zerlegung zu einer Äquivalenzrelation und jede Äquivalenzrelation zu einer Zerlegung Anlass gibt, besagte an sich noch nicht so viel, aber der springende Punkt ist, dass diese Vorgänge *invers zueinander* sind. Starten wir mit einer Zerlegung $\mathcal{Z}$ von X und bilden die zugehörige Äquivalenzrelation $\sim_{\mathcal{Z}}$, so sind deren Äquivalenzklassen gerade die Zerlegungsmengen $Z \in \mathcal{Z}$, und starten wir mit einer Äquivalenzrelation $\sim$ und bilden die zugehörige Zerlegung $X/\sim$ in Äquivalenzklassen, so ist die zu dieser Zerlegung gehörige Äquivalenzrelation $\sim_{X/\sim}$ keine andere als $\sim$ selbst. In die-

sem Sinne sind also Zerlegungen und Äquivalenzrelationen nur zwei verschiedene Weisen von derselben Sache zu reden.

Der mathematische Begriff der Zerlegung ist intuitiv ganz leicht zu erfassen, weil das deutsche Wort *Zerlegung* die Situation schon richtig beschreibt (eine Menge wird in Teilmengen *zerlegt*), während eine Äquivalenzrelation mehr wie ein verklausuliertes Rezept zur *Herstellung* einer Zerlegung aussehen mag. Im konkreten Fall ist es aber oft so, dass das Rezept $\sim$ vorliegt und leicht zu verstehen ist, Information über die daraus sich ergebende Zerlegung $X/\sim$ aber erst noch erarbeitet werden muss. Das ist dann gerade die Aufgabe der *Klassifikation der Elemente von X bis auf die Äquivalenzrelation $\sim$* . Dafür ein einfaches Beispiel.

Sei $X := M(m \times n, \mathbb{R})$ der Raum der reellen $m \times n$ -Matrizen. Zwei Matrizen A und B sollen *äquivalent* heißen, $A \sim B$, wenn es invertierbare Matrizen P und Q gibt, so dass $B = PAQ^{-1}$ gilt, d.h. so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{B} & \mathbb{R}^m \\ Q \uparrow \cong & & \cong \uparrow P \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

kommutativ ist. Ersichtlich ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation, denn

- (1) $A = E_m A E_n^{-1}$
- (2) Aus $B = PAQ^{-1}$ folgt $A = P^{-1} B Q$
- (3) Aus $B = PAQ^{-1}$ und $C = RBS^{-1}$ folgt $C = (RP)A(SQ)^{-1}$.

Was aber ist $M(m \times n, \mathbb{R})/\sim$? Diese Klassifikationsaufgabe wird durch den *Rangsatz* (Abschnitt 9.3) gelöst, wonach $A \sim B$ gleichbedeutend mit $\text{rg } A = \text{rg } B$ ist. Ist k der größtmögliche Rang, den eine $m \times n$ -Matrix haben kann, also $k = \min(m, n)$, so hat demnach $M(m \times n, \mathbb{R})/\sim$ genau $k+1$ Elemente, es sind die Äquivalenzklassen $[E_0^{m \times n}], \dots, [E_k^{m \times n}]$ der Standard-Matrizen

$$E_r^{m \times n} := \left\{ \begin{array}{cc|cc} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \hline & & 0 & 0 \end{array} \right\}^r.$$

Dies also als ein Beispiel dafür, dass Äquivalenzrelationen benutzt werden, um Klassifikationsaufgaben zu formulieren. Es gibt aber noch einen ganz anderen Verwendungszweck der Äquivalenzrelationen, nämlich die Erschaffung neuer interessanter Objekte $X/\sim$ und Morphismen $\pi : X \rightarrow X/\sim$ in den verschiedensten Kategorien durch *Quotientenbildung*, wie man sagt.

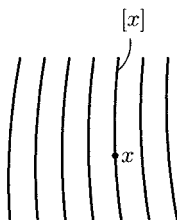
Quotientenbildung ist ein zentrales Definitionsprinzip der modernen Mathematik. Ohne Quotientenbildung geht es heute einfach nicht mehr, und Sie müssen die Quotientenbildung nicht nur formal verstehen, das sowieso, sondern auch intuitiv sich aneignen und verinnerlichen.

Es ist rätselhaft, weshalb manche Studenten so heftigen emotionalen Widerstand leisten, wenn sie die Quotientenbildung lernen sollen. Das sei schwierig! Aber worin *besteht* die Schwierigkeit, wenn die Menge $X/\sim$ der Äquivalenzklassen betrachtet und je nach Kategorie mit der naheliegenden Struktur versehen wird? *Inwiefern* hat die Abbildung $x \mapsto [x]$ etwas Mysteriöses an sich?

Eine didaktische Herausforderung. Sehen Sie sich einmal als Testperson dafür an, ob ich dieser Herausforderung in den nächsten beiden Abschnitten erfolgreich begegne.

20.3 Quotienten

Zunächst eine Frage: Wie stellen Sie sich $X/\sim$ anschaulich vor, wenn ich in einer einfachen Skizze die einzelnen Äquivalenzklassen so durch Striche andeute?



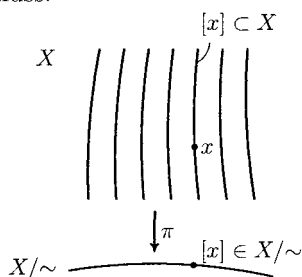
X in Äquivalenzklassen zerlegt

Was Sie hier sehen, ist das in Äquivalenzklassen zerlegte X , jeder Strich eine Äquivalenzklasse, ähnlich wie wir ein Phasenportrait

durch Skizzierung der Orbits andeuten — aller Orbits, wenn das möglich wäre, ersatzweise eben einiger, so dass man die anderen ahnt. Nun also, wie sieht $X/\sim$ anschaulich aus?

Die naive und nicht eigentlich falsche Antwort wäre: na, genau so! Die Striche sind die Äquivalenzklassen, die Menge dieser Striche sehen wir vor uns, das ist $X/\sim$. Was denn sonst?

Sehen Sie, und dabei dürfen Sie nicht stehenbleiben, sondern Sie müssen akzeptieren, dass $X/\sim$ samt der Abbildung $\pi : X \rightarrow X/\sim$ so gedacht werden muss:



X mit der Quotientenabbildung auf $X/\sim$

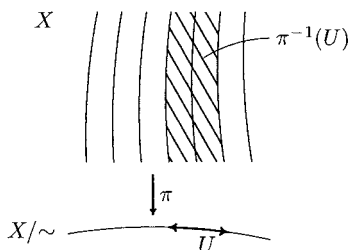
Ja wie denn: sollen wir uns $[x]$ nun als Strich oder als Punkt vorstellen? Als Strich in X , aber als Punkt in $X/\sim$, wie es ja auch dem Sachverhalt

$$[x] \subset X, \quad \text{aber} \quad [x] \in X/\sim.$$

entspricht. Wenn Sie sich $X/\sim$ als Objekt in seinem eigenen Recht vorstellen wollen, dann müssen Sie nach einer Veranschaulichung greifen, die seine Elemente als Punkte darstellt. Jederzeit $[x]$ in seiner ganzen Ausdehnung als Teilmenge $[x] \subset X$ visualisieren zu wollen behindert die Intuition: in $X/\sim$ ist's nur ein Punkt.

Natürlich geht es in der Praxis nicht nur um $X/\sim$ als *Menge*, sondern man versieht es von Fall zu Fall mit weiterer Struktur, etwa mit einer Topologie, wenn wir in der topologischen Kategorie arbeiten oder nach Möglichkeit mit einer Gruppenverknüpfung, wenn wir in der Kategorie der Gruppen sind, usw. Ich zeige Ihnen das einmal am Beispiel der topologischen Kategorie.

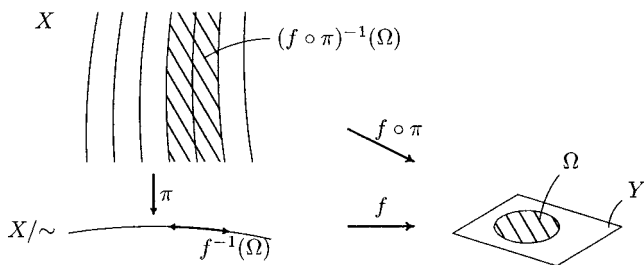
Definition: Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einem topologischen Raum X , so heißt eine Teilmenge $U \subset X/\sim$ **offen in der Quotiententopologie**, wenn $\pi^{-1}(U) \subset X$ offen in X ist.



Teilmenge $U \subset X/\sim$ und ihr Urbild $\pi^{-1}(U)$ in X

Versehen mit dieser Topologie heißt $X/\sim$ der **Quotientenraum** von X nach $\sim$. $\square$

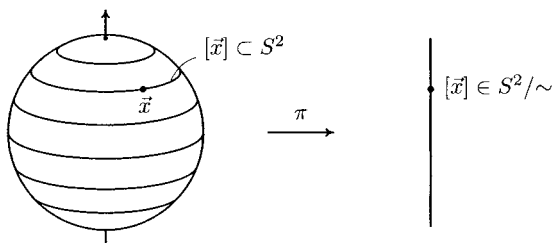
Die Quotientenabbildung $\pi : X \rightarrow X/\sim$ ist offenbar stetig (Urbilder offener Mengen offen: so ist die Quotiententopologie ja gerade definiert), und ist Y ein weiterer topologischer Raum, so ist eine Abbildung $f : X/\sim \rightarrow Y$ genau dann stetig, wenn $f \circ \pi : X \rightarrow Y$ es ist, denn $(f \circ \pi)^{-1}(\Omega) = \pi^{-1}(f^{-1}(\Omega))$, also ist $f^{-1}(\Omega)$ genau dann offen in $X/\sim$, wenn $(f \circ \pi)^{-1}(\Omega)$ offen in X ist.



Zur Stetigkeit von Abbildungen, die auf einem Quotientenraum definiert sind.

Hier ein einfaches konkretes Beispiel. Sei $X := S^2$, die 2-Sphäre im $\mathbb{R}^3$, und $\sim$ durch die Zerlegung von S^2 in die Breitenkreise gegeben,

also $\vec{x} \sim \vec{y} \Leftrightarrow x_3 = y_3$.



Anschauung für die Quotientenabbildung $\pi : S^2 \rightarrow S^2/\sim$.

Die oben empfohlene Anschauung will uns $S^2/\sim$ als ein Intervall suggerieren: ist das in Ordnung? Betrachte die durch

$$\begin{array}{ccc} S^2/\sim & \xrightarrow{f} & [-1, 1] \\ [\vec{x}] & \longmapsto & x_3 \end{array}$$

definierte Bijektion. Sie ist stetig, denn $f \circ \pi : S^2 \rightarrow [-1, 1]$, worauf es dabei ankommt, ist ja einfach die Projektion auf die dritte Koordinate. Mit S^2 ist auch $S^2/\sim = \pi(S^2)$ kompakt, als stetiges Bild eines kompakten Raumes nämlich, und da $[-1, 1]$ hausdorffsch ist, ist f wirklich ein *Homöomorphismus*, ein Isomorphismus in der topologischen Kategorie, und wir tun deshalb ganz recht daran, uns den Quotientenraum $X/\sim$ als kompaktes Intervall vorzustellen, obwohl seine Punkte $[\vec{x}]$ Kreislinien bzw. Pole auf der Kugeloberfläche sind.

Soviel zur Anschauung von Quotientenräumen. Mut zum Punkt! Ein Beispiel dafür, dass die Quotientenbildung neue, interessante Objekte hervorbringen kann, war das freilich nicht. Im Gegenteil, ich musste ja ein Beispiel wählen, dessen Quotienten ich Ihnen als ein *wohlbekanntes* Objekt nachweisen kann. Aus der 2-Sphäre kann man aber auch interessante Quotienten bilden, betrachten Sie zum Beispiel die Äquivalenzrelation auf S^2 , die durch $\vec{x} \sim -\vec{x}$ erzeugt wird, deren Äquivalenzklassen also die antipodischen Punktepaare $\{\vec{x}, -\vec{x}\} \subset S^2$ sind. Schreiben wir statt $S^2/\sim$ deshalb einmal spezieller $S^2/\pm$, um daran zu erinnern, dass in dem Quotienten $\pm\vec{x}$

jetzt nicht mehr zwei Punkte sind, sondern nurmehr einer. Dieser Quotientenraum $S^2/\pm =: \mathbb{RP}^2$ heißt die **reelle projektive Ebene**. Eine eigenartige Fläche! Gehen Sie einmal in Gedanken darauf spazieren.

20.4 Quotienten von Gruppen und Vektorräumen

Es sei nun G eine Gruppe. Für festes $g \in G$ nennt man die Abbildung $L_g : G \rightarrow G$, $a \mapsto ga$ die **Linksmultiplikation** oder **Linkstranslation mit g** .

Die Linkstranslationen sind *bijektive* Abbildungen von G auf sich, und offenbar ist $L_{g^{-1}}$ die zu L_g inverse Abbildung. Wenn Sie sich vorstellen, wie die Linksmultiplikation mit g die ganze Gruppe in sich verschiebt, so schiebt eben die anschließende Linksmultiplikation mit g^{-1} alles wieder an seinen ursprünglichen Platz. Die Linksmultiplikation mit dem neutralen Element $1 \in G$ ist natürlich die Identität, $L_1 = \text{Id}_G$.

Sei nun $H \subset G$ eine Untergruppe. Dann heißt das Bild von H unter der Linkstranslation mit $g \in G$, also die Teilmenge

$$L_g(H) = \{gh \mid h \in H\} =: gH \subset G$$

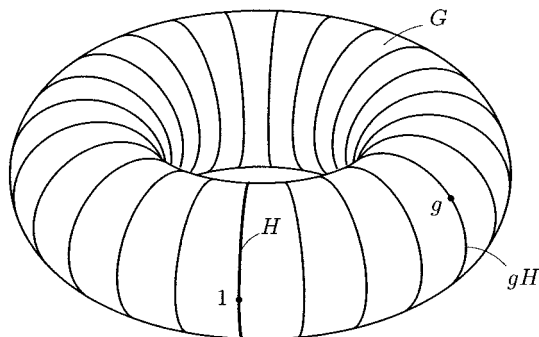
von G , die **Linksnebenklasse** von H unter g . Die Menge der Linksnebenklassen von H bildet, und damit sind wir wieder bei unserem Thema, eine *Zerlegung* von G , wie wir gleich einmal genau nachrechnen wollen.

Zunächst bemerken wir, dass wegen $1 \in H$ auch $g = g1 \in gH$ für jedes $g \in G$ gilt, also ist jedenfalls keine Nebenklasse leer und ihre Vereinigung ganz G . Haben zwei Nebenklassen g_1H und g_2H ein gemeinsames Element, gibt es also ein $h_1 \in H$ und ein $h_2 \in H$ mit $g_1h_1 = g_2h_2$, so gilt $g_1 = g_2h_2h_1^{-1}$. Deshalb können wir jedes Element $g_1h \in g_1H$ auch als

$$g_1h = g_2(h_2h_1^{-1}h) =: g_2\tilde{h}$$

schreiben, und weil H eine Untergruppe ist, gilt $\tilde{h} \in H$ und daher $g_1h = g_2\tilde{h} \in g_2H$. Damit haben wir $g_1H \subset g_2H$ gezeigt, und nach

Rollentausch von g_1 und g_2 auch $g_2H \subset g_1H$ und somit $g_1H = g_2H$. Die Nebenklassen zerlegen G also wirklich.



Die Zerlegung $\{gH \mid g \in G\}$ von G in Nebenklassen von H

Wie sieht die zugehörige Äquivalenzrelation $\sim_H$ aus? Das haben wir eigentlich gerade mit ausgerechnet, denn wir sehen jetzt sofort, dass $g_1H = g_2H$ gleichbedeutend mit $g_2^{-1}g_1 \in H$ ist, also damit dass g_1 und g_2 bis auf Rechtsmultiplikation mit einem Element aus H übereinstimmen, $g_1 = g_2h$ für ein $h \in H$, wie man das auch lesen kann. Halten wir fest:

Notiz: Ist $H \subset G$ eine Untergruppe und $\sim_H$ die durch

$$g_1 \sim_H g_2 \quad :\Longleftrightarrow \quad g_2^{-1}g_1 \in H$$

definierte Äquivalenzrelation auf G , so sind die Äquivalenzklassen $[g]$ von $\sim_H$ gerade die Nebenklassen gH von H . $\square$

Schreib- und Sprechweise: Es ist üblich, die Quotientenmenge $G/\sim_H$ als

$$G/H = \{gH \mid g \in G\}$$

zu schreiben und G/H den **Quotienten von G nach H** zu nennen. $\square$

Überträgt sich die Gruppenstruktur von G auf den Quotienten G/H , und ist die Quotientenabbildung $\pi : G \rightarrow G/H$ ein Gruppenhomomorphismus? Fast möchte es so scheinen, zuversichtlich

definiert man die Verknüpfung der Nebenklassen durch

$$[a][b] := [ab]$$

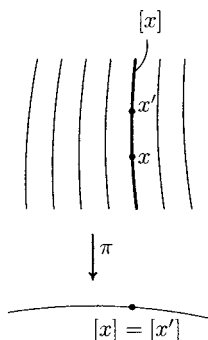
und prüft die Axiome nach:

- (1) $([a][b])[c] = [ab][c] = [(ab)c] = [a(bc)] = [a]([b][c]),$
- (2) $[1]$ ist linksneutral, da $[1][a] = [1a] = [a],$
- (3) $[a^{-1}]$ ist linksinvers zu $[a],$ da $[a^{-1}][a] = [a^{-1}a] = [1],$

und schließlich ist $\pi(ab) = [ab] = [a][b] = \pi(a)\pi(b),$ also π ein Gruppenhomomorphismus — oder?

Oder das ist alles auf Sand gebaut, weil $[a][b] := [ab]$ gar keine richtige Definition, sondern nur eine trügerische Scheindefinition war! Das ist das Problem der *Wohldefiniertheit*, mit dem Sie beim Hantieren mit Äquivalenzklassen immer konfrontiert sind und das Sie deshalb ganz genau verstehen müssen.

Ist $\sim$ irgend eine Äquivalenzrelation auf einer Menge $X,$ so nennt man jedes $x \in X$ einen **Repräsentanten** seiner Äquivalenzklasse $[x]$. Eine Äquivalenzklasse hat aber i.A. nicht nur *einen* Repräsentanten, vielmehr ist ja *jedes* Element $x' \in [x]$ ein Repräsentant von $[x]$.



Auch x' repräsentiert $[x]$

Will man daher eine Abbildung von $X/\sim$ irgendwohin durch eine Formel der Art $[x] \mapsto f(x)$ definieren, so muss man darauf Acht geben, dass der zugeordnete Term $f(x)$ von der Wahl des Repräsentanten innerhalb der Äquivalenzklasse nicht abhängt. Denn wenn

verschiedene Repräsentanten ein und derselben Äquivalenzklasse unterschiedliche Vorschläge machen, welcher Bildpunkt der Klasse zugeordnet werden soll, dann ist ja noch gar keine Definition erfolgt! Etwas förmlicher gesagt:

Hinweis: Ist $f : X \rightarrow M$ eine Abbildung und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X , so ist durch

$$\begin{array}{ccc} X/\sim & \longrightarrow & M \\ [x] & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

eine Abbildung $X/\sim \rightarrow M$ nur dann definiert, wenn auch wirklich aus $x \sim x'$ stets $f(x) = f(x')$ folgt. $\square$

Anderenfalls sagt man, die Abbildung $X/\sim \rightarrow M$ sei *nicht wohldefiniert*. Eigentlich ist das fast etwas zu höflich gesprochen, so als wäre die Abbildung schon definiert, nur eben nicht ‘wohldefiniert’, was immer das Geheimnisvolles heißen mag. Gemeint ist aber einfach, die Abbildung ist *nicht* definiert, der Definitionsversuch durch $[x] \mapsto f(x)$ ist *Pfusch*.

Umgekehrt, wenn der Autor schreibt, durch $[x] \mapsto f(x)$ sei eine Abbildung $X/\sim \rightarrow M$ *wohldefiniert*, so will er damit sagen, dass ihm die Problematik so formulierter Definitionen wohl bewusst ist, im vorliegenden Falle aus $x \sim x'$ aber $f(x) = f(x')$ wirklich folgt. Genau so sollen Sie es auch machen, wenn Sie der Autor sind, einstweilen also bei der Bearbeitung von Übungsaufgaben und in Klausuren. Der Korrektor sieht dann sofort, dass Sie im Bilde sind und keinen Denkfehler begangen haben.

Analog bei Abbildungen von mehreren Variablen. Wenn durch $([x], [y]) \mapsto f(x, y)$ eine Abbildung auf $(X/\sim) \times (Y/\sim)$ definiert werden soll, so muss sichergestellt sein, dass aus $x \sim x'$ und $y \sim y'$ auch wirklich $f(x, y) = f(x', y')$ folgt.¹

Wenden wir diese Einsicht nun auf unsere Frage an, ob durch das Rechnen mit Repräsentanten eine Verknüpfung in G/H wohldefiniert ist. Hier ist $f(a, b) = [ab]$ gewesen, zu prüfen haben wir also, ob aus $a \sim_H a'$ und $b \sim_H b'$ auch $[ab] = [a'b']$, d.h. $ab \sim_H a'b'$ folgt. Nach Definition von $\sim_H$ also:

Beachte: Durch $[a][b] := [ab]$ ist genau dann eine Verknüpfung in G/H wohldefiniert, wenn für alle $a, b \in G$ und alle $h, k \in H$ auch $(ab)^{-1}ahbk \in H$ ist. $\square$

Für $k \in H$ bedeutet $xk \in H$ soviel wie $x \in H$, weil ja H eine Untergruppe ist, und da $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ gilt, ist

$$x := (ab)^{-1}ahb = b^{-1}a^{-1}ahb = b^{-1}hb.$$

Die Wohldefiniertheitsbedingung lautet also $b^{-1}hb \in H$ für alle $b \in G$ und alle $h \in H$, oder

$$b^{-1}Hb \subset H$$

für alle $b \in G$. Damit haben wir die gerade noch so kompliziert aussehende Bedingung schon in eine hübsch einfache Form gebracht, wir könnten sie beinahe so stehen lassen. Aber wenn $b^{-1}Hb \subset H$ und damit $H \subset bHb^{-1}$ für *alle* b gilt, dann auch für b^{-1} , also auch $bHb^{-1} \subset H$, zusammen also

$$bHb^{-1} = H$$

für alle $b \in G$. Das ist also die Eigenschaft, die eine Untergruppe haben muss, wenn sie ein ‘guter Nenner’ bei der Quotientenbildung in der Kategorie der Gruppen sein will. Man nennt solche Untergruppen *Normalteiler*:

Definition: Eine Untergruppe $H \subset G$ heißt ein *Normalteiler* von G , geschrieben $H \triangleleft G$, wenn

$$gHg^{-1} = H$$

für alle $g \in G$ gilt. $\square$

Wenn die Wohldefiniertheit der repräsentantenweisen Verknüpfung in G/H gesichert ist, dann ist auch unser oben etwas voreilig geführter Nachweis der Gruppeneigenschaft ganz in Ordnung, wir haben also schon gezeigt:

Lemma: Ist G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe, so ist durch die Verknüpfung in G genau dann eine Verknüpfung in

G/H wohldefiniert, wenn H ein Normalteiler von G ist, und der Quotient G/H ist dann mit dieser Verknüpfung eine Gruppe und die Quotientenabbildung $G \rightarrow G/H$ ein Gruppenhomomorphismus. $\square$

In einer *abelschen* Gruppe G ist natürlich jede Untergruppe ein Normalteiler, weil dann sowieso immer

$$ghg^{-1} = hgg^{-1} = h$$

ist. Deshalb sind Quotienten G/H abelscher Gruppen mit der repräsentantenweisen Verknüpfung stets wieder (ebenfalls abelsche) Gruppen. Wird die abelsche Gruppe additiv geschrieben, so ist natürlich die Notation etwas anzupassen: die Nebenklassen sind dann

$$[g] = g + H,$$

die Äquivalenzrelation ist durch

$$g \sim_H g' :\Leftrightarrow g - g' \in H$$

beschrieben, die Verknüpfung der Nebenklassen durch $[g] + [g'] := [g + g']$ wohldefiniert, das neutrale Element im Quotienten ist $[0]$, das inverse zu $[g]$ ist $-[g] = [-g]$. Nur die Notation für den Quotienten selbst bleibt unangetastet, man schreibt G/H , genau wie bei multiplikativ geschriebenen Gruppen.

Damit sind wir auch beim Thema der *Quotientenvektorräume* V/V_0 angekommen. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $(V, +, \cdot)$ ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum und $V_0 \subset V$ ein Untervektorraum. Dann wird die Menge

$$V/V_0 := \{[v] \mid v \in V\} = \{v + V_0 \mid v \in V\}$$

der Nebenklassen durch die repräsentantenweise Addition

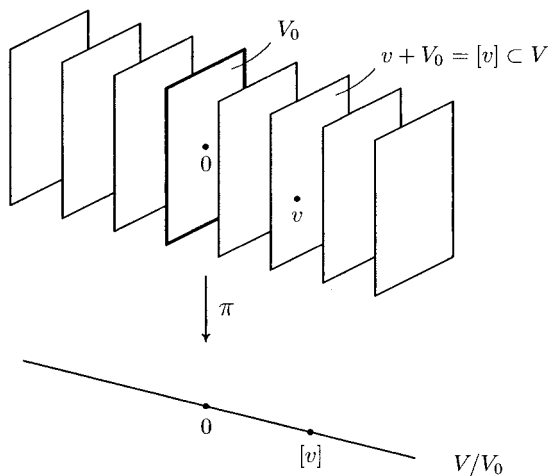
$$[v] + [w] := [v + w]$$

zunächst zu einer abelschen Gruppe $(V/V_0, +)$, eben dem Quotienten der abelschen Gruppe $(V, +)$ nach der Untergruppe $(V_0, +)$.

Offensichtlich ist aber auch die Multiplikation $\mathbb{K} \times (V/V_0) \rightarrow V/V_0$ durch repräsentantenweises Rechnen, also durch

$$\lambda[v] := [\lambda v]$$

wohldefiniert, denn ist $v - v' \in V_0$, so auch $\lambda v - \lambda v' \in V_0$, weil ja V_0 ein Untervektorraum ist. Dadurch wird schließlich V/V_0 zu einem $\mathbb{K}$ -Vektorraum, den wir den **Quotientenvektorraum** von V nach V_0 nennen. Die Quotientenabbildung oder kanonische Projektion $\pi : V \rightarrow V/V_0$ ist eine lineare Abbildung mit dem Kern V_0 .



Die Quotientenabbildung $\pi : V \rightarrow V/V_0$

Und so lege ich Ihnen denn die Quotienten ans Herz und hoffe das Beste. Haben Sie sich die Kapitel 18-20 zu Eigen gemacht, dann können Sie sich fürs Erste auf dem Parkett der modernen Mathematik bewegen, ohne sofort als Nichtmathematiker aufzufallen. Kennenzulernen haben Sie dort freilich noch manches, und diesen Inhalten wenden wir uns jetzt wieder zu.

20.5 Übungsaufgaben

Aufgabe T20.1: Ist X ein topologischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge, so bezeichnet X/A den Quotientenraum nach der Äquivalenzrelation, die alle Punkte in A für äquivalent erklärt und die anderen Punkte nur zu sich selbst äquivalent sein lässt. Zeigen Sie, dass $[0, 1]/\{0, 1\}$ zur Kreislinie S^1 homöomorph ist.

Aufgabe T20.2: Betrachten Sie auf $X := [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ die durch $(x, 0) \sim (x, 1)$ und $(0, y) \sim (1, y)$ erzeugte Äquivalenzrelation, die gegenüberliegende Randpunkte für äquivalent erklärt. Zeigen Sie, dass der Quotientenraum $X/\sim$ homöomorph zur Torusoberfläche S ist.

Aufgabe T20.3: Sei $\varphi : G \rightarrow \tilde{G}$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass durch repräsentantenweise Anwendung von φ ein Gruppenisomorphismus $G/\text{Kern } \varphi \cong \text{Bild } \varphi$ gegeben ist.

Aufgabe T20.4: Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum und $V_0 \subset V$ ein Untervektorraum. a) Bestimmen Sie den Kern der kanonischen Projektion $\pi : V \rightarrow V/V_0$. b) Sei $f : V \rightarrow W$ eine $\mathbb{K}$ -lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass durch $\bar{f}(v + V_0) := f(v)$, also durch repräsentantenweise Anwendung von f , eine lineare Abbildung $\bar{f} : V/V_0 \rightarrow W$ genau dann wohldefiniert ist, wenn $V_0 \subset \text{Kern } f$ gilt.

Aufgabe T20.5: Sei G eine Gruppe, $H \subset G$ eine Teilmenge mit $1 \in H$ und der Eigenschaft, dass $\{gH \mid g \in G\}$ eine Zerlegung von G ist. Zeigen Sie, dass H eine Untergruppe von G sein muss.

Aufgabe T20.6: Für Teilmengen $A_1, \dots, A_r \subset G$ einer Gruppe G wollen wir unter dem 'Produkt' $A_1 \cdot \dots \cdot A_r$ die Teilmenge $\{a_1 \cdot \dots \cdot a_r \mid a_i \in A_i\} \subset G$ verstehen. Sei nun die Untergruppe $H \subset G$ ein *Normalteiler* von G , d.h. es gelte $gHg^{-1} = H$ für jedes $g \in G$. Zeigen Sie, dass dann $(aH)(bH) = abH$ für alle $a, b \in G$ gilt, dass also insbesondere die repräsentantenweise Verknüpfung in G/H dann wohldefiniert ist.

21.1 Was gibt es Neues?

In den Kapiteln 8 und 9 haben wir die Grundbegriffe der linearen Algebra für die reellen Vektorräume $\mathbb{R}^n$ und deren Untervektorräume $U \subset \mathbb{R}^n$ entwickelt. Jetzt wollen wir die Beschränkung auf diese speziellen Räume fallen lassen und einen zunächst beliebigen Körper $\mathbb{K}$ und die ganze $\mathbb{K}$ -lineare Kategorie, also die $\mathbb{K}$ -Vektorräume und die $\mathbb{K}$ -linearen Abbildungen betrachten.

Hauptsächlich sind wir an $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ interessiert, und ich habe auch gar keine Bedenken, alle anderen Körper auszuschließen, sobald Sie unartig zu werden scheinen. Aber selbst wenn wir uns gleich auf $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ beschränken wollten, wäre $\mathbb{K}$ als Bezeichnung für den Körper günstig, um nicht fortwährend beide Fälle einzeln nennen zu müssen, und einstweilen ist noch jeder Körper zu unserer Party eingeladen.

Was müssen wir jetzt neu lernen? Wie weit tragen unsere alten Methoden und Ideen noch?

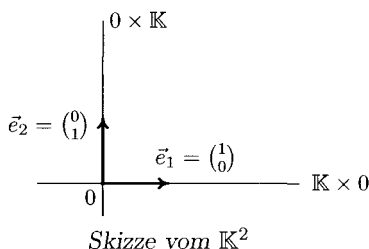
Gute Nachricht 1: $\mathbb{K}$ -lineare Abbildungen $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ beschreibt man durch $\mathbb{K}$ -Matrizen wie im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, und man rechnet mit $\mathbb{K}$ -Matrizen wie mit reellen Matrizen (vergl. 8.1). $\square$

Wir schreiben die Elemente $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ wieder als Spalten

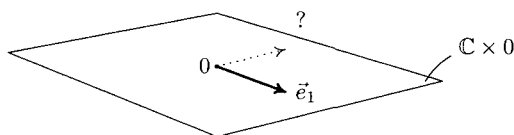
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n.$$

Die *kanonischen Einheitsvektoren* $\vec{e}_j \in \mathbb{K}^n$ haben auch das wohlbekannte Aussehen, an der j -ten Stelle eine 1, sonst Nullen, wobei die 1 natürlich jetzt die Körper-Eins $1 \in \mathbb{K}$ bezeichnet. Die Spalten $\vec{a}_j$ einer Matrix $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ sind die Bilder dieser Einheitsvektoren usw.

Zur *Anschauung* ziehen wir die bewährten $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ heran und beschriften sie entsprechend.



Das geht ziemlich gut, auch wenn man nicht ganz vergessen darf, dass im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ der als Gerade skizzierte 1-dimensionale Untervektorraum $\mathbb{K} \times 0 \subset \mathbb{K}^2$ eigentlich eine Zahlenebene $\mathbb{C} \times 0$ vertritt. Aber kommen wir dann wirklich mit nur *einem* Einheitsvektor $\vec{e}_1$ für $\mathbb{C} \times 0$ aus?



Reicht ein Einheitsvektor für $\mathbb{C} \times 0$?

Brauchten wir in $\mathbb{C}^2$ nicht vier Einheitsvektoren, zwei für $\mathbb{C} \times 0$ und zwei für $0 \times \mathbb{C}$, da das doch Ebenen sind? Müssen wir nicht schon in $\mathbb{C}$ zwei heranziehen? Das müssten wir, wenn wir als Koeffizienten bei Linearkombinationen nur *reelle* λ verwenden dürften, aber wenn

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ist, dann ist schon jedes $z \in \mathbb{C}$ von der Form $\lambda \cdot 1$, eben für $\lambda = z$, und jedes $\vec{z} \in \mathbb{C}^2$ ist von der Form

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = z_1 \vec{e}_1 + z_2 \vec{e}_2,$$

es hat schon seine Richtigkeit mit den *zwei* Einheitsvektoren für $\mathbb{C}^2$, obwohl reell betrachtet $\mathbb{C}^2$ wie $\mathbb{R}^4$ aussieht. Vom Basisbegriff ganz allgemein spricht die nächste Nachricht.

Gute Nachricht 2: Die Definitionen der Begriffe **lineare Unabhängigkeit**, **lineare Hülle**, **Basis** übertragen sich problemlos auf allgemeine $\mathbb{K}$ -Vektorräume □

Auch der Nutzen von Basen ist derselbe, den wir schon kennen: Entwicklung nach der Basis, Konstruktion $\mathbb{K}$ -linearer Abbildungen durch Vorgabe der Bilder der Basisvektoren, Beschreibung $\mathbb{K}$ -linearer Abbildungen durch $\mathbb{K}$ -Matrizen bezüglich Basen mittels der Basisisomorphismen (vergl. 9.1).

Die lineare Abbildung $\varphi : U \rightarrow V$ hängt also mit der sie bei gegebenen Basen darstellenden Matrix A über das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow[\text{\mathbb{K-linear}}]{\varphi} & V \\ \Phi_{(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)} \uparrow \cong & & \cong \uparrow \Phi_{(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow[\text{Matrix}]{A} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

zusammen. Der linke Basisisomorphismus tut ja nichts anderes als jeweils $\vec{e}_j$ zum $\vec{u}_j$, also $\vec{x}$ zu $x_1 \vec{u}_1 + \dots + x_n \vec{u}_n$ zu schicken, analog der rechte. Dieselbe Information über die Beziehung zwischen φ und A ist auch in der Formel

$$\varphi(\vec{u}_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \vec{v}_i$$

enthalten, die zu benutzen natürlich auch nicht verboten ist, bitte sehr. — Wie steht es aber mit der *Existenz* von Basen?

Gute Nachricht 3 und erste Warnung: Zwar gelten das *Ergänzungslemma* (“Basis im Aufbau” aus “Vorratsvektoren” um eins verlängern) und deshalb der *Basisergänzungssatz* (vergl. 9.2) auch in beliebigen $\mathbb{K}$ -Vektorräumen, mit demselben Beweis. Aber viele der jetzt zugelassenen $\mathbb{K}$ -Vektorräume haben keine Basis,¹ sind **unendlichdimensional**, wie man dazu sagt. $\square$

In einem Vektorraum V ohne Basis herrscht kein Mangel an linear unabhängigen ‘tupeln’ von Vektoren, eher schon ein Überfluss: ist $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N)$ linear unabhängig, so lässt sich immer noch, wie groß N auch schon sei, ein $\vec{v}_{N+1} \in V$ so finden, dass auch $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N, \vec{v}_{N+1})$ noch linear unabhängig ist. Eben diese Situation liegt bei Funktionenräumen häufig vor. Wir wollen die unendlichdimensionalen Vektorräume nicht von aller Betrachtung ausschließen, oft müssen wir uns aber *der Einfachheit halber* auf endlichdimensionale Räume einschränken, weil die geeignet modifizierten Begriffe und Sätze für unendlichdimensionale Räume mehr Vorbereitungszeit verlangten, als in einem Anfängerkurs dafür abgezweigt werden kann.²

Gute Nachricht 4: Für **endlichdimensionale** Räume gelten die Dimensionsaussagen des Kapitels 9, aus denselben Gründen, auch für $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Die **Dimension** ist als Länge einer Basis wohldefiniert, isomorphe Räume haben dieselbe Dimension, $U \subset V$ impliziert für dimensionsgleiche Räume $U = V$, die Dimensionsformeln für Untervektorräume und für lineare Abbildungen, der Rangsatz, Methode der Rangbestimmung bei Matrizen, Zeilenrang gleich Spaltenrang: alles wie gehabt. $\square$

Gute Nachricht 5: $\mathbb{K}$ -**multilineare** Abbildungen

$$\omega : U_1 \times \dots \times U_r \rightarrow V$$

werden wie in 11.1 definiert und sind in Anwesenheit von Basen in den einzelnen $U_1, \dots, U_r$ durch ihre **Komponenten**

$$\omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \in V,$$

das sind die Bilder der r -tupel aus Basisvektoren, bestimmt und konstruierbar. $\square$

In 11.2, dem Abschnitt über die Symmetrieeigenschaften von multilinearen Abbildungen, begegnen wir einer Aussage, die sich nicht von $\mathbb{R}$ auf *beliebige* andere Körper $\mathbb{K}$ übertragen lässt, weil es Körper wie etwa $\mathbb{F}_2$ gibt, in denen $1 + 1 = 0$ ist. In Vektorräumen über solchen Körpern gilt auch $\vec{v} + \vec{v} = (1 + 1)\vec{v} = 0$, also $\vec{v} = -\vec{v}$. Für r -lineare Abbildungen $\omega : U \times \cdots \times U \rightarrow V$ ist dann Vorzeichenwechsel bei Vertauschung je zweier Variablen *nicht* mehr gleichbedeutend mit $\omega(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r) = 0$ für alle linear abhängigen $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$, und es steht somit zur Debatte, was man unter alternierenden multilinearen Abbildungen überhaupt verstehen will. Die Entscheidung fällt zugunsten der zweiten Bedingung, das Lemma aus 11.2 wird im allgemeinen Fall zur

Definition: Seien U und V Vektorräume über $\mathbb{K}$. Eine multilineare Abbildung $\omega : U \times \cdots \times U \rightarrow V$ in r Variablen heißt **alternierend**, wenn sie auf jedes linear abhängige r -tupel mit Null antwortet.

Über Körpern mit $1 + 1 = 0$ würde “Vorzeichenwechsel” bei Vertauschung ja nur dasselbe wie Symmetrie bedeuten. Richtig bleibt aber im allgemeinen Fall, dass ein multilineares $\omega : U \times \cdots \times U \rightarrow V$ schon alternierend ist, wenn es immer dann mit Null antwortet, wenn unter den Einträgen zwei gleiche sind.

Gute Nachricht 6 und zweite Warnung: Für Vektorräume über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, den einzigen, mit denen wir uns wirklich zu befassen haben, geht das ganze Kapitel 11 glatt durch. Lässt man jedoch beliebige Körper zu, so ist das Alternieren wie oben zu definieren. $\square$

Insbesondere ist dann die Determinante auch im allgemeinen Fall die einzige Abbildung

$$\det : M(n \times n, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K},$$

die in den Spalten multilinear ist und alternierend (d.h. also Null für $\text{rg } A < n$) und dabei $\det E = 1$ erfüllt. Die Bedeutung von $\det A \neq 0$ (Lemma 1 in 11.3) und die Formeln der Determinantenrechnung, nämlich $\det AB = \det A \det B$, Leibnizformel, $\det A = \det A^t$, Entwicklungsformeln, Inversionsformel, Determinantenberechnung mittels elementarer Umformungen gelten auch für beliebige Körper.

21.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

In diesem Abschnitt bezeichnet $\mathbb{K}$ einen beliebigen Körper und V einen Vektorraum über $\mathbb{K}$, von dem wir nur allzu bald werden voraussetzen müssen, dass er endlichdimensional ist. Einstweilen darf es aber noch ein beliebiger Vektorraum sein.

Definition: Sei V ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum und $f : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung oder ein **Operator auf V** , wie wir auch sagen wollen. Ein Element $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt ein **Eigenwert** des Operators f , wenn es einen Vektor $\vec{v} \in V \setminus 0$ mit

$$f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$$

gibt. Ein solcher Vektor heißt dann ein **Eigenvektor** von f zum Eigenwert λ . Zusammen mit dem Nullvektor bilden die Eigenvektoren zu λ den **Eigenraum**

$$E_\lambda := \text{Kern}(f - \lambda \text{Id}_V)$$

von f zum Eigenwert λ . Die Dimension von E_λ schließlich heißt die **geometrische Vielfachheit** des Eigenwerts λ . $\square$

Beachte, dass wegen $(f - \lambda \text{Id}_V)(\vec{v}) = f(\vec{v}) - \lambda \vec{v}$ der Kern E_λ von $f - \lambda \text{Id}_V$ wirklich aus der Null und den Eigenvektoren von f zu λ besteht, wie es in der Definition nebenbei behauptet wird. Auf diesem Untervektorraum $E_\lambda \subset V$ wirkt der Operator f durch bloße Multiplikation mit λ , was ja so ungefähr das Einfachste ist, das ein linearer Operator machen kann.

Sind $\lambda \neq \mu$ zwei verschiedene Eigenwerte von f , so haben die beiden Eigenräume nur den Nullvektor gemeinsam, denn für $\vec{v} \neq 0$ kann $f(\vec{v})$ nicht gleichzeitig $\lambda \vec{v}$ und $\mu \vec{v}$ sein. Also ist die Summe $E_\lambda + E_\mu$ *direkt*,

$$E_\lambda + E_\mu = E_\lambda \oplus E_\mu,$$

wie wir dafür früher schon geschrieben haben (vergl. 8.2). Etwas allgemeiner gilt sogar:

Lemma: Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ lauter verschiedene Eigenwerte eines Operators $f : V \rightarrow V$, so ist die Summe der Eigenräume direkt:

$$E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_r} = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$$

d.h. jeder Vektor $\vec{v} \in E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_r}$ kann nur auf eine Weise als Summe $\vec{v} = \vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_r$ von Vektoren $\vec{v}_i \in E_{\lambda_i}$ dargestellt werden.

BEWEIS: Aus $\vec{v} = \vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_r = \vec{v}'_1 + \dots + \vec{v}'_r$ folgte

$$(\vec{v}_1 - \vec{v}'_1) + \dots + (\vec{v}_r - \vec{v}'_r) = 0,$$

und deshalb ist oBdA nur zu zeigen, dass aus $\vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_r = 0$ und $\vec{v}_i \in E_{\lambda_i}$ für $i = 1, \dots, r$ bereits $\vec{v}_1 = \dots = \vec{v}_r = 0$ folgt. Wir beweisen das durch Induktion nach r . Für $r = 1$ ist es sowieso richtig, und um den Induktionsschluss von $r - 1$ auf r auszuführen, wenden wir auf $\vec{v}_1 + \dots + \vec{v}_r = 0$ einerseits f an, andererseits multiplizieren wir mit λ_r . So erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_{r-1} \vec{v}_{r-1} + \lambda_r \vec{v}_r &= 0 \\ \lambda_r \vec{v}_1 + \dots + \lambda_r \vec{v}_{r-1} + \lambda_r \vec{v}_r &= 0, \end{aligned}$$

also durch Subtraktion und Induktionsannahme

$$(\lambda_1 - \lambda_r) \vec{v}_1 = \dots = (\lambda_{r-1} - \lambda_r) \vec{v}_{r-1} = 0,$$

und da die $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$ alle von λ_r verschieden sind, folgt daraus zunächst $\vec{v}_1 = \dots = \vec{v}_{r-1} = 0$, und damit auch $\vec{v}_r = 0$, da die Gesamtsumme ja Null ist. $\square$

Hat man für jedes i eine Basis $(\vec{v}_1^{(i)}, \dots, \vec{v}_{d_i}^{(i)})$ des Eigenraums E_{λ_i} , so ergibt deren Aneinanderreihung eine Basis

$$(\vec{v}_1^{(1)}, \dots, \vec{v}_{d_1}^{(1)}, \dots, \vec{v}_1^{(r)}, \dots, \vec{v}_{d_r}^{(r)})$$

von $E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$, eben wegen der Direktheit dieser Summe. Also addieren sich die Dimensionen der Summanden zur Dimension der Summe auf, und wir erhalten schon eine erste Information darüber, wieviele Eigenwerte ein Operator haben kann:

Korollar: Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ lauter verschiedene Eigenwerte eines Operators auf einem endlichdimensionalen Raum V , so gilt

$$\sum_{i=1}^r \dim E_{\lambda_i} \leq \dim V,$$

insbesondere kann ein Operator auf einem n -dimensionalen Raum höchstens n verschiedene Eigenwerte haben. $\square$

Überträgt oder *transformiert* man einen Operator $f : V \rightarrow V$ mittels eines Isomorphismus, einer *Transformation* $\Phi : W \cong V$ auf einen anderen Raum W , so übertragen sich auch seine Eigendaten, genauer:

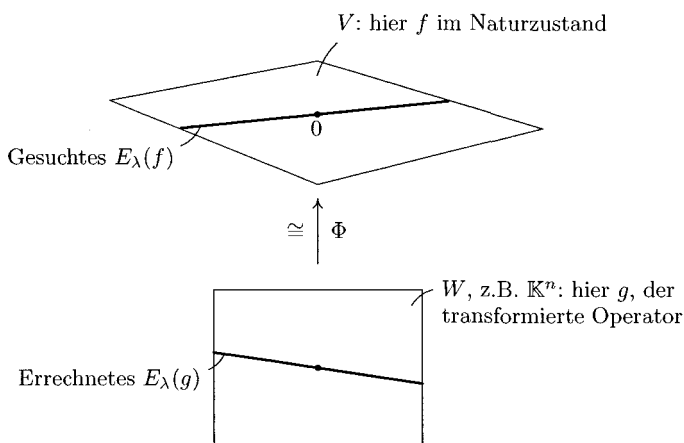
Lemma: Sei $f : V \rightarrow V$ ein Operator, $\Phi : W \xrightarrow{\cong} V$ ein Isomorphismus und $g := \Phi^{-1} \circ f \circ \Phi$ der transformierte Operator auf W , also

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ \Phi \uparrow \cong & & \cong \downarrow \Phi \\ W & \xrightarrow{g} & W \end{array}$$

kommutativ, dann haben f und g dieselben Eigenwerte, und Φ bildet die Eigenräume von g isomorph auf die entsprechenden Eigenräume von f ab.

BEWEIS: Da Φ ein Isomorphismus ist, bedeutet $g\vec{w} = \lambda\vec{w}$ soviel wie $f(\Phi(\vec{w})) = \lambda\Phi(\vec{w})$, und da steht's ja schon: $\vec{w}$ ist genau dann Eigenvektor von g zum Eigenwert λ , wenn $\Phi(\vec{w})$ Eigenvektor von f zum Eigenwert λ ist. $\square$

Wenn uns also die Eigendaten an einem transformierten Operator leichter zu ermitteln scheinen, dann nur zu! Die Eigenwerte sind eh' dieselben, und die Eigenräume $E_\lambda(f)$ des ursprünglichen Operators f erhalten wir aus denen des transformierten Operators durch die Transformation Φ geliefert:



Eigendatenbeziehung zwischen transformierten Operatoren

Insbesondere gilt das natürlich für den Fall, dass V endlichdimensional und Φ ein Basisisomorphismus ist:

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{f} & V \\
 \Phi \uparrow \cong & & \cong \uparrow \Phi \\
 \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^n,
 \end{array}$$

wodurch die Bestimmung der Eigenwerte und Eigenräume auf Matrizenrechnung zurückgeführt wird. Die Eigenwerte und Eigenräume einer Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$ lassen sich aber im Prinzip ganz systematisch bestimmen, und das wollen wir uns jetzt einmal anschauen.

Zuerst die Eigenwerte. Definitionsgemäß sind es die Körperelemente $\lambda \in \mathbb{K}$, für welche die Matrix $A - \lambda E$, wobei E die Einheitsmatrix bezeichnet, einen nichttrivialen Kern hat, also nicht invertierbar ist. Diese Eigenschaft einer $n \times n$ -Matrix wird aber durch das Verschwinden der Determinante entdeckt, und deshalb spielt die Determinante von $A - \lambda E$ in der Eigenwerttheorie eine so große Rolle und hat einen eigenen Namen:

Definition: Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{K})$. Das durch $P_A(\lambda) := \det(A - \lambda E)$ definierte Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ heißt das **charakteristische Polynom** der Matrix A . $\square$

Als Polynom n -ten Grades erweist sich $P_A(\lambda)$ etwa aus der Leibniz-Formel für die Determinante.³ Die Eigenwerte also sind gerade die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

Notiz: Ein Element $\lambda \in \mathbb{K}$ ist genau dann Eigenwert von A , wenn $P_A(\lambda) = 0$ gilt. $\square$

Soviel zunächst über die Bestimmung der Eigenwerte. Bevor wir zur Bestimmung der Eigenvektoren weitergehen, werfen wir noch einen Blick auf das charakteristische Polynom.

Andere Basis, andere Matrix — ist es nicht auffällig, dass für Matrizen A und B , die f bezüglich verschiedener Basen in V darstellen, die charakteristischen Polynome $P_A(\lambda)$ und $P_B(\lambda)$ stets dieselben Nullstellen, eben die Eigenwerte von f haben müssen? Was ist überhaupt der Unterschied zwischen $P_A(\lambda)$ und $P_B(\lambda)$?

Es gibt gar keinen, das charakteristische Polynom eines Operators ist durch $P_f(\lambda) := P_A(\lambda)$ *wohldefiniert*, nämlich unabhängig von der Basiswahl. Allgemein gilt nämlich:

Lemma: Ist $f : V \rightarrow V$ ein Operator auf einem n -dimensionalen $\mathbb{K}$ -Vektorraum und $A = \Phi^{-1} \circ f \circ \Phi$ und $B = \Psi^{-1} \circ f \circ \Psi$ zwei den Operator darstellende Matrizen, so gilt $\det A = \det B$.

BEWEIS: Das liegt an der Multiplikativität der Determinante. Es gilt ja

$$B = (\Psi^{-1} \circ \Phi) \circ A \circ (\Phi^{-1} \circ \Psi),$$

wenn wir also $C := \Psi^{-1} \circ \Phi : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ setzen, so folgt $B = CAC^{-1}$ und daher $\det B = \det C \det A \det C^{-1} = \det A$, da $\det C \det C^{-1} = \det(CC^{-1}) = \det E = 1$. $\square$

Insbesondere ist durch $\det f := \det A$ die **Determinante des Operators** f wohldefiniert, und die Determinante des Operators $f - \lambda \text{Id}_V$ ist eben das charakteristische Polynom

$$P_f(\lambda) := \det(f - \lambda \text{Id}_V)$$

des Operators.

Um nun zu einem gefundenen Eigenwert λ von A den zugehörigen Eigenraum zu bestimmen, hat man das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} - \lambda\vec{x} = 0$ zu lösen, denn der Eigenraum ist ja der Kern von $A - \lambda E$, also das System

$$\begin{array}{cccccc} (a_{11}-\lambda)x_1 & +a_{12}x_2 & + & \dots & +a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 & +(a_{22}-\lambda)x_2 & + & \dots & +a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & + & \dots & +(a_{nn}-\lambda)x_n & = 0 \end{array}$$

für die Unbekannten $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. Da die Lösungen einen ganzen Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$ bilden, kann es sich natürlich nicht darum handeln, sie alle einzeln aufzuführen. Vielmehr versteht man unter dem Lösen eines solchen Systems das Ausrechnen einer *Basis* $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d)$ des Lösungsraumes, etwa nach dem *Gaußschen Verfahren*⁴ zur Lösung linearer Gleichungssysteme.

In den Anwendungsfällen, bei denen Sie zum konkreten Rechnen Anlass haben, ist aber n gewöhnlich klein, $n = 2$ und $n = 3$ kommen am häufigsten vor, und dann lohnt es sich gar nicht, an das Gaußsche Verfahren auch nur zu denken. Sie kennen ja die geometrische Vielfachheit d des Eigenwerts, es ist $n - \text{rg}(A - \lambda E)$, und Sie rechnen einfach zu Fuß, durch Elimination von Unbekannten, wie in der Schule, ein Weilchen herum bis Sie d linear unabhängige Lösungsvektoren $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d \in \mathbb{K}^n$ beisammen haben. Dann dürfen Sie hinschreiben: *diese Vektoren bilden eine Basis* $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_d)$ *des Eigenraumes von* A *zum Eigenwert* λ , und die Bestimmung der Eigenvektoren zu λ ist damit erledigt.

Damit sehen und verstehen wir nun ein Gesamt Rezept zur Erhebung der Eigendaten eines Operators in einem n -dimensionalen $\mathbb{K}$ -Vektorraum:

Verfahrensschritte zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenräume eines Operators f in einem n -dimensionalen Vektorraum V über $\mathbb{K}$:

1. Transformation: Wähle einen Basisisomorphismus $\Phi : \mathbb{K}^n \cong V$ und bestimme die Matrix $A = \Phi^{-1} \circ f \circ \Phi$ des Operators bezüglich der Basis.

2. Eigenwerte: Bestimme das charakteristische Polynom

$$P_f(\lambda) = P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

und alle seine verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$. Das sind die Eigenwerte von A und somit von f .

3. Eigenvektoren der Matrix: Bestimme für jedes $i = 1, \dots, r$ durch Lösen des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} - \lambda_i\vec{x} = 0$ eine Basis $(\vec{u}_1^{(i)}, \dots, \vec{u}_{d_i}^{(i)})$ von $\text{Kern}(A - \lambda_i E) \subset \mathbb{K}^n$.

4. Rücktransformation: Durch $\vec{v}_j^{(i)} := \Phi(\vec{u}_j^{(i)}) \in V$ erhält man nun für jedes i eine Basis $(\vec{v}_1^{(i)}, \dots, \vec{v}_{d_i}^{(i)})$ des Eigenraumes $E_{\lambda_i} = \text{Kern}(f - \lambda_i \text{Id}_V)$ von f selber. $\square$

Ist wie so oft $V = \mathbb{K}^n$, der Operator also schon von vornherein als Matrix gegeben, dann kann man sich den ersten und vierten Schritt sparen — wenn man will. Man will aber nicht immer, weil manchmal Vorinformationen über den Operator eine Basiswahl nahelegen, die den zweiten und dritten Schritt wesentlich vereinfachen würde.

Wie gut kennen wir einen Operator, wenn wir seine verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ und (Basen der) Eigenräume $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_r}$ kennen? Das hängt davon ab, einen wie großen Teil von V die Summe $E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r} \subset V$ ausmacht. Auf $E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$ durchschauen wir den Operator natürlich ganz genau. Jene angenehmen Operatoren, bei denen die Summe $E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$ der Eigenräume schon ganz V ist, nennt man *diagonalisierbar*.

Definition: Ein Operator $f : V \rightarrow V$ auf einem endlichdimensionalen Vektorraum heißt **diagonalisierbar**, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren von f besitzt. $\square$

Unter einer **Diagonalmatrix** versteht man bekanntlich eine Matrix A , die außerhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen hat, für die also $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$ gilt. Eine Basis $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ von V stellt den Operator f genau dann als Diagonalmatrix dar, wenn jedes $\vec{v}_i$ ein Eigenvektor von f ist, es gilt dann $f(\vec{v}_i) = a_{ii}\vec{v}_i$, die Diagonalelemente sind also die zugehörigen Eigenwerte.

Ist insbesondere die Basis durch Aneinanderreihen von Basen für die einzelnen Eigenräume entstanden, dann hat die Matrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_r & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die *verschiedenen* Eigenwerte von f sind und jedes λ_i so oft in der Diagonalen vorkommt, wie es seiner geometrischen Vielfachheit $d_i = \dim E_{\lambda_i}$ entspricht.

Oft hat man aber mit *irgend* einer Basis $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ von Eigenvektoren von f zu tun, und dann ist es üblich, die Diagonalelemente der f darstellenden Diagonalmatrix als $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ durchzunummerieren und die Matrix als

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

zu schreiben. Dann sind die $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ natürlich auch wieder *sämtliche* Eigenwerte von f , aber sie sind im Allgemeinen nicht alle verschieden, vielmehr kommt eben jeder Eigenwert λ von f in dem n -tupel $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ so oft vor, wie es seiner geometrischen Vielfachheit $d := \dim E_\lambda$ entspricht. Diese Notation beißt sich mit der anderen, man muss aus dem Zusammenhang entnehmen, welche gerade im Gebrauch ist.

In einem Falle allerdings stimmen beide Notationen überein, nämlich wenn der Operator n *verschiedene* Eigenwerte hat. Ein solcher Operator ist auch automatisch diagonalisierbar:

Notiz: Ein Operator $f : V \rightarrow V$ auf einem n -dimensionalen Vektorraum über $\mathbb{K}$ ist offenbar genau dann diagonalisierbar, wenn die

Summe der geometrischen Vielfachheiten seiner Eigenwerte gleich n ist. Insbesondere ist jeder Operator mit n verschiedenen Eigenwerten diagonalisierbar. $\square$

Gibt es denn überhaupt nichtdiagonalisierbare Operatoren? Oh ja. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gibt es ja sogar Operatoren, die keinen einzigen Eigenwert haben, wie zum Beispiel in $V = \mathbb{R}^2$ die Drehung $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ um $\pi/2$. Allerdings kann man sich auf den Standpunkt stellen, die Matrix A habe wohl Eigenwerte, nur halten sich diese im Komplexen versteckt: $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$ hat die komplexen Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm i \in \mathbb{C}$, und in der Tat ist A als $\mathbb{C}$ -linearer Operator auf $\mathbb{C}^2$ diagonalisierbar.

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat jedes komplexe Polynom positiven Grades mindestens eine Nullstelle, und da das charakteristische Polynom eines Operators auf einem n -dimensionalen Raum mit dem höchsten Term $(-\lambda)^n$ beginnt, wie Induktion oder Leibnizformel sofort zeigen, hat jeder Operator im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $n \geq 1$ mindestens einen Eigenwert. Der Fundamentalsatz erlaubt aber eine noch genauere Zählung der Eigenwerte:

Definition: Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte eines $\mathbb{C}$ -linearen Operators $f : V \rightarrow V$ in einem n -dimensionalen komplexen Vektorraum. Dann ist das charakteristische Polynom von der Gestalt

$$P_f(\lambda) = (-1)^n \prod_{i=1}^r (\lambda - \lambda_i)^{m_i},$$

mit wohlbestimmten $m_i \geq 1$, welche die **algebraischen Vielfachheiten** der Eigenwerte heißen. $\square$

Mit algebraischen Vielfachheiten gezählt hätte also jeder komplexe Operator genau n Eigenwerte,

$$m_1 + \dots + m_r = n,$$

weil ja die Summe der algebraischen Vielfachheiten der Grad des Polynoms ist. Die Summe der *geometrischen* Vielfachheiten entscheidet aber über die Diagonalisierbarkeit, und es gilt:

Lemma: Die geometrische Vielfachheit eines $\mathbb{C}$ -linearen Operators ist stets kleiner oder gleich der algebraischen, und der Operator ist deshalb genau dann diagonalisierbar, wenn für jeden seiner Eigenwerte diese beiden Vielfachheiten übereinstimmen.

BEWEIS: Betrachte oBdA den Eigenwert λ_1 mit der geometrischen Vielfachheit d_1 . Ergänze eine Basis von E_{λ_1} zu einer von V und schaue f in dieser Basis an.⁵ Die Matrix hat dann die Gestalt

$$A = \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{array} & * \\ \hline 0 & A' \end{array}$$

Deshalb ist $P_f(\lambda) = P_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{d_1} P_{A'}(\lambda)$, wie man durch Entwicklung nach der ersten Spalte und Induktion sofort sieht, und somit ist die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ_1 von f mindestens d_1 . $\square$

Mehr als $1 \leq d_i \leq m_i$ lässt sich über die Beziehung zwischen geometrischer und algebraischer Vielfachheit nichts Allgemeingültiges zeigen: alles kann vorkommen. Einfachste und zugleich Musterbeispiele für nichtdiagonalisierbare komplexe Matrizen sind die **Jordankästchen**, Matrizen der Form

$$A := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1 \end{pmatrix} : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$$

Das charakteristische Polynom einer solchen Matrix ist offenbar $P_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^m$, also hat A nur einen einzigen Eigenwert λ_1 und dessen algebraische Vielfachheit ist m . Aber seine geometrische

Vielfachheit ist 1, denn

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

hat den Rang $m - 1$, also die Kerndimension $d_1 = \dim E_{\lambda_1} = 1$.

Mit den nichtdiagonalisierbaren Operatoren beschäftigt sich die lineare Algebra unter dem Stichwort *Jordansche Normalform*, unter dem Sie in jedem Buch über lineare Algebra Auskunft finden. Wir aber wenden uns im nächsten Kapitel einer wichtigen Klasse diagonalisierbarer Operatoren zu, nämlich den *selbstadjungierten* bzw. *hermiteschen* Operatoren in euklidischen und unitären Räumen.

21.3 Übungsaufgaben

Aufgabe R21.1: Bestimmen Sie den (dreifachen) Eigenwert λ der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

und seinen Eigenraum. Bestimmen Sie eine Transformation S , die A auf *Jordan-Normalform* bringt, d.h.

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

(Praktischer Hinweis: Was bedeutet das für die Spalten $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ von S ? Entwickeln Sie $A\vec{v}_i$ nach dieser Basis.)

Aufgabe R21.2: a) Eine Gruppe G operiere auf einer Menge M . Es bezeichne $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ den komplexen Vektorraum der beschränkten Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass G durch

$gf(p) := f(g^{-1}p)$ auf $\mathcal{F}$ operiert. Wäre das auch der Fall, wenn man $gf(p)$ durch $f(gp)$ definierte? b) Sei jetzt $g \in G$ fest gewählt und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert der durch die Aktion gegebenen linearen Abbildung $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, d.h. es gebe ein $f \in \mathcal{F}$, $f \neq 0$, mit $gf = \lambda f$. Beweisen Sie, dass λ den Betrag Eins haben muss. c) Speziell sei jetzt $M = \mathbb{R}$ und g operiere auf $\mathbb{R}$ durch Translation um ein $a > 0$, also $gx := x + a$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Finden Sie zu gegebenem $\lambda = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, alle $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit $gf = \lambda f$.

Aufgabe T21.1: Es seien $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ eines Operators $f : V \rightarrow V$. Zeigen Sie, dass $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ linear unabhängig ist.

Aufgabe T21.2: Beweisen Sie, dass der reelle Vektorraum

$$C^0([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

der stetigen Funktionen auf einem kompakten Intervall unendlich-dimensional ist.

Aufgabe T21.3: Sei $f : V \rightarrow V$ ein Operator in einem $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Es werde $f^n := f \circ \dots \circ f$ gelesen und demgemäß das Einsetzen des Operators in ein Polynom P mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ verstanden. Sei λ ein Eigenwert von f . Zeigen Sie, dass dann $P(\lambda)$ ein Eigenwert von $P(f)$ ist.

Aufgabe T21.4: Jeden komplexen Vektorraum V kann man wegen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ auch als reellen auffassen, einfach indem man von der skalaren Multiplikation $\mathbb{C} \times V \rightarrow V$ zu deren Einschränkung $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ übergeht. Beachte, dass sich an der zugrunde liegenden Menge V und der Addition dabei gar nichts ändert. Sei dieser reelle Vektorraum zur Unterscheidung mit $V_{\mathbb{R}}$ bezeichnet. Seien $v_1, \dots, v_n \in V$. Beweisen Sie, dass $(v_1, \dots, v_n)$ genau dann eine Basis von V ist, wenn $(v_1, iv_1, \dots, v_n, iv_n)$ eine von $V_{\mathbb{R}}$ ist.

Aufgabe T21.5: Sei $f : V \rightarrow V$ ein Operator in einem n -dimensionalen komplexen Vektorraum. Beweisen Sie, dass es invariante Unterräume $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n$ mit $\dim V_k = k$ geben muß. (Hinweis: Beim Induktionsschritt den Quotienten V/V_k betrachten.)

22.1 Euklidische Vektorräume

Zuerst lade ich Sie gleichsam ein, den Abschnitt 12.2 über Skalarprodukte wieder anzuschauen und dabei die dort benutzte Notation U für Untervektorräume von $\mathbb{R}^N$ als Bezeichnung für beliebige $\mathbb{R}$ -Vektorräume zu lesen. Man definiert nämlich:

Definition: Unter einem *euklidischen Vektorraum* verstehen wir Paar $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, bestehend aus einem reellen Vektorraum V und einem *Skalarprodukt*, d.h. einer Abbildung

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\longmapsto \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle, \end{aligned}$$

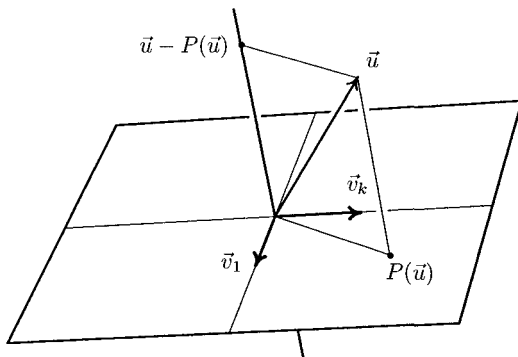
die bilinear und symmetrisch ist und $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ für alle $\vec{v} \in V \setminus 0$ erfüllt, kurz einer *positiv definiten symmetrischen Bilinearform* auf V . □

Schon in 12.2 hatten wir von der N -Tupeligkeit der dortigen Vektoren $\vec{u} \in U$ keinen wesentlichen Gebrauch gemacht und finden deshalb die damaligen Begriffe und Kniffe der ‘orthogonalen linearen Algebra’ auch in beliebigen euklidischen Vektorräumen noch intakt, nur die *Endlichdimensionalität* der Räume, für Unterräume des $\mathbb{R}^N$ automatisch gegeben, müssen wir jetzt bei Bedarf voraussetzen.

Gute Nachricht 7: Die Begriffe und Aussagen des Abschnitts 12.2 über Skalarprodukte, also

1. Norm $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$,
2. Orthogonale oder zueinander senkrechte Vektoren, $\vec{u} \perp \vec{v}$,
3. Orthonormalbasis oder kurz ON-Basis,
4. Cauchy-Schwarzsche Ungleichung $|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$,
5. Dreiecksungleichung,
6. Winkel $\angle(\vec{u}, \vec{v}) \in [0, \pi]$
7. Entwicklung $\vec{u} = \langle \vec{u}, \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1 + \cdots + \langle \vec{u}, \vec{v}_n \rangle \vec{v}_n$ nach ON-Basis,
8. Untervektorraum $A^\perp \subset V$ für Untervektorraum $A \subset V$ (ja sogar für beliebige Teilmenge $A \subset V$),
9. Orthogonalprojektion $P : V \rightarrow V_0 \subset V$ auf Untervektorraum V_0 durch $P(\vec{u}) := \sum_{i=1}^k \langle \vec{u}, \vec{v}_i \rangle \vec{v}_i$, bei gegebener ON-Basis $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$ von V_0 ,
10. Induktionsschritt beim Gram-Schmidt-Verfahren

übertragen sich problemlos auf beliebige euklidische Vektorräume, solange nur die Räume, in denen dabei Basen benutzt werden, als endlichdimensional vorausgesetzt sind. $\square$



Zur Erinnerung an Orthogonalprojektion und Gram-Schmidt-Verfahren

Als Morphismen für eine Kategorie der euklidischen Vektorräume bieten sich die das Skalarprodukt erhaltenden Abbildungen an:

Definition: Eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ zwischen euklidischen Vektorräumen heißt **orthogonal**, wenn $\langle f(\vec{u}), f(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ für alle $\vec{u}, \vec{v} \in V$. Bijektive orthogonale Abbildungen wollen wir auch **orthogonale Transformationen** nennen. $\square$

Die orthogonalen Abbildungen sind stets injektiv, weil aus $f(\vec{v}) = 0$ ja $\langle f(\vec{v}), f(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ und damit $\vec{v} = 0$ folgt. Orthogonale Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Räumen *gleicher* Dimension sind also bijektiv und daher orthogonale Transformationen. Die Inverse einer solchen Transformation ist natürlich ebenfalls orthogonal, die orthogonalen Transformationen sind schon wirklich die ‘Iso-Morphismen’ der Kategorie. Eine orthogonale Transformation $f : V \rightarrow W$ überträgt gewissermaßen die ganze orthogonale lineare Algebra von V in die von W .

Lemma: Eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ zwischen euklidischen Vektorräumen ist genau dann orthogonal, wenn sie die Norm erhält, also $\|f(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$ für alle $\vec{v} \in V$ erfüllt.

BEWEIS: Normerhaltung ist natürlich notwendig für Orthogonalität, dass sie aber bereits hinreichend ist, folgt aus

$$\begin{aligned} \langle f(\vec{u}), f(\vec{v}) \rangle &= \frac{1}{2}(\|f(\vec{u} + \vec{v})\|^2 - \|f(\vec{u})\|^2 - \|f(\vec{v})\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \\ &= \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle, \end{aligned}$$

also mit Hilfe der Rekonstruktion des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ aus seiner quadratischen Form $\|\cdot\|^2$ durch *Polarisierung*. $\square$

Beachten Sie, dass Orthogonalprojektionen $P : V \rightarrow V_0$, außer im trivialen Falle $V_0 = V$, *keine* orthogonalen Abbildungen im obigen Sinne sind, auch wenn sie manchmal sogar *orthogonale Projektionen* genannt werden. Das vielbeschäftigte Wort “orthogonal” ist eben ein wenig überstrapaziert, da ergeben sich solche Kollisionen.¹

Orthogonalität einer Abbildung erkennt man auch daran, wie die Abbildung mit einer ON-Basis umgeht. Ist $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ eine ON-Basis von V , so muss, wenn $f : V \rightarrow W$ orthogonal sein soll, ja

jedenfalls $\langle f(\vec{v}_i), f(\vec{v}_j) \rangle = \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij}$ gelten, und wegen der Bilinearität des Skalarproduktes genügt das auch. Bei endlichdimensionalem V können wir also sagen:

Lemma: Eine lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ ist genau dann orthogonal, wenn sie eine ON-Basis in ein Orthonormalsystem überführt. $\square$

Ein n -tupel $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$ von Vektoren in einem euklidischen Vektorraum W ist hier natürlich ein **Orthonormalsystem** oder kurz **ON-System** genannt, wenn $\langle \vec{w}_i, \vec{w}_j \rangle = \delta_{ij}$ gilt, also die Vektoren alle die Länge 1 haben und paarweise senkrecht aufeinander stehen. Man nennt ein ON-System $(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n)$ auch ein **n -Bein** in W .

Da man bei gegebener Basis zur Konstruktion linearer Abbildungen die Bilder der Basisvektoren beliebig vorgeben darf, und da wir uns mit dem Gram-Schmidt-Verfahren ON-Basen und ON-Systeme zu speziellen Zwecken maßschneidern können, haben wir in dem Lemma auch ein Mittel zur situationsgerechten *Herstellung* konkreter orthogonaler Abbildungen.

Korollar 1: Eine reelle $m \times n$ -Matrix $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann orthogonal in Bezug auf das gewöhnliche Skalarprodukt, wenn ihre Spalten ein ON-System $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ in $\mathbb{R}^m$ bilden, wenn also $A^t A = E_n$, die $n \times n$ -Einheitsmatrix ist. $\square$

$$\begin{array}{|c|} \hline \vec{a}_i^t \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \vec{a}_j \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \\ \hline \end{array}$$

Für quadratische Matrizen ist aber $A^t A = E$ gleichbedeutend mit $AA^t = E$ und daher gilt:

Korollar 2: Eine reelle quadratische Matrix ist genau dann orthogonal, wenn sie invertierbar und $A^{-1} = A^t$ ist. $\square$

Definition: Die orthogonalen $n \times n$ -Matrizen bilden mit der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung die sogenannte **orthogonale Gruppe**

$$O(n) := \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) \mid A^t A = E\}.$$

Die Untergruppe $SO(n) := \{A \in O(n) \mid \det A = 1\}$ von $O(n)$ nennt man die **spezielle orthogonale Gruppe**. $\square$

In dem selben Sinne von “Determinante gleich Eins” wird das Wort *speziell* und der Buchstabe *S* auch in der Bezeichnung anderer Matrizengruppen geführt, zum Beispiel ist

$$SL(n, \mathbb{R}) := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$

die *spezielle lineare Gruppe* und

$$SU(n) := \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$$

die *spezielle unitäre Gruppe*, der wir im Abschnitt 22.3 begegnen werden. Im Falle der orthogonalen Gruppe aber sind die $A \in O(n)$ selbst schon “beinahe speziell”, es gilt wegen $A^t A = E$ nämlich $|\det A| = 1$, und $SO(n)$ ist deshalb auch die Gruppe der orientierungserhaltenden orthogonalen Transformationen von $\mathbb{R}^n$ auf sich, mit anderen Worten die Gruppe der *Drehungen* im $\mathbb{R}^n$, während $O(n)$ aus allen Transformationen besteht, die sich aus Drehungen und Spiegelungen erzeugen lassen.

Um die lineare Algebra in die Matrizensprache zu übersetzen, benutzt man Basen, und in der *orthogonalen* linearen Algebra sind dafür natürlich die ON-Basen besonders zweckmäßig. Die Basisisomorphismen von ON-Basen sind orthogonale Transformationen und konservieren daher die auf das Skalarprodukt bezüglichen Verhältnisse. So ist zum Beispiel eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen euklidischen Vektorräumen genau dann orthogonal, wenn sie bezüglich ON-Basen durch eine orthogonale Matrix beschrieben wird. Insbesondere:

Notation und Notiz: Für einen euklidischen Vektorraum V bezeichne $O(V)$ seine orthogonale Gruppe, d.h. die Gruppe der orthogonalen Transformationen von V auf sich. Sei nun $\Phi : \mathbb{R}^n \cong V$ der Basisisomorphismus einer ON-Basis in V . Dann ist durch die Zuordnung der Matrizen, $f \mapsto \Phi^{-1} \circ f \circ \Phi$, ein Gruppenisomorphismus

$$O(V) \xrightarrow{\cong} O(n)$$

gegeben, ebenso $SO(V) \xrightarrow{\cong} SO(n)$ für die speziellen orthogonalen Gruppen. $\square$

Allein die Möglichkeit, eine ON-Basis zur Hand nehmen zu können, rechtfertigt oft schon die oBdA-Annahme “sei $V = \mathbb{R}^n$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das übliche Skalarprodukt.” Ob es aber jeweils klug ist, sich dergestalt von den konkreten Objekten zu verabschieden, hängt ganz von den Umständen ab.²

22.2 Selbstadjungierte Operatoren

Selbstadjungiertheit ist eine Symmetrieeigenschaft, was der Grund dafür sein mag, dass man diesen Operatoren so oft begegnet. Wegen der einfachen Struktur ihrer Eigendaten ist die Wirkungsweise der selbstadjungierten Operatoren besonders gut zu durchschauen, und um ihre Eigenwerte und Eigenräume soll es in diesem Abschnitt deshalb auch gehen.

Definition: Ein Operator $f : V \rightarrow V$ auf einem endlichdimensionalen euklidischen Vektorraum heißt **selbstadjungiert**, wenn

$$\langle f(\vec{u}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, f(\vec{v}) \rangle$$

für alle $\vec{u}, \vec{v} \in V$ gilt. $\square$

Bei gegebener ON-Basis $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ von V erkennt man die Selbstadjungiertheit des Operators f auch an der Symmetrie $A = A^t$ seiner Matrix A , denn die $a_{1j}, \dots, a_{nj}$ sind ja die Koeffizienten von $f(\vec{v}_j)$ bei Entwicklung nach der Basis, also

$$a_{ij} = \langle \vec{v}_i, f(\vec{v}_j) \rangle$$

für jeden Operator, und daher gilt $a_{ij} = a_{ji}$ genau dann, wenn die Selbstadjungiertheitsbedingung für alle Basisvektoren und damit überhaupt für alle Vektoren erfüllt ist. Halten wir das fest:

Notiz: *Bezüglich einer ON-Basis sind die selbstadjungierten Operatoren genau die Operatoren mit symmetrischer Matrix.* $\square$

Über die Eigenvektoren erhalten wir aus der Selbstadjungiertheit sofort eine kostenlose, aber gleichwohl wichtige Vorinformation:

Lemma 1: *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten eines selbstadjungierten Operators stehen immer senkrecht aufeinander.*

BEWEIS: Aus $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ und $f(\vec{v}) = \mu \vec{v}$ folgt

$$\langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle f(\vec{u}), \vec{v} \rangle \underset{\text{Selbstadj.}}{=} \langle \vec{u}, f(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \mu \vec{v} \rangle,$$

also $(\lambda - \mu) \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, und im Falle $\lambda \neq \mu$ daher $\vec{u} \perp \vec{v}$. $\square$

Die Eigenräume stehen daher paarweise senkrecht aufeinander, ihre Summe, sowieso direkt, ist sogar eine **orthogonale Summe**:

$$E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_r} = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte des selbstadjungierten Operators bezeichnen.

Wenn wir also ON-Basen der Eigenräume aneinanderreihen, so erhalten wir eine ON-Basis der Summe, und wüssten wir, dass f diagonalisierbar ist, so wäre das sogar eine ON-Basis von ganz V aus Eigenvektoren von f . Eine traumhaft schöne Basis für das orthogonal-linear-algebraische Arbeiten mit dem Operator! Und eine solche Basis kann man immer haben, jeder selbstadjungierte Operator ist diagonalisierbar:

Satz: *Jeder selbstadjungierte Operator f auf einem endlichdimensionalen euklidischen Vektorraum V besitzt eine ON-Basis aus Eigenvektoren.*

BEWEIS: Induktion nach der Dimension n von V . Der Induktionsbeginn bei $n = 1$ ist trivial, und für den Induktionsschluss von $n - 1$ auf n brauchen wir nur zu zeigen, dass f überhaupt wenigstens *einen* Eigenvektor $\vec{v} \in V$ hat. Denn wegen der Selbstadjungiertheit bildet f den $n - 1$ -dimensionalen Untervektorraum $V_0 := \vec{v}^\perp \subset V$ in sich ab:

$$\langle f(\vec{u}), \vec{v} \rangle_{\text{Selbstadj.}} = \langle \vec{u}, f(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle = 0$$

für alle $\vec{u} \in V_0$. Nach Induktionsannahme besitzt der selbstadjungierte Operator $f|_{V_0} : V_0 \rightarrow V_0$ schon eine aus Eigenvektoren bestehende ON-Basis $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-1})$ von V_0 , und ergänzt durch $\vec{v}_n := \vec{v}/\|\vec{v}\|$ ergäbe das die gewünschte ON-Basis aus Eigenvektoren für ganz V .

Ganz ähnlich waren wir seinerzeit beim Beweis des Satzes von Sylvester in 12.1 vorgegangen. Damals brauchten wir als Startkapital nur *irgend* einen Vektor $\vec{v}$ mit $q(\vec{v}) \neq 0$, jetzt brauchen wir *irgend* einen Eigenvektor von f . Aber während eine von Null verschiedene quadratische Form trivialerweise einen Vektor mit $q(\vec{v}) \neq 0$ haben muss, ist die Existenz eines Eigenvektors von f gar nicht trivial. Wenn man Operatoren ohne Eigenvektoren schon durch Drehung im $\mathbb{R}^2$ herstellen kann, wieso sollte es unmöglich sein, einen selbstadjungierten Operator ohne Eigenvektoren zu finden, vielleicht durch eine raffinierte Konstruktion in einem hochdimensionalen $\mathbb{R}^N$?

OBdA sei $V = \mathbb{R}^n$ mit dem üblichen Skalarprodukt! Dann ist der Operator also durch eine symmetrische Matrix $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben, und wir sollen zeigen, dass das charakteristische Polynom $P_A(\lambda)$ eine reelle Nullstelle hat, denn diese wäre dann ein Eigenwert von A . Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt P_A jedenfalls eine *komplexe* Nullstelle $\gamma + i\omega \in \mathbb{C}$, das ist demnach ein Eigenwert der $\mathbb{C}$ -linearen Abbildung $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, als die ich A wegen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ auch lesen kann. Das heißt aber, dass es einen von Null verschiedenen Vektor $\vec{z} = \vec{u} + i\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ mit

$$A(\vec{u} + i\vec{v}) = (\gamma + i\omega)(\vec{u} + i\vec{v})$$

gibt. Sortiert nach Real- und Imaginärteilen ergeben sich daraus die beiden reellen Vektorgleichungen

$$\begin{aligned} A\vec{u} &= \gamma\vec{u} - \omega\vec{v} \\ A\vec{v} &= \omega\vec{u} + \gamma\vec{v}. \end{aligned}$$

Noch haben wir die Symmetrie von A nicht ausgenutzt, das tun wir aber jetzt indem wir nachschauen, was $A\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot A\vec{v}$ für uns in Bereitschaft hält. Jedenfalls folgt

$$\gamma \vec{u} \cdot \vec{v} - \omega \vec{v} \cdot \vec{v} = \omega \vec{u} \cdot \vec{u} + \gamma \vec{v} \cdot \vec{u},$$

also $\omega(\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v}) = 0$, und da $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ wegen $\vec{z} \neq 0$ nicht Null sein kann, folgt $\omega = 0$, also ist die Nullstelle reell und $\gamma \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A . $\square$

Die restlichen Aussagen dieses Abschnittes sind nur Folgerungen aus dem Satze. Zuerst sei die Diagonalisierbarkeit der selbstadjungierten Operatoren nochmals in reiner Matrizensprache wiederholt:

Korollar 1 (Orthogonale Diagonalisierung symmetrischer Matrizen): Ist A eine reelle symmetrische $n \times n$ -Matrix, d.h. ist $A = A^t$, so gibt es eine orthogonale Matrix $S \in O(n)$, d.h. eine $n \times n$ -Matrix mit $S^{-1} = S^t$, so dass $D := S^t A S$ in Diagonalgestalt ist. $\square$

Das *Diagonalisieren*, als eine Tätigkeit, umfasst in seinem vollen Umfang das Auffinden einer solchen Matrix S und das Bestimmen der Diagonalmatrix D . Oft ist aber nur eine Version ‘light’ gemeint, indem nur nach D gefragt ist. Dann brauchen Sie nur die Eigenwerte und deren Vielfachheiten zu finden, was natürlich weniger Arbeit macht. In die Diagonale muss jeder Eigenwert so oft eingetragen werden, wie die Vielfachheit angibt, jede Reihenfolge kann vorkommen, wählen Sie irgend eine.

Haben Sie aber auch die diagonalisierende orthogonale Transformation $S \in O(n)$ zu bestimmen, so berechnen Sie zu jedem der verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ von A zuerst, mit dem Gaußschen Verfahren oder zu Fuß, Basen der Eigenräume, die Sie dann mit dem Gram-Schmidtschen Verfahren zu ON-Basen der Eigenräume orthonormalisieren. Diese ON-Basen von $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_r}$ ergeben dann

aneinandergereiht eine ON-Basis $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A , und

$$S := \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline \vec{u}_1 & \dots & \vec{u}_n \\ \hline \end{array}$$

ist dann die gesuchte Matrix.

Geht es ursprünglich nicht um eine Matrix, sondern um einen selbstadjungierten Operator $f : V \rightarrow V$ auf einem n -dimensionalen euklidischen Vektorraum, so kommen noch zwei Arbeitsgänge hinzu, nämlich eine *Transformation* am Anfang und die *Rücktransformation* am Schluss, wie bei der Bestimmung der Eigendaten eines beliebigen Operators im Abschnitt 21.2. Nur nimmt man jetzt eine ON-Basis von V , um f durch eine symmetrische Matrix A zu beschreiben. Der Basisisomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^n \cong V$ dieser Hilfs-ON-Basis verwandelt am Ende dann die errechnete ON-Basis $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ im $\mathbb{R}^n$ in eine ON-Basis $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ von V aus Eigenvektoren von f , und $\Psi := \Phi \circ S : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ ist dann die orthogonale Transformation, die f zu $D = \Psi^{-1} \circ f \circ \Psi$ diagonalisiert.

Im endlichdimensionalen Falle bilden die Eigenwerte das sogenannte **Spektrum** eines Operators, und damit zusammenhängende Begriffe führen deshalb oft das Beiwort *spektral*, so auch im folgenden Korollar.

Korollar 2 (Spektraldarstellung selbstadjungierter Operatoren): Sei $f : V \rightarrow V$ ein selbstadjungierter Operator auf einem endlichdimensionalen euklidischen Vektorraum und $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ seine verschiedenen Eigenwerte. Ferner bezeichne $P_k : V \rightarrow E_{\lambda_k} \subset V$ die Orthogonalprojektion auf den k -ten Eigenraum. Dann gilt

$$f = \sum_{k=1}^r \lambda_k P_k.$$

BEWEIS: Ist $\vec{v} \in E_{\lambda_i}$, so gilt

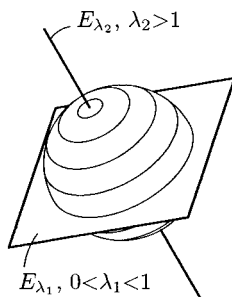
$$P_k(\vec{v}) = \begin{cases} \vec{v} & \text{für } k = i \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

denn die Eigenräume stehen ja senkrecht aufeinander. Für $\vec{v} \in E_{\lambda_i}$ ist also

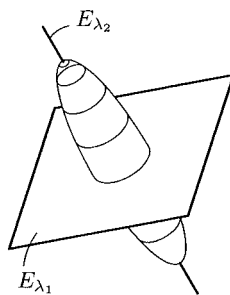
$$\sum_{k=1}^r \lambda_k P_k(\vec{v}) = \lambda_i \vec{v} = f(\vec{v}),$$

daher haben f und $\sum \lambda_k P_k$ dieselbe Wirkung auf Eigenvektoren, und weil es eine Basis aus Eigenvektoren gibt, auf alle Vektoren. $\square$

Die Spektraldarstellung führt uns den einfachen Mechanismus eines selbstadjungierten Operators abermals vor Augen. Die Eigenräume $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_r}$ denken wir uns wie aufeinander senkrecht stehende ‘Koordinatenachsen’, nur dass sie vielleicht nicht ein-, sondern der Vielfachheit gemäß höherdimensional sein mögen. Auf der einzelnen ‘Koordinatenachse’ E_{λ_k} operiert f einfach durch Multiplikation mit λ_k :



Testobjekt Sphäre



Nach der Transformation

Will man daher f auf ein beliebiges $\vec{v} \in V$ anwenden, so zerlegt man es erst gemäß

$$V = E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$$

in seine Eigenkomponenten: $\vec{v} = P_1 \vec{v} + \dots + P_r \vec{v}$, und damit ergibt sich $f(\vec{v}) = \lambda_1 P_1 \vec{v} + \dots + \lambda_r P_r \vec{v}$. So sollen Sie sich das Wesen

der selbstadjungierten Operatoren auch anschaulich vorstellen und nicht *nur* daran denken, dass sich beim Ausführen eines gewissen Rechenprogramms (charakteristisches Polynom, Nullstellen, Gauß-Verfahren, Gram-Schmidt) eine orthogonale Matrix S ergeben werde, die A zu $D = S^t A S$ diagonalisiert.

Es gibt aber noch einen anderen Grund, aus dem Sie die Spektraldarstellung schätzen sollen. Die selbstadjungierten Operatoren in endlichdimensionalen Räumen sind zwar ein Grundpfeiler der linearen Algebra, aber ihre tiefere wissenschaftliche Bedeutung entfalten die selbstadjungierten Operatoren erst im Unendlichdimensionalen. Dort gibt es kein charakteristisches Polynom mehr, an die Stelle von Eigenwerten, die nicht jeder selbstadjungierte Operator haben muss, tritt das allgemeinere *Spektrum*, Sie erkennen die Theorie kaum wieder — aber die Spektraldarstellung ist noch da, wenn auch in verallgemeinerter (Integral-)Form, und bietet Ihnen eine Brücke des heuristischen Verständnisses von der endlichdimensionalen zur unendlichdimensionalen Situation.

22.3 Die Hauptachsentransformation

Zu den Anwendungen der orthogonalen Diagonalisierbarkeit der symmetrischen Matrizen gehört auch die sogenannte *Hauptachsentransformation* der quadratischen Formen. Eine reelle symmetrische $n \times n$ -Matrix B beschreibt ja durch

$$Q_B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{x} \mapsto \vec{x}^t B \vec{x}$$

eine quadratische Form auf dem $\mathbb{R}^n$, und ist nun $S \in O(n)$ eine B diagonalisierende orthogonale Matrix, also

$$S^t B S =: D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

so nimmt $Q_B \circ S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die einfache Gestalt

$$Q_B \circ S(\vec{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

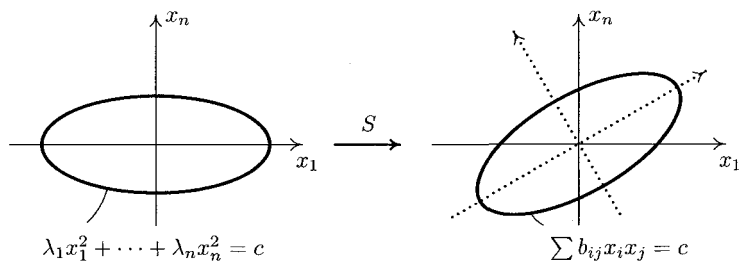
an, denn $Q_B(S(\vec{x})) = (S\vec{x})^t B(S\vec{x}) = \vec{x}^t S^t B S \vec{x} = \vec{x}^t D \vec{x}$. Man sagt dann, man habe Q_B mittels S auf *Hauptachsen transformiert*, und die ganze Prozedur heißt die *Hauptachsentransformation* der quadratischen Form, obwohl es eigentlich die orthogonale Transformation S ist, die den Namen Hauptachsentransformation verdiente.

Wenn Sie also eine Hauptachsentransformation einer quadratischen Form Q_B auf dem $\mathbb{R}^n$ auszuführen haben, so gehört dazu auch die Bestimmung der diagonalisierenden orthogonalen Matrix S , es sei denn es wird nur das Endergebnis $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$ von Ihnen verlangt, wozu Sie natürlich wieder nur die Eigenwerte von B und deren Vielfachheiten zu wissen brauchen.

Mathematisch ist die Hauptachsentransformation also gegenüber der orthogonalen Diagonalisierung symmetrischer Matrizen nichts Neues, aber sie hat eine geometrisch-anschauliche Seite, die wir jetzt einmal betrachten wollen. Die Hauptachsentransformation $S \in O(n)$ erschließt uns die durch die komplizierte Gleichung

$$\sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j = c$$

beschriebene Teilmenge $Q_B^{-1}(c) \subset \mathbb{R}^n$ als das Bild unter S der durch die ganz einfache Gleichung $\lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 = c$ gegebenen:



Wirkung der Hauptachsentransformation S

Denn erfüllt $\vec{x}$ die Gleichung $\vec{x}^t D \vec{x} = c$, so $S\vec{x}$ wegen $D = S^t B S$ die Gleichung $(S\vec{x})^t B (S\vec{x}) = c$ und umgekehrt oder kurz: S transformiert die Niveaus von $Q_B \circ S$ in die von Q_B selbst.

Schauen wir uns deshalb die geometrischen Figuren, die durch Gleichungen des einfachen Typs $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 = c$ gegeben sind, jetzt einmal systematisch an. Dazu genügt es offenbar, die Fälle $c = 1$ und $c = 0$ betrachten, denn durch $c \neq 0$ können wir ja dividieren. Außerdem wollen wir zu größerer Übersichtlichkeit die n Variablen neu als $x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s, z_1, \dots, z_t$ benennen und zwar so, dass die Quadrate der x -Variablen einen positiven Koeffizienten haben und die der y -Variablen einen negativen, während die z -Variablen die mit dem Koeffizienten Null sind, also in der Gleichung gar keine Rolle spielen.

Die beiden Fälle $c = 1$ und $c = 0$ wollen wir durch die Worte *regulär* und *singulär* unterscheiden, wir nennen

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_r^2}{a_r^2} - \frac{y_1^2}{b_1^2} - \dots - \frac{y_s^2}{b_s^2} = 1$$

den *regulären* und

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_r^2}{a_r^2} - \frac{y_1^2}{b_1^2} - \dots - \frac{y_s^2}{b_s^2} = 0$$

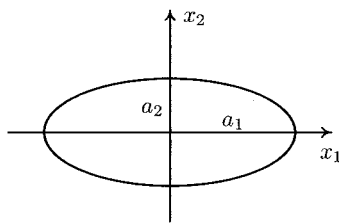
den *singulären* Typ der Normalformen quadratischer Gleichungen, um die es uns jetzt geht. Dabei ist also $r + s + t = n$ und $r, s, t \geq 0$ zu denken, sowie alle $a_i > 0$ und $b_j > 0$.

Einige Fälle dürfen wir sogleich als uninteressant oder jedenfalls ganz einfach abhaken: Im Falle $t = n$ stellen die Gleichungen gar keine Bedingung, beschreiben also den ganzen Raum, im Fall $s = n$ ist die reguläre Gleichung nicht erfüllbar, beschreibt also die leere Menge, während sowohl für $r = n$ als auch für $s = n$ die singuläre Gleichung nur vom Nullvektor erfüllt wird, die beschriebene Menge besteht nur aus diesem einen Element.

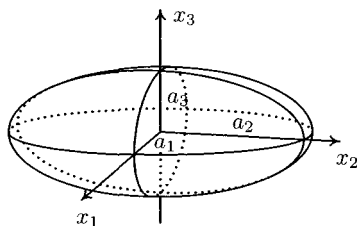
Beginnen wir die Besichtigung der interessanten Fälle mit der regulären Gleichung für $r = n$, also mit

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1.$$

Für $n = 2$ nennt man das die Gleichung einer *Ellipse* mit den Halbachsen a_1 und a_2 , für $n = 3$ die Gleichung eines *Ellipsoids* mit den Halbachsen a_1, a_2 und a_3 .



Ellipse



Ellipsoid

Im allgemeinen Fall spricht man eben von einem $(n-1)$ -dimensionalen Ellipsoid im $\mathbb{R}^n$ mit den Halbachsen $a_1, \dots, a_n$ und akzeptiert gegebenenfalls eine Skizze mit der Beschriftung ' x_n -Achse' an der dritten, also letzten Koordinatenachse, was bleibt einem anderes übrig?

Es ist aber auch wirklich keinerlei höherdimensionale Heimtücke von den Ellipsoiden zu befürchten, denn sie gehen ja durch bloße Umskalierung der Koordinatenachsen aus der gewöhnlichen Einheitssphäre $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ hervor, genauer: die Transformation

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

die den Einheitswürfel $[0, 1]^n$ zu dem Quader $[0, a_1] \times \dots \times [0, a_n]$ macht, führt S^{n-1} in das Ellipsoid über.

Bleiben wir noch bei $t = 0$, also $r + s = n$, aber jetzt sei $0 < r < n$. Dann sind sowohl die reguläre als auch die singuläre Gleichung interessant. Die reguläre Gleichung

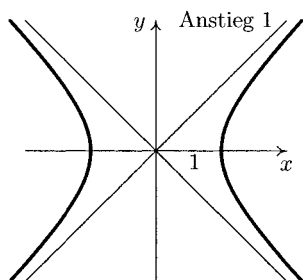
$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_r^2}{a_r^2} - \frac{y_1^2}{b_1^2} - \dots - \frac{y_{n-r}^2}{b_{n-r}^2} = 1$$

beschreibt jetzt ein $(n-1)$ -dimensionales **Hyperboloid** im $\mathbb{R}^n$, die singuläre Gleichung

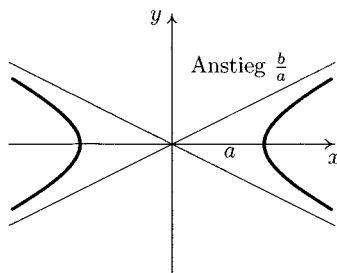
$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_r^2}{a_r^2} - \frac{y_1^2}{b_1^2} - \dots - \frac{y_{n-r}^2}{b_{n-r}^2} = 0$$

den zugehörigen verallgemeinerten Doppelkegel, dem sich das Hyperboloid asymptotisch nähert. Wiederum geht der allgemeine Fall aus dem Spezialfall $a_1 = \dots = a_r = b_1 = \dots = b_{n-r} = 1$ durch bloßes Umskalieren der Koordinatenachsen hervor.

Vor allem muss man einmal den Fall $n = 2, r = 1$ verstehen.

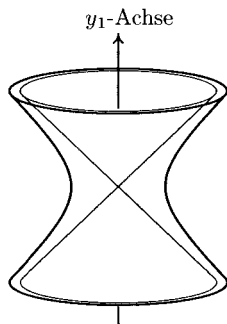


Standardhyperbel $x^2 - y^2 = 1$

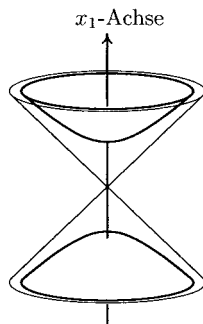


Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

In höheren Dimensionen sind das Standard-Hyperboloid und sein Doppelkegel, also vor dem Umskalieren mit der Diagonalmatrix aus den $a_1, \dots, b_{n-r}$, durch $\|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2 = 1$ bzw. $\|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2 = 0$ gegeben und lassen sich deshalb durch dieselbe Skizze wie im Falle $n = 2$ andeuten, wenn man bereit ist, an die beiden Koordinatenachsen die Beschriftungen $\mathbb{R}^r$ und $\mathbb{R}^{n-r}$ anzubringen. Eine realistischere Vorstellung geben aber die Fälle $n = 3, r = 2$ und $n = 3, r = 1$:



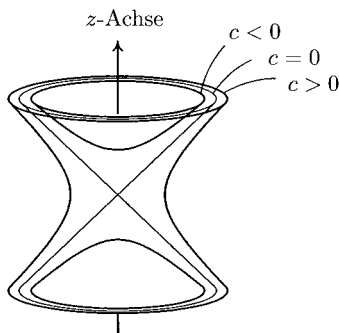
Einschaliges Hyperboloid
 $x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 = 1$



Zweischaliges Hyperboloid
 $x_1^2 - y_1^2 - y_2^2 = 1$

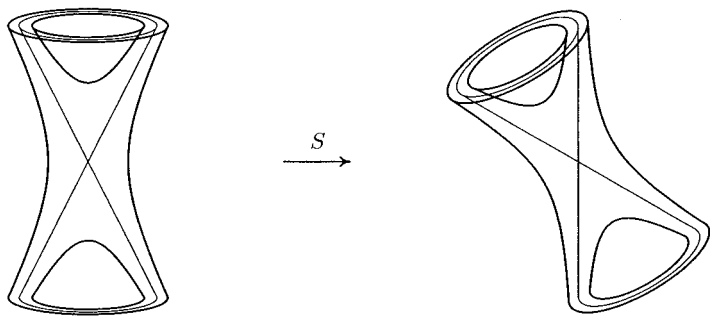
Betrachtet man *alle* Niveaus von $Q(x, y, z) := x^2 + y^2 - z^2$ auf dem

$\mathbb{R}^3$ (jetzt mit der üblichen Koordinatennotation), also die Gleichung $x^2 + y^2 - z^2 = c$ nicht nur für $c = 1$ und $c = 0$, so kommen beide Typen von Hyperboloiden dabei vor, weil ja z.B. für $c = -1$ die Gleichung zu $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ wird:



$$\text{Niveaus } x^2 + y^2 - z^2 = c, c \in \mathbb{R}$$

Durch Achsenskalierungen und anschließende geeignete Drehung kann man daraus die Familie der Niveaus jeder quadratischen Form Q_B gewinnen, deren Matrix zwei positive und einen negativen oder zwei negative und einen positiven Eigenwert hat.

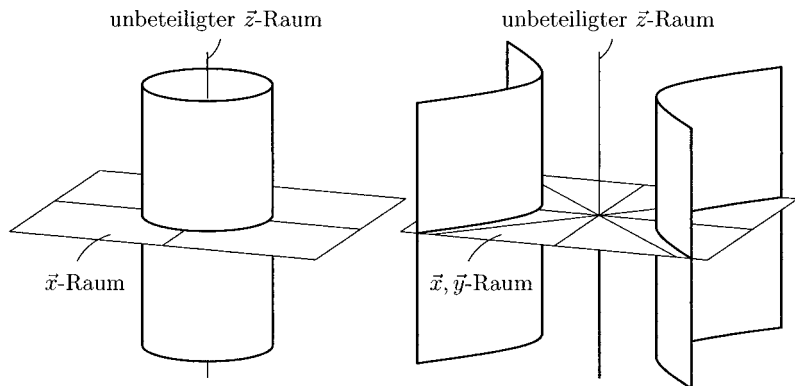


$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = c$$

$$\sum_{i,j=1}^3 b_{ij} x_i x_j = c$$

Unsere Besichtigung der Standardtypen ist komplett, wenn wir auch noch den Fall anschauen, dass unbeteiligte Koordinaten $z_1, \dots, z_t$ vorhanden sind, $0 < t < n$. Das ist aber ganz einfach, denn ganz

gleich, ob es sich um den regulären oder den singulären Gleichungstyp handelt, die Gleichung beschreibt eben $M \times \mathbb{R}^t$, wenn $M \subset \mathbb{R}^{r+s}$ die Teilmenge ist, die im Raume der echt beteiligten Koordinaten durch die Gleichung beschrieben wird:



Geometrische Rolle der unbeteiligten Koordinaten

Habe ich Ihnen nun schon so viel über die Hauptachsentransformation der quadratischen Formen im $\mathbb{R}^n$ erzählt, dass die Mathematik darüber beinahe zum Stillstand gekommen ist, so sollten Sie hier auch finden, was die Hauptachsentransformation über die allgemeineren quadratischen Gleichungen zu sagen hat, in denen auch *lineare* Terme vorkommen. Blättern Sie indessen ruhig schon weiter, falls Sie in Eile sind.

Unter einem **quadratischen Polynom** auf dem $\mathbb{R}^n$ versteht man eine Summe $f = Q_B + \varphi + c$ aus einer quadratischen Form, einer linearen Form (d.h. eine linearen Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$) und einer Konstanten. Was für eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ beschreibt die **quadratische Gleichung** $f(\vec{x}) = 0$?

Bewirkt $S \in O(n)$ die Hauptachsentransformation für Q_B , und bezeichnen wir die Koordinaten wieder mit den Buchstaben x, y und z je nachdem, ob sie in $Q_B \circ S$ mit einem positiven, negativen

oder gar keinem Term eingehen, so können wir

$$f \circ S = Q_B \circ S + \varphi \circ S + c$$

auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^t$ jedenfalls in der Form

$$\begin{aligned} f(S(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})) = & \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 - \mu_1 y_1^2 - \cdots - \mu_s y_s^2 \\ & + u_1 x_1 + \cdots + u_r x_r + v_1 y_1 + \cdots + v_s y_s \\ & + w_1 z_1 + \cdots + w_t z_t + c \end{aligned}$$

mit positiven λ_i und μ_j schreiben. So weit kommt man ohne nachzudenken.

Man kann darüber hinaus aber S so wählen, dass

$$w_t \leq 0 \quad \text{und} \quad w_1 = \cdots = w_{t-1} = 0$$

ist. Das liegt daran, dass es der quadratischen Form Q_B ganz gleichgültig ist, welche Transformationen im Raum $\mathbb{R}^t$ der unbeteiligten Koordinaten etwa vorausgehen. Erfüllt nämlich S diese zusätzliche Forderung noch nicht im ersten Anlauf, so wähle man eine orthogonale Transformation $S' : \mathbb{R}^t \rightarrow \mathbb{R}^t$, die den letzten Einheitsvektor $\vec{e}_t \in \mathbb{R}^t$ in die Richtung von $-\vec{w} \in \mathbb{R}^t$ dreht. Dann ist durch

$$\tilde{S} = \left[\begin{array}{c|cc} S & \begin{array}{cc|c} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{array} & 0 \\ \hline & 0 & S' \end{array} \right]$$

eine Hauptachsentransformation $\tilde{S} \in O(n)$ von Q_B definiert, die das gewünschte leistet, und deshalb dürfen wir oBdA annehmen, S selbst habe das gleich getan.

Nun setzen wir einen Schritt, der im Falle einer quadratischen Gleichung *ohne* linearen Term keine Vereinfachung hätte bringen können, weshalb bisher noch keine Rede davon war. Wir lassen auch *Translationen* im $\mathbb{R}^n$ zu, wenn sie die Gleichung vereinfachen helfen. Die richtige Translation findet man mit Hilfe eines Tricks, den Sie aber gewiss von der Schule her kennen, nämlich mittels *quadratischer Ergänzung*, also der Beobachtung

$$\lambda_1 x_1^2 + u_1 x_1 = \lambda_1 \left(x_1 + \frac{u_1}{2\lambda_1} \right)^2 - \frac{u_1^2}{4\lambda_1}$$

usw. Auf diese Weise saugen die Quadrate die linearen Terme $\vec{u} \cdot \vec{x}$ und $\vec{v} \cdot \vec{y}$ auf, ohne sonst etwas zu ändern außer dem konstanten Term. Etwas präziser gesagt: ist $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Translation um den Vektor

$$\left(-\frac{u_1}{2\lambda_1}, \dots, -\frac{u_r}{2\lambda_r}, \frac{v_1}{2\mu_1}, \dots, \frac{v_s}{2\mu_s}, 0, \dots, 0 \right) \in \mathbb{R}^n,$$

so ist $f \circ S \circ T$ von der vereinfachten Gestalt

$$(\vec{x}, \vec{y}, z) \mapsto \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 - \mu_1 y_1^2 - \dots - \mu_s y_s^2 + w_t z_t + c'$$

Hier gabelt sich der Weg. Entweder es ist $w_t = 0$, dann ist gar kein linearer Term mehr da, und $(f \circ S \circ T)^{-1}(0)$ ist eine der oben behandelten Mengen, ein Ellipsoid oder Hyperboloid oder ein Kegel usw., aus der dann durch Anwendung der Translation und der orthogonalen Transformation die gesuchte Menge $f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$ selbst hervorgeht.

Oder aber es ist $w_t < 0$, nach der oben getroffenen Wahl von S . Dann können wir durch eine Translation in z_t -Richtung zuerst den konstanten Term zu Null machen, da $w_t z_t + c' = w_t(z_t + c'/w_t)$ ist, und erhalten dann nach Division durch das positive $-w_t$ einen neuartigen Gleichungstyp, nämlich

$$z_t = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_r^2}{a_r^2} - \frac{y_1^2}{b_1^2} - \dots - \frac{y_s^2}{b_s^2},$$

den wir **parabolisch** nennen wollen. Die dadurch beschriebene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ geht also durch Translation und orthogonale Transformation in die Nullstellenmenge $f^{-1}(0)$ der ursprünglichen quadratischen Gleichung über, daher unser Interesse daran.

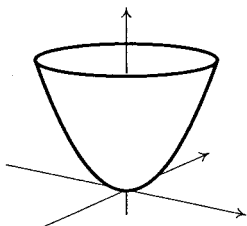
Durch Umskalierung der $\vec{x}, \vec{y}$ -Koordinatenachsen geht die Gleichung in die noch einfachere Gleichung

$$z_t = \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2$$

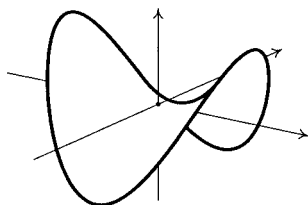
über. Sie beschreibt den *Graphen* der durch

$$(\vec{x}, \vec{y}, z_1, \dots, z_{t-1}) \mapsto \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2$$

definierten quadratischen Form auf dem $\mathbb{R}^{n-1}$. Für $n = 2$, $r = 1$ ist es einfach der Graph der Normalparabel, $z = x^2$. Im Falle $n = 3$ und $r = 2$ bzw. $r = s = 1$ spricht man vom elliptischen bzw. hyperbolischen **Paraboloid**.



Elliptisches Paraboloid



Hyperbolisches Paraboloid

Die quadratischen Gleichungen *ohne* linearen Term hatten wir in reguläre und singuläre eingeteilt, wollen wir das bei den allgemeinen quadratischen Gleichungen auch tun, so müssen wir die parabolischen Gleichungen zu den *regulären* Gleichungen rechnen.³

Bisher haben wir in diesem Abschnitt nur von quadratischen Formen und quadratischen Polynomen auf dem $\mathbb{R}^n$ gesprochen. Sind wir stattdessen auf einem n -dimensionalen euklidischen Vektorraum V und betrachten dort quadratische Formen $q : V \rightarrow \mathbb{R}$ und quadratische Polynome $q + \varphi + c$, so führt uns eine orthogonale Hilfsttransformation $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ in den $\mathbb{R}^n$ zurück. Statt S bzw. $S \circ T$ benutzen wir am Ende dann $\Phi \circ S$ bzw. $\Phi \circ S \circ T$, um die Beziehung zwischen den Musterobjekten und den realen Objekten in V herzustellen, wie wir es ja bei den selbstadjungierten Operatoren auch schon getan haben:

$$\begin{array}{ccc}
 & V & \\
 \Phi \uparrow \cong & \searrow q & \\
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{Q_B} & \mathbb{R} \\
 S \uparrow \cong & \nearrow Q_D & \\
 \mathbb{R}^n & &
 \end{array}$$

Unter der **Hauptachsentransformation für q** ist dann die orthogonale Transformation $\Phi \circ S : \mathbb{R}^n \rightarrow V$ zu verstehen.

Nach all diesen rechnerischen Details wollen wir zum Schluss das *begriffliche* Verhältnis zwischen selbstadjungierten Operatoren und quadratischen Formen genauer ins Auge fassen. Irgendwie scheinen diese mathematischen Objekte nahe miteinander verwandt zu sein, im $\mathbb{R}^n$ jedenfalls sind sie beide durch symmetrische Matrizen beschreibbar.

Lemma: Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum. Die Zuordnung, die jedem selbstadjungierten Operator f auf V die durch

$$q_f(\vec{v}) := \langle \vec{v}, f(\vec{v}) \rangle$$

gegebene quadratische Form zuordnet, ist ein Isomorphismus vom Vektorraum der selbstadjungierten Operatoren auf den Vektorraum der quadratischen Formen auf V .

BEWEIS: Die zu q_f gehörige symmetrische Bilinearform ist durch $\beta_f(\vec{v}, \vec{w}) := \langle \vec{v}, f(\vec{w}) \rangle$ gegeben. Die Zuordnung $f \mapsto q_f$ ist offenbar linear, und sie ist injektiv, denn aus $q_f = 0$ folgte $\beta_f = 0$, d.h. $\langle \vec{v}, f(\vec{w}) \rangle = 0$ für alle $\vec{v}, \vec{w} \in V$, insbesondere also $\langle f(\vec{w}), f(\vec{w}) \rangle = 0$ für alle $\vec{w} \in V$, also $f = 0$. Bleibt zu zeigen, dass sich zu jeder beliebigen quadratischen Form q auf V auch ein selbstadjungierter Operator f mit $q(\vec{v}) = \langle \vec{v}, f(\vec{v}) \rangle$ finden lässt.

Sei also q eine quadratische Form und β ihre symmetrische Bilinearform. Wähle irgend eine Hilfs-ON-Basis $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ von V . Dann ist durch $b_{ij} = \beta(\vec{v}_i, \vec{v}_j)$ bekanntlich die Matrix B von q definiert, und es sei nun $f : V \rightarrow V$ der selbstadjungierte Operator mit *derselben* Matrix bezüglich dieser ON-Basis. Dann gilt aber

$$b_{ij} = \langle \vec{v}_i, f(\vec{v}_j) \rangle,$$

also $\beta(\vec{v}, \vec{w}) = \langle \vec{v}, f(\vec{w}) \rangle$ für die Basisvektoren und folglich für alle, insbesondere $q(\vec{v}) = \beta(\vec{v}, \vec{v}) = \langle \vec{v}, f(\vec{v}) \rangle$. $\square$

Beachten Sie, dass der so zu gegebenem q konstruierte selbstadjungierte Operator f mit $q = q_f$ von der Wahl der benutzten Hilfs-ON-Basis nicht abhängt⁴, da es wegen der Injektivität sowieso höchstens *ein* solches f geben kann.

Dieses Lemma betont und präzisiert die Verwandtschaft zwischen selbstadjungierten Operatoren und quadratischen Formen. Es gibt aber einen guten Grund, sie trotzdem nicht einfach als zwei Erscheinungsformen ein und derselben Sache aufzufassen. Von selbstadjungierten Operatoren auf V kann man nämlich nur reden, wenn ein Skalarprodukt auf V gegeben ist, es ist ein Begriff aus dem Bereich der *euklidischen* Vektorräume. Quadratische Formen dagegen brauchen das Skalarprodukt nicht, sie sind auf gewöhnlichen reellen Vektorräumen zu Hause. Der in dem Lemma beschriebene Isomorphismus

$$\text{Selbstad}(V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \xrightarrow{\cong} \text{Quad}(V)$$

hängt vom Skalarprodukt wirklich ab, ein und derselben quadratische Form q auf V entsprechen bezüglich verschiedener Skalarprodukte i.A. auch verschiedene Operatoren $V \rightarrow V$.

Habe ich also als Mathematiker mit einer quadratischen Form q auf einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum V zu tun und bevorzuge ich keines der vielen möglichen Skalarprodukte auf V , so verlangte die Übersetzung in einen selbstadjungierten Operator zuvor den Willkürakt der Wahl des Skalarproduktes, deshalb bleibe ich, solange nichts dagegen spricht, bei der quadratischen Form.

In den Vektorräumen der Physik ist aber oft ein ausgezeichnetes, physikalisch gegebenes Skalarprodukt präsent und bietet seine Dienste zu solchen Übersetzungen jederzeit an, wodurch dann zum Beispiel quadratische Formen und selbstadjungierte Operatoren auch intuitiv als verschiedene Beschreibungen desselben physikalischen Begriffs empfunden werden.

Ein gutes Beispiel dafür ist der *Trägheitstensor* eines starren Körpers, den Sie einerseits als die quadratische Form

$$\vec{\omega} \mapsto I(\vec{\omega}) := 2T$$

auffassen können, die dem Drehvektor $\vec{\omega}$ die (doppelte) kinetische Energie zuordnet, andererseits als den Drehimpuls-Operator

$$\vec{\omega} \mapsto \theta(\vec{\omega}) := \vec{L}.$$

Zwischen beiden vermittelt “das” Skalarprodukt wie in dem obigen Lemma, und so werden sie als ein und derselbe *Tensor zweiter Stufe* aufgefasst.⁵

22.4 Unitäre Vektorräume

Die *unitären Vektorräume* sind das komplexe Analogon der euklidischen Vektorräume, so wie $\mathbb{C}^n$ das komplexe Analogon von $\mathbb{R}^n$ ist, und die *hermiteschen Operatoren* in endlichdimensionalen unitären Vektorräumen sind das komplexe Analogon der selbstadjungierten Operatoren in endlichdimensionalen euklidischen Vektorräumen, und wie für diese gilt auch für die hermiteschen Operatoren eine Spektraldarstellung

$$f = \sum_{k=1}^r \lambda_k P_k.$$

Das alles, samt Beweisen, ist so gleichlautend zum schon behandelten reellen Fall, dass es in der Anfängervorlesung für Mathematiker nicht immer ausführlich besprochen wird, weil mancher Dozent — und nicht zu Unrecht — meint, es genüge für's Erste, wenn die Hörer diese Ideen und Methoden *einmal* gesehen haben, und anstatt alle Akteure noch einmal im komplexen Kostüm auftreten zu lassen, wollen wir lieber etwas Neues lernen.

Für Physiker sieht das indessen etwas anders aus. Mitten in der heutigen Physik steht ihr Kraftzentrum, die Quantenmechanik, und mitten in der Quantenmechanik die Observablen im Hilbertraum der Zustände. Die endlichdimensionalen unitären Vektorräume aber sind Spielzeugmodelle des Hilbertraums und die hermiteschen Operatoren darin sind Spielzeugmodelle der Observablen, und damit sollte man schon vertraut sein, bevor man den richtigen Observablen begegnet.

Sei also V ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Von einer komplexen Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ wird man nicht verlangen können, sie solle positiv definit sein, denn wenn $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ schon einmal positiv ist, $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$, so muss ja

$$\langle i\vec{v}, i\vec{v} \rangle = i^2 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = -\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle < 0$$

sein. Das komplexe Analogon zum Skalarprodukt ist deshalb auch keine Bilinearform, sondern eine sogenannte *Sesquilinearform*, linear in der einen, aber *semilinear* oder *antilinear* in der anderen Variablen:

Definition: Sei V ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

heißt eine **Sesquilinearform**, wenn sie in jeder der beiden Variablen zwar additiv ist, aber

$$\begin{aligned}\langle \lambda \vec{v}, \vec{w} \rangle &= \bar{\lambda} \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \quad \text{und} \\ \langle \vec{v}, \lambda \vec{w} \rangle &= \lambda \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle\end{aligned}$$

für alle $\vec{v}, \vec{w} \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt. $\square$

So eine Form ist also in der zweiten Variablen $\mathbb{C}$ -linear, in der ersten aber $\mathbb{C}$ -semilinear, insgesamt daher nicht bilinear, sondern nur ‘anderthalbfach’ (‘sesqui-’) linear.

In der Mathematik ist die häufiger benutzte Konvention, dass eine sesquilineare Form in der *ersten* Variablen linear, in der zweiten semilinear sein soll. Das ist ja nur eine Frage der Schreibweise, aber immerhin sollen Sie wissen, dass es in der Literatur nicht einheitlich gehandhabt wird. Da ich hier für Physiker schreibe, wende ich gerne die Konvention an, die besser zu den Notationen der Physik zu passen scheint.

Definition: Eine Sesquilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V heißt **hermitesch**, wenn

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \overline{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}$$

für alle $\vec{v}, \vec{w} \in V$ gilt. $\square$

Hermitezität (benannt nach *Charles Hermite*, 1822-1901) ist das für Sesquilinearformen sinnvolle Analogon zur Symmetrie. Eine richtig symmetrische Sesquilinearform müsste ja in beiden Variablen sowohl linear als auch semilinear und folglich Null sein. Unser Ersatzbegriff verlangt deshalb, dass der Variablentausch die komplexe Konjugation bewirkt. Insbesondere gilt für eine hermitesche Form immer $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \overline{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$, also ist $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ immer reell. Gilt darüber hinaus $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ für alle $\vec{v} \neq 0$, so nennt man die Form natürlich **positiv definit**.

Definition: Unter einem **unitären Vektorraum** verstehen wir ein Paar $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ aus einem komplexen Vektorraum V und einer positiv definiten hermiteschen Sesquilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$, einem **hermiteschen Skalarprodukt**, wie man auch sagt. $\square$

Standardbeispiel eines hermiteschen Skalarprodukts ist die durch

$$\langle \vec{w}, \vec{z} \rangle := \overline{w^t} \cdot \vec{z} = \overline{w_1} z_1 + \cdots + \overline{w_n} z_n.$$

definierte positiv definite hermitesche Form auf dem $\mathbb{C}^n$. Versehen mit diesem ‘üblichen’ Skalarprodukt spielt der $\mathbb{C}^n$ ungefähr dieselbe Rolle unter den unitären Vektorräumen wie der $\mathbb{R}^n$ mit dem üblichen reellen Skalarprodukt unter den euklidischen Vektorräumen.

Ich will nun nicht gerade sagen: *Gute Nachricht 8: In unitären Vektorräumen geht alles genau so wie in euklidischen*, aber die Grundidee ist das schon. Schauen wir uns das im Einzelnen an.

Wie in euklidischen Vektorräumen nennt man Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ in einem unitären Vektorraum **orthogonal** oder **senkrecht zueinander**, wenn $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ ist, und man schreibt dafür auch $\vec{v} \perp \vec{w}$. Unter der **Norm** eines Vektors versteht man $\|\vec{v}\| := \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$.

Basen $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ von V mit der Eigenschaft $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \delta_{ij}$ für alle $i, j = 1, \dots, n$ werden auch in unitären Vektorräumen **Orthormalbasen** oder **ON-Basen** genannt. Bei der Entwicklung eines Vektors $\vec{v}$ nach einer ON-Basis muss man ein wenig Acht geben, dass man nicht versehentlich die komplex konjugierten Koeffizienten erwischt, aber man leitet sich die Formel dafür ja jederzeit leicht aus dem Ansatz

$$\vec{v} = c_1 \vec{v}_1 + \cdots + c_n \vec{v}_n$$

her, indem man auf beiden Seiten skalar mit $\vec{v}_k$ multipliziert, bequemer von links, weil $\langle \vec{v}_k, - \rangle : V \rightarrow \mathbb{C}$ linear ist:

$$\langle \vec{v}_k, \vec{v} \rangle = c_k \langle \vec{v}_k, \vec{v}_k \rangle = c_k,$$

und deshalb lautet die Entwicklungsformel bei unserer Konvention für die Sesquilinearität

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^n \langle \vec{v}_k, \vec{v} \rangle \vec{v}_k.$$

Entsprechend ist dann auch die Formel für die **Orthogonalprojektion** $P : V \rightarrow V_0 \subset V$ auf einen $\mathbb{C}$ -Untervektorraum V_0 mit einer ON-Basis $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r)$ als

$$P(\vec{w}) = \sum_{k=1}^r \langle \vec{v}_k, \vec{w} \rangle \vec{v}_k$$

gegeben, und diese Formel ist dann auch im Induktionsschritt beim **Gram-Schmidt-Verfahren** zu benutzen, mit dem man wie im euklidischen Falle ein linear unabhängiges System von Vektoren sukzessive in ein ON-System verwandelt.

Auch die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

gilt in unitären Vektorräumen, mit dem analogen BEWEIS: oBdA sei $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$, und oBdA sei auch noch $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ reell und nichtnegativ, was wir ja durch Multiplikation von $\vec{u}$ mit einem geeigneten $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$ erreichen können. Dann ist insbesondere $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$, aus

$$\langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle \geq 0$$

folgt daher

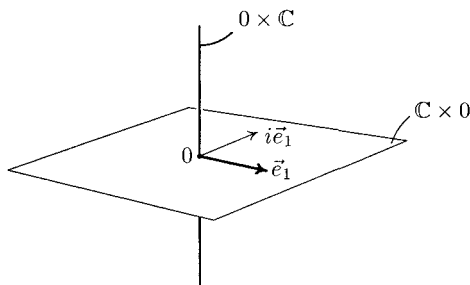
$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \geq 0,$$

also $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \leq 1$, was zu zeigen war.

Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt wie in euklidischen Vektorräumen die Dreiecksungleichung.

Bei aller Analogie zu den euklidischen Vektorräumen dürfen wir nicht vergessen, dass unitäre Vektorräume *komplexe* Vektorräume und hermitesche Skalarprodukte *komplexwertig* sind. Betrachten

wir zum Beispiel $V := \mathbb{C}^2$ mit den beiden 'komplexen Koordinatenachsen' $\mathbb{C} \times 0$ und $0 \times \mathbb{C}$ und benutzen die drei Dimensionen unseres Anschauungsraumes, um wenigstens die erste Achse in einer Skizze realistisch als komplexe Zahlenebene darzustellen:



Die Vektoren $\vec{e}_1 = (1, 0)$ und $i\vec{e}_1 = (i, 0)$ in $\mathbb{C} \times 0$

Dann dürfen wir die unitäre Orthogonalität nicht mit der euklidischen verwechseln, die uns die durch $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ermöglichte Auffassung von $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{R}^4$ nahelegen will: $\vec{e}_1$ steht unitär *nicht* senkrecht auf $i\vec{e}_1$, es ist ja $\langle i\vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = -i\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = -i \neq 0$. Das unitäre orthogonale Komplement $\vec{e}_1^\perp$, also der Kern von $\langle \vec{e}_1, \cdot \rangle : V \rightarrow \mathbb{C}$ ist, wie es die Dimensionsformel auch verlangt, ein komplex eindimensionaler $\mathbb{C}$ -Untervektorraum von V , eben $0 \times \mathbb{C}$, und nicht etwa ein reell dreidimensionaler Raum.

Vom Beispiel zum allgemeinen Fall übergehend bemerken wir zunächst, dass wegen $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ jeder komplexe Vektorraum V , ohne Änderung der zugrunde liegenden Menge V , auch als reeller Vektorraum aufgefasst werden kann, einfach indem man das dritte Bestimmungsstück, die skalare Multiplikation $\mathbb{C} \times V \rightarrow V$, durch deren Einschränkung $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ auf $\mathbb{R} \times V$ ersetzt, also in freiwilliger Selbstbeschränkung nur noch mit reellen Skalaren $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert.

Bei der *Bezeichnung* dieses, halb scherzhaft auch **Reellifizierung** des komplexen Vektorraums V genannten Vorgangs stolpern wir nun doch einmal über die immer so bequem gewesene laxen Notation V für einen Vektorraum $(V, +, \cdot)$, denn der reellifizierte Vektorraum besteht ja noch aus denselben Vektoren und wäre in dieser Notation vom ursprünglichen komplexen Vektorraum nicht zu unterscheiden. Der elegante Ausweg ist, den reellifizierten Vektorraum

mit $V_{\mathbb{R}}$ zu bezeichnen. Das hilft uns, den komplexen Vektorraum V nicht mit dem reellen Vektorraum $V_{\mathbb{R}}$ zu verwechseln. Dass aber trotzdem auch $V = V_{\mathbb{R}}$ gilt — für die Mengen nämlich — müssen wir damit vereinbaren können. Am Nachdenken darüber kristallisiert sich manchem erstmals das wirkliche Verständnis des Vektorraumbegriffs.⁶

Ist nun $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Vektorraum, so ist der Realteil des hermiteschen Skalarprodukts ein reelles Skalarprodukt auf $V_{\mathbb{R}}$, also $(V_{\mathbb{R}}, \operatorname{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Beide Skalarprodukte definieren offenbar dieselbe Norm, aber das unitäre Senkrechtstehen $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ ist eine stärkere Forderung als nur das euklidische Senkrechtstehen $\operatorname{Re}\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

Aus einer Basis $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ eines komplexen Vektorraums V erhält man durch $(\vec{v}_1, i\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, i\vec{v}_n)$ immer eine Basis der Reellifizierung $V_{\mathbb{R}}$. Insbesondere verdoppelt sich beim Reellifizieren die Dimension! Wie ist das im Hinblick auf $V = V_{\mathbb{R}}$ anschaulich zu verstehen? Nun, es handelt sich ja nicht um denselben Dimensionsbegriff: V hat die *komplexe* Dimension n und $V_{\mathbb{R}}$ die *reelle* Dimension $2n$, das ist schon richtig.

Ist nun V ein unitärer Vektorraum und $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ eine unitäre ON-Basis für V , so ist $(\vec{v}_1, i\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, i\vec{v}_n)$ auch eine euklidische ON-Basis für $V_{\mathbb{R}}$.

Reellifiziert man den unitären Vektorraum $\mathbb{C}^n$ mit dem üblichen hermiteschen Skalarprodukt zu dem euklidischen Vektorraum $(\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^n, \operatorname{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle)$ so erhält man auch wirklich, liest man $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, den üblichen euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^{2n}$, womit wir für $n = 2$ wieder bei unserem Ausgangsbeispiel angelangt wären.

Das unitäre Gegenstück zu den orthogonalen Abbildungen zwischen euklidischen Vektorräumen sind die **unitären Abbildungen** $f : V \rightarrow W$ zwischen unitären Vektorräumen, das sind die $\mathbb{C}$ -linearen Abbildungen, die das hermitesche Skalarprodukt erhalten, d.h.

$$\langle f(\vec{u}), f(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$$

für alle $\vec{u}, \vec{v} \in V$ erfüllen. Wie die orthogonalen Abbildungen sind sie stets injektiv, und daher zwischen unitären Vektorräumen gleicher

endlicher Dimension automatisch bijektiv. Bijektive unitäre Abbildungen haben offensichtlich auch eine unitäre Inverse, wir nennen sie **unitäre Transformationen**. Die Gruppe $U(V)$ der unitären Transformationen eines unitären Vektorraumes auf sich selbst heißt die **unitäre Gruppe von V** .

Sind die unitären unter den $\mathbb{C}$ -linearen Abbildungen zwischen unitären Vektorräumen, so wie die orthogonalen unter den $\mathbb{R}$ -linearen zwischen euklidischen Vektorräumen, schon durch die *Normerhaltung* charakterisiert? So ist es. Zwar gibt die übliche Polarisierungsformel im unitären Fall wegen $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 2\operatorname{Re}\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ zunächst nur die Auskunft

$$\operatorname{Re}\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2),$$

wonach normerhaltende (und additive) Abbildungen den Realteil des hermiteschen Skalarproduktes erhalten, aber $\mathbb{C}$ -lineare normerhaltende Abbildungen erhalten dann auch den Imaginärteil:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\langle f(\vec{u}), f(\vec{v}) \rangle &= \operatorname{Re}\langle if(\vec{u}), f(\vec{v}) \rangle \quad \text{sowieso,} \\ &= \operatorname{Re}\langle f(i\vec{u}), f(\vec{v}) \rangle \quad \text{da } f \text{ } \mathbb{C}\text{-linear ist,} \\ &= \operatorname{Re}\langle i\vec{u}, \vec{v} \rangle \quad \text{weil } f \text{ die Norm erhält,} \\ &= \operatorname{Im}\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \quad \text{sowieso.} \end{aligned}$$

Ist $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ eine (unitäre) ON-Basis von V , so ist eine $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ in einen weiteren unitären Vektorraum natürlich auch genau dann unitär, wenn sie die Basis in ein ON-System $(f(\vec{v}_1), \dots, f(\vec{v}_n))$ in W überführt, denn dann ist die Forderung $\langle f(\vec{u}), f(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ für die Basisvektoren, wegen der Sesquilinearität des Skalarprodukts also für alle Vektoren erfüllt.

Insbesondere ist eine komplexe $m \times n$ -Matrix $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ genau dann eine unitäre Abbildung zwischen den unitären Standard-Räumen, wenn ihre Spalten $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ ein ON-System in $\mathbb{C}^m$ bilden. Da das hermitesche Standard-Skalarprodukt durch $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle := \vec{u}^t \cdot \vec{v}$ definiert ist, sind die Spalten genau dann ein unitäres ON-System in $\mathbb{C}^m$, wenn $\overline{A}^t A = E_n$ gilt.

Sie sehen, weshalb man hier *transponieren und zugleich komplex konjugieren* muss. Für diesen beim Rechnen in den unitären

Standard-Räumen oft vorkommenden Vorgang gibt es auch ein eigenes Symbol, den sogenannten ‘dagger’, den Dolch, im Deutschen eher als ‘Kreuz’ gelesen:

Notation: Ist A eine komplexe $m \times n$ -Matrix, so wird die komplex konjugierte Transponierte von A als

$$A^\dagger := \overline{A^t}$$

geschrieben. □

Eine Matrix ist also unitär, wenn $A^\dagger A = E$ ist. Für die *quadratischen Matrizen* bedeutet das nichts anderes als $A^\dagger = A^{-1}$.

Notiz und Definition: Die unitären $n \times n$ -Matrizen bilden die sogenannte *unitäre Gruppe*

$$U(n) := \{A \in M(n \times n, \mathbb{C}) \mid A^\dagger = A^{-1}\},$$

das ist also die unitäre Gruppe des $\mathbb{C}^n$. Die Untergruppe

$$SU(n) := \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$$

heißt die *spezielle unitäre Gruppe*. □

Was haben die unitären Gruppen mit den orthogonalen Gruppen zu tun? Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Vektorraum und $(V_{\mathbb{R}}, \operatorname{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle)$ seine Reellifizierung. Eine $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung $f : V \rightarrow V$ ist als Abbildung $f : V_{\mathbb{R}} \rightarrow V_{\mathbb{R}}$ erst recht $\mathbb{R}$ -linear, und eine unitäre erst recht orthogonal, denn wenn das hermitesche Skalarprodukt erhalten bleibt, dann auch dessen Realteil. Daher ist $U(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ in $O(V_{\mathbb{R}}, \operatorname{Re}\langle \cdot, \cdot \rangle)$ enthalten.

Wenn wir also recht erfasst haben, inwiefern $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ gestattet, die Reellifizierung des üblichen unitären $\mathbb{C}^n$ als den üblichen euklidischen $\mathbb{R}^{2n}$ aufzufassen, wissen wir auch, wie

$$U(n) \subset O(2n)$$

zu lesen ist, und Sie können das einmal testen, indem Sie etwa überlegen, als welche orthogonale 4×4 -Matrix die unitäre 2×2 -Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ aufzufassen wäre.

Allgemeiner bewirkt das Lesen von $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^n$ als $\mathbb{R}^{2n}$ eine Inklusion

$$M(n \times n, \mathbb{C}) \subset M(2n \times 2n, \mathbb{R}).$$

Mit der Matrizenmultiplikation, die ja nur die Verkettung der Abbildungen bedeutet, ist diese Inklusion natürlich verträglich, aber mit der Determinantenbildung nicht, wie sollte sie auch, ist doch die Determinante reeller Matrizen immer reell. Und tatsächlich ist die *ganze* unitäre Gruppe $U(n)$ in $SO(2n)$ enthalten,⁷ und nicht etwa nur die spezielle unitäre Gruppe, und es gilt $U(1) = SO(2)$.

22.5 Hermitesche Operatoren

Nach all diesen Vorbereitungen kommen wir nun zu den ‘Spielzeug-observablen’, den hermiteschen Operatoren auf endlichdimensionalen unitären Vektorräumen und ihrer Eigenwerttheorie.

Definition: Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum. Ein Operator, also eine $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung $f : V \rightarrow V$ heißt **hermitesch**, wenn

$$\langle f(\vec{v}), \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, f(\vec{w}) \rangle$$

für alle $\vec{v}, \vec{w} \in V$ gilt. □

Sie sehen, dass es sich um das unitäre Analogon zur Selbstadjungiertheit in euklidischen Vektorräumen handelt, und hermitesche Operatoren werden, wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, oft auch einfach *selbstadjungierte Operatoren* genannt.

Lemma: Ein Operator $f : V \rightarrow V$ ist genau dann hermitesch, wenn er bezüglich einer ON-Basis durch eine **hermitesche Matrix** A dargestellt wird, d.h. durch eine Matrix mit

$$A = A^\dagger.$$

BEWEIS: Nach der Entwicklungsformel für Vektoren nach einer ON-Basis im unitären Vektorraum ist die Matrix durch $a_{ij} = \langle \vec{v}_i, f(\vec{v}_j) \rangle$

gegeben, und deshalb bedeutet

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji}$$

nicht mehr und nicht weniger, als dass f die Hermitezitätsbedingung für die Basisvektoren erfüllt, wegen der Sesquilinearität des Skalarprodukts daher für alle Vektoren. $\square$

Die Eigenwerttheorie der hermiteschen Operatoren beginnt mit einer grundlegenden Feststellung:

Notiz 1: *Alle Eigenwerte eines hermiteschen Operators sind reell, denn aus $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ folgt*

$$\langle \lambda \vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle f(\vec{v}), \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, f(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{v}, \lambda \vec{v} \rangle,$$

wegen der Sesquilinearität des Skalarprodukts also $\bar{\lambda} \|\vec{v}\|^2 = \lambda \|\vec{v}\|^2$ und für $\vec{v} \neq 0$ daher $\lambda = \bar{\lambda}$. $\square$

Damit ergibt sich jetzt in Analogie zum euklidischen Fall, dass Eigenvektoren eines hermiteschen Operators zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda \neq \mu$ unitär orthogonal zueinander sind. Zunächst würde aus $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ und $f(\vec{w}) = \mu \vec{w}$ zwar nur

$$\langle \lambda \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle f(\vec{v}), \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, f(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{v}, \mu \vec{w} \rangle,$$

also $(\bar{\lambda} - \mu) \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ hervorgehen, aber nach der ersten Notiz ist $\lambda = \bar{\lambda}$, und deshalb lässt $\lambda \neq \mu$ wirklich den Schluss $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ zu, halten wir das fest:

Notiz 2: *Eigenvektoren eines hermiteschen Operators zu verschiedenen Eigenwerten sind unitär senkrecht zueinander.* $\square$

Satz (unitäre Diagonalisierbarkeit hermitescher Operatoren): *Jeder hermitesche Operator auf einem endlichdimensionalen unitären Vektorraum besitzt eine unitäre ON-Basis aus Eigenvektoren.*

BEWEIS: Wie im euklidischen Fall, nur noch einfacher, weil aus dem Fundamentalsatz der Algebra wegen $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ die Existenz eines

Eigenwertes ohne Umwege folgt. Wir wählen also für den Induktionsschluss von $n-1$ auf n irgend einen Eigenvektor $\vec{v} =: \vec{v}_n$ von der Norm 1 und wenden die Induktionsannahme auf den hermiteschen Operator

$$f|_{\vec{v}^\perp} : \vec{v}^\perp \rightarrow \vec{v}^\perp$$

an, wobei wir uns nur zu vergewissern haben, dass $f(\vec{v}^\perp) \subset \vec{v}^\perp$ auch wirklich gilt und uns nicht das komplexe Umfeld dabei in letzter Minute etwa noch einen Streich spielt! Aber unbesorgt, aus $\vec{v} \perp \vec{w}$ folgt $\langle \vec{v}, f(\vec{w}) \rangle = \langle f(\vec{v}), \vec{w} \rangle = \langle \lambda \vec{v}, \vec{w} \rangle = \lambda \cdot 0 = 0$, also auch $\vec{v} \perp f(\vec{w})$. $\square$

Spezialisieren wir auf den Fall $V = \mathbb{C}^n$, so lesen wir dasselbe Resultat in der Matrizensprache

Korollar 1 (Unitäre Diagonalisierung hermitescher Matrizen): Ist A eine hermitesche $n \times n$ -Matrix, d.h. ist $A = A^\dagger$, so gibt es eine unitäre Matrix $S \in U(n)$, d.h. eine $n \times n$ -Matrix mit $S^{-1} = S^\dagger$, so dass $D := S^\dagger A S$ in Diagonalgestalt ist. $\square$

Als eine zweite Umformulierung des Satzes ergibt sich die Spektraldarstellung der hermiteschen Operatoren, wie wir sie im euklidischen Falle schon für die selbstadjungierten Operatoren kennen:

Korollar 2 (Spektraldarstellung hermitescher Operatoren): Sei $f : V \rightarrow V$ ein hermitescher Operator auf einem endlichdimensionalen unitären Vektorraum und $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ seine verschiedenen Eigenwerte. Ferner bezeichne $P_k : V \rightarrow E_{\lambda_k} \subset V$ die Orthogonalprojektion auf den k -ten Eigenraum. Dann gilt

$$f = \sum_{k=1}^r \lambda_k P_k.$$

$\square$

In einem endlichdimensionalen unitären Vektorraum V definiert jeder hermitesche Operator $f : V \rightarrow V$ durch $\beta_f(\vec{v}, \vec{w}) := \langle \vec{v}, f(\vec{w}) \rangle$ eine hermitesche Sesquilinearform $\beta_f : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ und zugehörige **hermitesche quadratische Form** $q_f : V \rightarrow \mathbb{R}$ durch $q_f(\vec{v}) := \beta_f(\vec{v}, \vec{v})$. So wird ein Isomorphismus zwischen dem komplexen Vek-

torraum der hermiteschen Operatoren auf dem unitären Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ einerseits und dem komplexen Vektorraum der hermiteschen quadratischen Formen auf dem komplexen Vektorraum V andererseits hergestellt. Dieselbe nahe Verwandtschaft hatten wir im euklidischen Fall zwischen den selbstadjungierten Operatoren und den quadratischen Formen beobachtet.

Im unitären Standard-Raum $\mathbb{C}^n$ äußert sich die Verwandtschaft darin, dass Operator und Form dieselbe hermitesche Matrix $B = B^\dagger$ haben, nur ist eben der Operator durch $B : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, die hermitesche quadratische Form durch

$$Q_B(\vec{z}) := \vec{z}^\dagger B \vec{z}$$

gegeben. Wird B durch eine unitäre Matrix $S \in U(n)$ diagonalisiert, dann ist $S^\dagger B S = D$ eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von B als Diagonalelementen, wie im euklidischen Falle.

Durch U ist dann sowohl der Operator diagonalisiert, denn wegen $U^\dagger = U^{-1}$ ist $U^{-1} B U = U^\dagger B U = D$, als auch die hermitesche quadratische Form auf Hauptachsen transformiert:

$$Q_B(U(\vec{z})) = \lambda_1 \bar{z}_1 z_1 + \dots + \lambda_n \bar{z}_n z_n,$$

da sich ja $Q_B(U(\vec{z})) = (U\vec{z})^\dagger B (U\vec{z}) = \vec{z}^\dagger D \vec{z}$ ergibt.

Ich denke, der sicherste Weg zum Verständnis der hermiteschen Operatoren im endlichdimensionalen unitären Vektorraum führt über die selbstadjungierten Operatoren im endlichdimensionalen euklidischen Vektorraum als eine anschauliche Vorstufe, und jedenfalls folgte unser Lehrpfad dieser Route.

Wenn Sie später durch die Quantenmechanik den hermiteschen Operatoren im ∞ -dimensionalen Hilbertraum begegnen, werden Sie noch manches Phänomen dazulernen, das in endlichdimensionalen Räumen einfach nicht vorkommt. Eigentlich brauchten Sie dann eine mathematische Vorlesung über *Operatortheorie*. Aber wie immer Ihre Physikprofessoren Sie durch die unendlichdimensionalen Fährnisse lotsen werden, wenigstens den *endlichdimensionalen Fall* müssen Sie als Grundausrüstung immer parat haben.

22.6 Übungsaufgaben

Aufgabe R22.1: Bestimmen Sie für die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte und eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

Aufgabe R22.2: Bei der simultanen Diagonalisierung von kinetischer Energie und potentieller Energie von gekoppelten Oszillatoren tritt das Problem auf, zu zwei quadratischen Formen Q_A und Q_B , wobei Q_B positiv definit und bereits in Diagonalfom ist, eine (nicht notwendig orthogonale) Transformation $P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zu finden, die Q_A diagonalisiert und gleichzeitig Q_B in die Normalform $x_1^2 + \dots + x_n^2$ überführt. Beweisen Sie, dass das stets möglich ist.

Aufgabe R22.3: Sei $\mathcal{P}$ der euklidische Vektorraum der reellen Polynome mit dem durch $\langle P, Q \rangle := \int_0^\infty e^{-x} P(x) Q(x) dx$ definierten Skalarprodukt und $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}$ der Untervektorraum der Polynome vom Grade $\leq n$. Zeigen Sie, dass es genau eine Folge $(L_n)_{n \geq 0}$ von *Orthogonalpolynomen* (d.h. $\langle L_n, L_m \rangle = \delta_{nm}$) vom Grade n gibt, welche $L_n(0) > 0$ erfüllt (Laguerre-Polynome). Weshalb ist $(L_0, \dots, L_n)$ eine Basis von $\mathcal{P}_n$? Berechnen Sie $L_n(x)$ für $n = 0, 1, 2$. Verwenden Sie $\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = n!$.

Aufgabe R22.4: Die potentielle Energie für drei gekoppelte Teilchen der Masse m (Ozon-Molekül) als Funktion der 1-dimensionalen Auslenkungen x_i aus den Ruhelagen sei

$$V(x_1, x_2, x_3) = \kappa(x_2 - x_1)^2/2 + \kappa(x_3 - x_2)^2/2, \quad \kappa > 0.$$

a) Führen Sie die Hauptachsentransformation durch.

b) Suchen Sie nach Lösungen der Form $\vec{x}(t) = \vec{v} \cos(\omega t)$ für die Newtonschen Bewegungsgleichungen $m\ddot{\vec{x}} = -\text{grad}V$ und bestimmen Sie die *Eigenfrequenzen* ω und die zugehörigen *Auslenkungsmuster* $\vec{v}$.

Aufgabe R22.5: Die potentielle Energie einer linearen Kette von $N + 1$ mit Federn verbundener Teilchen mit Koordinaten $x_n \in \mathbb{R}$, $n = 0, \dots, N$ sei

$$V = \frac{k}{2} \sum_{n=0}^{N-1} (x_{n+1} - x_n - a)^2$$

mit $k > 0, a > 0$. Es sei $x_0 = 0$ fest. Schreiben Sie dieses Potential als Funktion der Auslenkungen $y_n = x_n - na$, $n = 1, \dots, N$ aus den Ruhelagen der Teilchen und zeigen Sie, dass dadurch eine positiv definite quadratische Form auf dem $\mathbb{R}^N$ gegeben ist. Was ist die Matrix dieser quadratischen Form?

Aufgabe R22.6: Ein starrer Körper sei aufgebaut aus N Massenpunkten m_n mit Ortsvektoren $\vec{x}_n$ und dem Schwerpunkt im Nullpunkt. Rotiert der Körper um eine Drehachse durch den Nullpunkt mit der vektoriellen Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$, so bewegt sich der n -te Massenpunkt mit der Geschwindigkeit $\|\vec{\omega} \times \vec{x}_n\|$ und liefert deshalb den Beitrag $\frac{1}{2}m_n\|\vec{\omega} \times \vec{x}_n\|^2$ zur kinetischen Energie $T =: \frac{1}{2}I(\vec{\omega})$. Zeigen Sie, dass der *Trägheitstensor* I eine quadratische Form auf $\mathbb{R}^3$ ist und bestimmen Sie seine Matrix. (Hinweis: Die Formel aus Aufgabe T12.5 hilft.)

Aufgabe R22.7: Für den linearen Zusammenhang zwischen Drehimpuls $\vec{L}$ und Drehgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$ eines starren Körpers um eine feste Drehachse $\vec{n}$ gilt $\vec{L} = \Theta \vec{\omega}$. Dabei ist Θ der Trägheitstensor. Für ein System von Massenpunkten m_α an den Orten $\vec{x}_\alpha$ gilt in einem cartesischen körperfesten Koordinatensystem

$$\Theta_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\|\vec{x}_{\alpha}\|^2 \delta_{ij} - x_{\alpha i} x_{\alpha j}).$$

Berechnen Sie Θ für ein System von vier Massenpunkten mit $m_1 = m_2 = M$, $m_3 = m_4 = m$, $\vec{x}_1 = -\vec{x}_2 = (a, a, 0)$, $\vec{x}_3 = -\vec{x}_4 = (-a, a, 0)$ und bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente und die Richtungsvektoren, für welche Drehimpuls und Drehgeschwindigkeit parallel sind.

Aufgabe R22.8: Sei $f(x)$ eine komplexwertige stetige 2ℓ -periodische Funktion. Bestimmen Sie die Koeffizienten der zugehörigen Fourier-Reihe $\sum c_k e^{ik\pi x/\ell}$. Welche Beziehung zwischen den c_k ist gleichbedeutend damit, dass die Funktion $f(x)$ nur reelle Werte annimmt?

Aufgabe T22.1: Seien V ein n -dimensionaler euklidischer Vektorraum, $f: V \rightarrow V$ ein selbstadjungierter Operator und $\lambda_1 < \dots < \lambda_r$ seine Eigenwerte. Seien $\vec{v}_0, \vec{w}_0 \in V$ zwei Vektoren der Länge Eins und $\langle \vec{v}_0, f(\vec{v}_0) \rangle \leq \langle \vec{v}, f(\vec{v}) \rangle \leq \langle \vec{w}_0, f(\vec{w}_0) \rangle$ für alle $\vec{v} \in V$ mit $\|\vec{v}\| = 1$. Zeigen Sie, dass $\vec{v}_0$ und $\vec{w}_0$ Eigenvektoren zu λ_1 bzw. λ_r sind.

Aufgabe T22.2: Sei V der unitäre Vektorraum der 2π -periodischen stetigen Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit dem durch

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) dt$$

definierten hermiteschen Skalarprodukt, und für $k \in \mathbb{Z}$ sei $\varphi_k \in V$ durch $\varphi_k(t) := e^{ikt}$ definiert. Beweisen Sie $\langle \varphi_k, \varphi_\ell \rangle = \delta_{k\ell}$ und ermitteln Sie, was $\sum_{k=-n}^n \langle \varphi_k, f \rangle \varphi_k$ mit den n -ten Fourierpolynomen von Real- und Imaginärteil von f zu tun hat.

Aufgabe T22.3: Sei V ein n -dimensionaler euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass zwei selbstadjungierte Operatoren f und g in V genau dann kommutieren (d.h. $f \circ g = g \circ f$), wenn sie simultan orthogonal diagonalisierbar sind, d.h. wenn es eine ON-Basis aus Eigenvektoren *beider* Operatoren gibt.

Aufgabe T22.4: Beweisen Sie das komplexe Analogon von T22.3, dass also zwei *hermitesche* Operatoren f und g in einem n -dimensionalen *unitären* Vektorraum V genau dann kommutieren, wenn sie simultan orthogonal diagonalisierbar sind.

Aufgabe T22.5: Sei $f: V \rightarrow V$ ein Operator in einem endlich-dimensionalen reellen Vektorraum, $\dim V \geq 2$. Zeigen Sie, dass es einen zweidimensionalen unter f invarianten Untervektorraum $V_0 \subset V$ (also $f(V_0) \subset V_0$) geben muss.

Fußnoten und Ergänzungen

1.1, Seite 1: Wenn Sie mit dem Begriff *Zuordnung* keine Probleme haben, dann sollten Sie sich auch nicht künstlich welche schaffen. Wenn Sie aber durch das Gefühl irritiert sind, zu einer ‘Zuordnung’ brauche es doch einen Menschen der ‘zuordnet’, und wenn Sie die drei Begriffe *Menge*, *Teilmenge* und *Produktmenge* nicht als mit dieser Schwierigkeit behaftet empfinden, so hören Sie. Unter einer **Relation** zwischen zwei Mengen X und Y versteht man einfach eine Teilmenge $R \subset X \times Y$. Das Produkt $X \times Y$, wie Sie wissen, ist die Menge aller Paare (x, y) von Elementen $x \in X$ und $y \in Y$, also $X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$, wie man das schreibt. Statt $(x, y) \in R$ sagt man auch, x und y *stünden in der Relation R* . Eine Relation R heißt nun eine *Zuordnung* oder **Abbildung** von X nach Y , wenn jedes $x \in X$ mit einem, aber auch nur einem (‘genau einem’) Element $y \in Y$ in der Relation R steht. Bezeichnet man dieses einzige y mit $f(x)$, so wird die Zuordnung oder Abbildung auch als $f : X \rightarrow Y$ statt $R \subset X \times Y$ notiert, und dabei bleibt es überhaupt, denn von Abbildungen als Relationen spricht man sowieso nur, wenn jemand plötzlich nicht mehr zu verstehen glaubt, was eine Abbildung “ist” und schnell ein Stärkungsmittel braucht.

Unter anderem Namen ist die Relation der mit f bezeichneten Abbildung aber häufig präsent: es ist ja der **Graph**

$$\text{Graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

der Abbildung. — Nach meiner Erfahrung haben die heutigen Studienanfänger keine Probleme im Umgang mit den elementaren Mengenbegriffen wie *Menge*, *Teilmenge*, *Produktmenge*, *Durchschnitt* und *Vereinigung von Mengen*, *leere Menge*, *Differenz zweier Mengen*, letzteres hier als $A \setminus B := \{a \in A \mid a \notin B\}$ bezeichnet. Der Kurs geht deshalb auch nicht darauf ein. Allenfalls sollte ich vielleicht darauf hinweisen, dass in der Mathematik, was immer der Schulgebrauch sein mag, $A \subset B$ nur

bezeichnet, dass jedes Element von A auch Element von B ist, die Forderung, dass B echt größer sein müsse, ist darin nicht eingeschlossen, dafür hätte man $A \subsetneq B$ zu schreiben. Insbesondere ist also $B \subset B$.

Da ich schon einmal über Notationen plaudere, so will ich nur auch gestehen, dass ich immer noch darauf warte, den Anblick nach außen weisender Klammern in $]a, b[$ erträglich zu finden, aber bisher vergebens. Ich schreibe deshalb das offene Intervall nach wie vor als (a, b) , obwohl die Notation $(a, b) \in A \times B$ für das Paar damit kollidiert und vertraue darauf, dass der jeweilige Sinnzusammenhang keinen Zweifel zulässt, ob ein Paar oder ein Intervall gemeint sei.

1.2, Seite 3: Im Abschnitt 6.2 werden die Teilmengen des n -dimensionalen Raumes $\mathbb{R}^n$ *kompakt* genannt, die alle ihre Randpunkte enthalten und sich nicht ins Unendliche erstrecken. Was es eigentlich mit dem Kompaktheitsbegriff auf sich hat, erfahren Sie aber erst in den Abschnitten 19.3 und 19.4.

1.3, Seite 8: Ohne Beachtung der Definitionsbereiche unverständlich bliebe zum Beispiel der Begriff der *Einschränkung*, die ja in nichts weiter als einer Verkleinerung des Definitionsbereiches besteht. Und erfahrungsgemäß gibt es immer einige Studenten, die mit dieser einfachsten aller Funktionen-Konstruktionen Probleme haben. Das zeigt eben an, dass sie bisher versäumt oder genauer gesagt *abgelehnt* haben, den Definitionsbereich als einen notwendigen Bestandteil der Definition einer Funktion oder Abbildung anzusehen.

1.4, Seite 11: Falls Sie die komplexen Zahlen schon kennen und vielleicht sogar wissen, dass sie sich auch in der Form $z = x + iy = re^{i\varphi}$ darstellen lassen, kann ich Ihnen erklären, worauf ich anspiele.

Die reellen Zahlen liegen auf der Zahlengeraden, links die negativen, rechts die positiven, getrennt durch die Null. Ist n ungerade, so gibt es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ genau eine Zahl $w \in \mathbb{R}$ mit $w^n = x$, die wir deshalb mit $w = \sqrt[n]{x}$ bezeichnen. Ist dagegen $n > 0$ gerade, so gibt es für $x > 0$ zwei Zahlen $w \in \mathbb{R}$ mit $w^n = x$, nämlich $w = \pm \sqrt[n]{x}$, für $x < 0$ aber gar keine. So ist das eben!

Von der höheren Warte der *komplexen* Zahlen sieht das etwas anders aus. Die reellen Zahlen liegen als x -Achse in der komplexen Zahlenebene

$\mathbb{C}$, die wässrige Null trennt die positiven und die negativen Zahlen nicht mehr in zwei Inseln, sondern trockenen Fußes erreichen Sie vom positiven Halbstrahl den negativen, wenn Sie durch das komplexe Gebiet wandern.

Für jede komplexe Zahl $z \neq 0$ gibt es einheitlich genau n verschiedene Zahlen $w \in \mathbb{C}$ mit $w^n = z$, nämlich die Zahlen

$$w_k := \sqrt[n]{r} e^{i \frac{2\pi k}{n}}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Für reelles z sind die reellen n -ten Wurzeln mit darunter, aber erst jetzt sieht man, wieviele Wurzeln auch die reellen Zahlen ‘in Wirklichkeit’ haben, wenn Sie diese Sprechweise für das Rechnen in der komplexen Ebene genehmigen wollen.

Für den Versuch, eine einheitliche Wurzelfunktion $\sqrt[n]{z}$ auf ganz $\mathbb{C}$ zu definieren, fehlt es also für kein z an Kandidaten für den Funktionswert, aber die Auswahl bereitet eine unvermeidbare Schwierigkeit. Es ist nämlich unmöglich, diese Auswahl so zu treffen, dass die ganze Funktion am Ende stetig ist.

Strebt man aber als Definitionsbereich einer stetigen n -ten Wurzelfunktion nicht ganz $\mathbb{C}$ an, sondern nur eine sogenannte *geschlitzte Ebene* $D := \mathbb{C} \setminus H$, wobei H einen von 0 ausgehenden Halbstrahl bezeichnet, dann geht es, und nimmt man als den Schlitz H weder $\mathbb{R}^+$ noch $\mathbb{R}^-$, so sind auch $\mathbb{R}^\pm$ in der geschlitzten Ebene enthalten und man bekommt so eine von der komplexen Behörde als sinnvoll genehmigte n -te Wurzelfunktion auf ganz $\mathbb{R}$.

Man kann diese Funktion immer so einrichten, dass sie auf $\mathbb{R}^+$ positiv ist, aber für ungerades $n \geq 3$ nimmt sie dann auf $\mathbb{R}^-$ niemals denn reellen (negativen) Wurzelwert an. Aus reeller Sicht wäre das ja der einzig mögliche gewesen, aber aus komplexer Sicht “passt” er nicht zu den positiven Wurzelwerten auf $\mathbb{R}^+$. So hatte ich das gemeint.

1.5, Seite 19: In Abschnitt 2.5, Seite 33 wird das dann präzisiert werden.

2.1, Seite 21: Ich gehe im Text also davon aus, dass Sie wissen, was man unter dem Limes oder Grenzwert einer Funktion $f(x)$ für x gegen x_0 versteht, wann man davon spricht, ob der Limes vorhanden oder nicht vorhanden ist und was die Symbolik $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ bedeutet. Ich bin aber auch gern bereit, Ihnen zu helfen sich daran zu erinnern, wenn Sie gerade dazu aufgelegt sind.

“Das war etwas mit Epsilon und Delta”, wird vielleicht als erster Anhaltspunkt aus dem Nebel der Erinnerung auftauchen. Ganz recht. Lassen Sie mich nur zuerst sagen, dass natürlich die Limesvariable nicht gerade x heißen muss, im Text heißt sie zum Beispiel zufällig h , auch die Funktion braucht nicht f zu heißen, hat vielleicht gar keinen eigenen Namen sondern ist durch einen Term, eine Formel beschrieben. Ich wähle jetzt nur einmal x und f als Bezeichnungen, auf andere Situationen müssen Sie es dann übertragen können. Na, daran wird es nicht scheitern.

Ob die Funktion bei x_0 selbst definiert ist und wenn ja, was ihr Wert $f(x_0)$ dort ist, hat mit dem Limes nichts zu tun, der Limesbegriff handelt nur davon, wie sich die Funktion bei *Annäherung* der Variablen an die Stelle x_0 verhält. Die Frage nach dem Limes kann man daher überhaupt nur dann stellen, wenn eine solche Annäherung möglich ist. Wenn der Punkt x_0 meilenweit vom Definitionsbereich von f entfernt ist, geht das natürlich nicht. Für Limesbetrachtungen machen wir daher stets die wenn auch unausgesprochene

Limesvoraussetzung: Vom Verhalten einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ für $x \rightarrow x_0$ ist nur zu sprechen, wenn $D \setminus \{x_0\}$ den Punkt x_0 berührt, d.h. wenn sich zu jedem $\delta > 0$ ein von x_0 verschiedener Punkt $x \in D$ finden lässt, dessen Abstand von x_0 kleiner als δ ist.

Wenn zum Beispiel D irgend eine Vereinigung von Intervallen ist, wie wir es ja für unsere *Funktionen einer reellen Variablen* vereinbart haben, und $x_0 \in D$ gilt, oder auch schon wenn x_0 nur Randpunkt eines der beteiligten Intervalle ist, dann gibt es mit dieser Limesvoraussetzung gar kein Problem.

Erinnerung: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ bedeutet, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ möglich ist ein $\delta > 0$ zu finden, so dass $|a - f(x)| < \varepsilon$ für all jene $x \in D$ gilt, welche $0 < |x - x_0| < \delta$ erfüllen.

Das klingt etwas verwickelt und ist es auch, vielleicht erinnern Sie sich noch, dass Sie in der Schule eine gewisse Gewöhnungszeit brauchten, bis Sie den Sinn der Definition richtig erfasst hatten. Sie müssen aber auch anerkennen, dass die Definition etwas Erstaunliches leistet. Der Grenzwert von f bei Annäherung an x_0 hat einerseits nichts mit $f(x_0)$ zu tun, andererseits kann man auch von *jeder einzelnen anderen Stelle* x_1 sagen, der dortige Funktionswert $f(x_1)$ habe keinen Einfluss auf das Grenzverhalten und den Grenzwert! Welche Funktionswerte sind denn

nun entscheidend? Irgendwie ‘die letzten’, ‘die der Punkte kurz vor x_0 ’, anschaulich gesagt — aber die gibt es ja gar nicht, jeder Punkt vor x_0 hat noch einen gewissen Abstand zu x_0 , keiner ist *der Letzte vor x_0* , und sein Funktionswert ist deshalb irrelevant für den Limes. In Anbetracht dieser verzwickten Sachlage muss man die logisch einwandfreie Definition doch wieder erstaunlich einfach und elegant nennen.

Noch ein Wort zu den *halbseitigen* Grenzwerten, die, falls vorhanden, mit $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ bzw. $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ bezeichnet werden. Sie sehen aus der obigen Definition, dass generell der Definitionsbereich D von f eine Rolle bei der Limesbildung spielt. Häufig sind wir aber in der Praxis damit konfrontiert, dass der Definitionsbereich in der Notation unterdrückt wird und die Funktion durch eine anonyme Formel dargeboten wird. Ist vereinbart, dass der maximale Definitionsbereich gemeint ist, auf dem die Formel noch lesbar ist, dann ist’s ja gut, dann besteht ja kein Zweifel. Wird aber der Definitionsbereich durch Zusatzbedingungen eingeschränkt, dann muss das irgendwie angegeben werden, denn das Grenzverhalten und der Limes können wirklich davon abhängen. Die beiden häufigsten solchen Zusatzbedingungen sind nun aber $x < x_0$ bzw. $x > x_0$, und diese werden wie oben durch die Pfeilrichtung angedeutet. Man spricht dann vom linksseitigen bzw. rechtsseitigen Limes.

2.2, Seite 27: Vielleicht wollen Sie sich die Umkehrregel so merken: *Funktion $y = y(x)$, Umkehrfunktion $x = x(y)$, Ableitung $y' = dy/dx$, Ableitung der Umkehrfunktion $x' = dx/dy$, das ist also der Kehrwert.*

Nicht schlecht. Das ist aber eigentlich eine Stenografie für Eingeweihte, Benutzung auf eigene Gefahr. Wenn Sie sich die fehlerfreie Anwendung zutrauen, bitte sehr. Wenn Sie aber daraus schließen, $\frac{1}{\cos x}$ müsse die Ableitung von $\arcsin x$ sein und damit auf die Nase fallen, so muss ich jede Verantwortung dafür ablehnen.

3.1, Seite 44: Klar ist, dass es höchstens *eine* Zahl I zwischen den Unter- und Obersummen aller Zangen um f geben kann, denn hätten $I < I'$ beide diese Eigenschaft, so wählten wir eine Zange Z um f , deren Integraltoleranz kleiner als $\varepsilon := I' - I$ ist und erhielten aus

$$\mathcal{U}(Z) \leq I \leq \mathcal{O}(Z) < \mathcal{U}(Z) + \varepsilon \leq I + \varepsilon = I'$$

sofort den Widerspruch $\mathcal{O}(Z) < I'$ zur Annahme über I' .

Nun zum Existenzbeweis. Wenn f in zwei Zangen Z und Z' ist, so ist es auch in der dritten Zange Z'' die man erhält, indem man zur Unterteilung des Intervalls alle durch Z und Z' vorgegebenen Teilungspunkte benutzt und als Unterhöhe jeweils die größere, als Oberhöhe die kleinere der beiden zur Wahl stehenden festsetzt. Dann ist offenbar $\mathcal{U}(Z) \leq \mathcal{U}(Z'') \leq \mathcal{O}(Z'') \leq \mathcal{O}(Z')$ und deshalb stets $\mathcal{U}(Z) \leq \mathcal{O}(Z')$. Also ist jedes solche $\mathcal{O}(Z')$ eine *obere Schranke* für die Menge $M := \{\mathcal{U}(Z) \mid f \text{ in } Z\}$ der Untersummen von f . Eine nichtleere Menge $M \subset \mathbb{R}$ aber, die überhaupt eine obere Schranke besitzt, hat auch eine kleinste obere Schranke, ihr sogenanntes *Supremum* $\sup M$ und wir setzen nun $I := \sup\{\mathcal{U}(Z) \mid f \text{ in } Z\}$. Dann ist sowieso $\mathcal{U}(Z) \leq I$, aber auch $I \leq \mathcal{O}(Z)$ für alle Zangen, in die man f nehmen kann, denn jedes $\mathcal{O}(Z)$ ist obere Schranke von M , aber I die kleinste obere Schranke. $\square$

Anschaulich ist das Supremum leicht zu verstehen. Denken Sie sich auf der nächtlichen Zahlengeraden nur die Punkte von M erleuchtet, und fahren Sie nun von einem Startpunkt in M nach rechts. Dort, wo Sie in die ewige Finsternis eintauchen ist das Supremum, es mag nun der letzte Leuchtpunkt oder bereits dunkel sein. Das Supremum der negativen Zahlen ist zum Beispiel die dunkle Null.

Dass aber für jede nichtleere nach oben beschränkte Menge das Supremum wirklich existiert und die Zahlengerade nicht gerade dort, wo es sein müsste, ein Loch hat, ist eine wichtige und subtile Eigenschaft der reellen Zahlen, man nennt das die *Vollständigkeit* von $\mathbb{R}$. Darüber wäre im Rahmen der axiomatischen Grundlegung, der Konstruktion der reellen Zahlen zu sprechen. Das wollen wir zu gelegener Zeit auch tun, nämlich im Kapitel 23, mit dem der zweite Band dieses Kurses beginnt. Einstweilen unterstelle ich, Sie wüssten das aus der Schule.

3.2, Seite 45: Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\varepsilon > 0$. Weshalb kann man f in eine Zange mit einer Integraltoleranz kleiner als ε nehmen? Nach Definition der Stetigkeit gibt es zu jedem festen $x \in [a, b]$ jedenfalls ein $\delta_x > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in [a, b]$, welche $|x - y| < \delta_x$ erfüllen. Der Index x an δ_x soll daran erinnern, dass für einen anderen Bezugspunkt $x' \in [a, b]$ in der Regel auch ein anderes $\delta_{x'}$ zu wählen sein wird, denn in Bereichen des Intervalls, wo die Funktion sehr steil ansteigt, wird man sehr enge δ -Zügel anlegen müssen, um die Funktionsschwankung im ε -Zaum zu halten.

Für eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ist es zu gegebenem $\varepsilon > 0$ aber doch stets möglich, ein so kleines $\delta > 0$ zu finden, dass es den ε -Trick für alle $x \in [a, b]$ zugleich tut, dass also $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in [a, b]$ gilt, welche $|x - y| < \delta$ erfüllen. Man sagt deshalb, stetige Funktionen auf kompakten Intervallen seien automatisch *gleichmäßig stetig*. Dieser Sachverhalt folgt trivial aus der *Kompaktheit* des kompakten Intervalls, wie Sie in Kapitel 19 allgemeiner für stetige Funktionen auf beliebigen kompakten metrischen Räumen sehen werden, aber eben dass $[a, b]$ in diesem Sinne wirklich *kompakt* ist, beruht wieder auf der Vollständigkeit der reellen Zahlen und führte uns deshalb zu jenen Grundlagenfragen, auf die ich erst im Kapitel 23 eingehen will.

Die Integrierbarkeit von $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folgt nun aber sofort aus seiner gleichmäßigen Stetigkeit. Wir wählen $\delta > 0$ so klein, dass z.B.

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon' := \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

sofern nur $|x - y| < \delta$. Unterteile $[a, b]$ so fein, dass die Teilintervalle kürzer als δ sind und definiere die Zangenschranken $k_i \leq h_i$ für das i -te Intervall durch $f(x_i) \pm \varepsilon'$, wobei x_i irgend einen im i -ten Intervall gewählten Punkt bezeichnet. Dann ist f in der dadurch definierten Zange, deren Integraltoleranz genau $2\varepsilon'(b-a) = \varepsilon/2$, also kleiner als ε ist. $\square$

3.3, S. 46: Wird die Limesvariable nach ∞ oder $-\infty$ geschickt, so können die Formulierungen für $x \rightarrow x_0$ nicht direkt übernommen, sondern müssen so modifiziert werden, wie es die Anschauung sofort nahelegt. Wollen wir nach $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ auch nur fragen, so muss sich jedenfalls der Definitionsbereich von $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auch wirklich nach rechts ins Unendliche erstrecken, genauer: es soll zu jedem noch so großen $c \in \mathbb{R}$ immer noch ein $x \in D$ mit $c < x$ zu finden sein. Das ist die Limesvoraussetzung über den Definitionsbereich. Die Aussage $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ selbst bedeutet dann, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ möglich ist ein $c \in \mathbb{R}$ zu finden, so dass $|A - f(x)| < \varepsilon$ für all jene $x \in D$ gilt, welche rechts von c liegen, also $c < x$ erfüllen. Analog für $x \rightarrow -\infty$. Als Erinnerung an die Schultage gemeint.

Der doppelte Limes, der bei einem uneigentlichen Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktion vorkommt, ist nichts zusätzlich

Neues, die Formel ist einfach wörtlich zu nehmen: setze

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} I(a), \quad \text{wobei} \quad I(a) := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx,$$

vorausgesetzt die Grenzwerte existieren, versteht sich. Wie man leicht nachprüft, gilt aber auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^{\infty} f(x) dx,$$

der Doppellimes existiert hier also genau dann, wenn diese beiden Einzellimes existieren und hat als Wert die Summe von deren Werten, ganz gleich, welches x_0 man als Teilungspunkt wählt.

3.4, Seite 48: Ich vertraue darauf, dass Ihr Mathematiklehrer Ihnen erklärt hat, dass und vielleicht sogar *weshalb* eine auf einem Intervall definierte Funktion, deren Ableitung identisch Null ist, konstant sein muss. Der Schlüssel dazu ist der bekannte *Mittelwertsatz der Differentialrechnung*, auf den wir im Abschnitt 7.1 sowieso zu sprechen kommen.

3.5, Seite 54: Über dx und dy als sogenannte “infinitesimale Größen” wird im Abschnitt 10.6, und im Zusammenhang mit der Integration im Abschnitt 17.4 die Rede sein.

4.1, Seite 63: Diese traditionelle Sprechweise soll nicht etwa bedeuten, dass die Differentialgleichung nur *eine* Lösung habe, die es zu suchen gilt. So eine Differentialgleichung hat unendlich viele Lösungen! Aber die Forderung $y'(x) = f(x, y(x))$ ist eine Forderung an *jeweils* eine Funktion, handelt von nur einer Funktion $y = y(x)$ und nicht z.B. von zwei Funktionen $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$, die beide miteinander in die Forderung verwickelt wären, wie es bei den gekoppelten Systemen der Fall ist, die im Abschnitt 4.6 behandelt werden.

Hätte ich in der Definition auch sagen können, eine Lösung sei eine Funktion $y = y(x)$, welche die Bedingung $y'(x) = f(x, y(x))$ erfüllt? Gewiss doch, die Schreibweise $y' = f(x, y)$ mit der Zusatzzerklärung für

eine gesuchte Funktion $y = y(x)$ ist überhaupt der Meinung, dass sie genau das ausspricht. Wozu dann das $\alpha : D \rightarrow \mathbb{R}$?

Zum einen um Missverständnissen vorzubeugen wie eben jenem, die Differentialgleichung habe nur eine Lösung, nämlich $y(x)$, zum anderen um zu betonen, dass eine Funktion Lösung sein kann, die gar nicht y heißt, wie ja $y = y(x)$ sowieso nur die anonyme Funktionen-Notation ist. Oft hat man von mehreren individuellen Lösungen zu sprechen, die man unterscheiden können muss. Und schließlich um zu erinnern, dass auch Lösungen einen *Definitionsbereich* haben und dieser sogar wichtig ist, insbesondere wird in der Definition vereinbart, dass nur allgemeine Intervalle als Definitionsbereiche zugelassen sein sollen.

4.2, Seite 69: Darf man eine Differentialgleichung der Form $y' = f(y)$ überhaupt als speziellen Fall einer Differentialgleichung von Typ $y' = f(x, y)$ bezeichnen? Eine Funktion von zwei Variablen, sollte sie im Extremfall auch z.B. konstant sein, ist doch prinzipiell etwas anderes als eine Funktion von einer Variablen? Daran ist etwas. Aber wir vereinbaren hiermit einfach, dass für eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ die Differentialgleichung $y' = f(y)$ immer als jene Differentialgleichung auf $\mathbb{R} \times D \subset \mathbb{R}^2$ aufzufassen ist, deren rechte Seite durch $(x, y) \mapsto f(y)$ gegeben ist.

4.3, Seite 73: Hier ist der Beweis: Seien also $\alpha, \beta : D \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Lösungen, $x_0 \in D$ ein Punkt mit $\alpha(x_0) = \beta(x_0) =: y_0$. Wir haben $\alpha(x) = \beta(x)$ für alle $x \in D$ zu zeigen und tun das *indirekt*, wie man sagt, indem wir die Annahme analysieren, es gäbe einen Punkt $\xi \in D$ mit $\alpha(\xi) \neq \beta(\xi)$, wobei wir feststellen werden, dass das nicht sein kann.

Dieses ξ müsste ja rechts oder links von x_0 liegen, sagen wir rechts, also $x_0 < \xi$, der andere Fall geht ganz analog. Um die Stelle x_1 zu finden, an der sich α und β rechts von x_0 erstmals verzweigen, anschaulich gesprochen, betrachten wir die Menge

$$M := \{s \in D \mid \alpha(x) = \beta(x) \text{ für alle } x \text{ mit } x_0 \leq x \leq s\}.$$

Diese Menge ist jedenfalls nicht leer, weil x_0 selbst dazu gehört, und nach oben beschränkt, weil offensichtlich ξ eine obere Schranke von M ist. Sei $x_1 := \sup M$, die kleinste obere Schranke von M . Wie Sie sehen, nutzen wir auch hier wieder die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ aus, von der oben in der Fußnote 3.1 schon die Rede war.

Aus der Stetigkeit von α und β , die ja sogar differenzierbar sind, folgt $\alpha(x_1) = \beta(x_1) =: y_1$, weil entweder $x_1 = x_0$ ist oder α und β jedenfalls auf dem halboffenen Intervall $[x_0, x_1]$ übereinstimmen. Insbesondere kann x_1 nicht ξ und deshalb erst recht nicht der rechte Endpunkt von D sein, falls dieses sich nicht sowieso ins Unendliche erstreckt.

Sei nun R ein Rechteck mit (x_1, y_1) als Mittelpunkt, in dem die Lipschitzkonstante L gilt, d.h. dass $|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}|$ für alle in R gelegenen Punkte $(x, y), (x, \tilde{y})$ von D . Wieder ist es die Stetigkeit von α und β die uns ermöglicht, auch noch ein so kleines $\varepsilon_1 > 0$ zu finden, dass jedenfalls für $x \in [x_1, x_1 + \varepsilon_1] \subset D$ die Graphenpunkte $(x, \alpha(x))$ und $(x, \beta(x))$ im Lipschitzkästchen R liegen und die Lipschitzungleichung für diese Punkte greift, also $|f(x, \alpha(x)) - f(x, \beta(x))| \leq L|\alpha(x) - \beta(x)|$ gilt.

Damit haben wir gewissermaßen die Zeichnung auf S.73 mathematisch aufgearbeitet, aber eine zündende Beweisidee fehlt noch. Irgendwo verzweigen sich die Lösungen, dort sind wir hingegangen, auch dort gilt die Lipschitzbedingung, klar, das steht ja in der Voraussetzung. So what?

Nun, nach dem HDI ist die Lösungsdifferenz $\alpha - \beta$ als Integral über ihre Ableitung $\alpha' - \beta'$ darstellbar, diese wiederum ist, weil α und β die Differentialgleichung erfüllen, nichts anderes als $f(x, \alpha) - f(x, \beta)$, eben jene Differenz, die in der Lipschitzungleichung betragsmäßig durch $\alpha - \beta$ abgeschätzt wird:

$$\begin{aligned}\alpha(x) - \beta(x) &= \int_{x_1}^x (\alpha'(t) - \beta'(t)) dt \\ &= \int_{x_1}^x (f(t, \alpha(t)) - f(t, \beta(t))) dt,\end{aligned}$$

für unsere $x \in [x_1, x_1 + \varepsilon_1]$, und aus der Lipschitzabschätzung in Verbindung mit der Integralungleichung aus der Übungsaufgabe T3.1 (das war $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x)| dx$, zur Erinnerung, danke, bitte) folgt daraus

$$|\alpha(x) - \beta(x)| \leq L \int_{x_1}^x |\alpha(t) - \beta(t)| dt,$$

eine doch zumindest sehr merkwürdige Information über die Lösungsdifferenz $\alpha - \beta$, daraus muss doch etwas zu folgern sein?

Sieht ein Mathematiker nun gleich, was daraus zu schließen ist? Nein, aber er hat Vergnügen daran, eine solche Information hin- und herzuwenden und kleine Experimente damit anzustellen, um hinter das Geheimnis zu kommen. Das Integral kann zum Beispiel nicht größer sein als das Produkt $(x - x_1)m_x$ aus der Länge des Integrationsintervalls und

dem Maximum $m_x := \max\{|\alpha(t) - \beta(t)| \mid x_1 \leq t \leq x\}$ des Integranden, woraus wir die integralfreie Abschätzung $|\alpha(x) - \beta(x)| \leq m_x(x - x_1)L$ erhalten, die nun für jedes $x \in [x_1, x_1 + \varepsilon_1]$ gilt. Insbesondere an einer Stelle $t_x \in [x_1, x]$, an der das Maximum angenommen wird, wo also $|\alpha(t_x) - \beta(t_x)| = m_x$ ist! Die mysteriöse Ungleichung gibt demnach die Auskunft $m_x \leq m_{t_x}(t_x - x_1)L$, erst recht also

$$m_x \leq m_x(x - x_1)L,$$

da ja $t_x \leq x$ ist und die Intervall-Länge und das Maximum nicht wieder kleiner werden können, wenn wir nach rechts gehen.

Daran kann aber nun jeder ablesen, dass dort, wo $(x - x_1)L < 1$ ist, also in dem Intervall $D \cap [x_1, x_1 + \frac{1}{L})$, das Maximum und damit die Lösungsdifferenz selbst, Null sein muss. Insbesondere gibt es rechts von x_1 noch Punkte in der Menge M , deren Supremum x_1 angeblich ist, und das kann ja nicht wahr sein. Dass irgendwo $\alpha(\xi) \neq \beta(\xi)$ sein könnte, hat sich damit als unmöglich erwiesen, und der Beweis des Eindeutigkeitsatzes ist erbracht. $\square$

Ich musste unterwegs wieder an Ihre Schulkenntnisse appellieren und als bekannt voraussetzen, dass jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall wirklich ein Maximum annimmt. Das gehört zu jenem Grundlagenwissen, das mit der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zu tun hat und das ich in diesem frühen Stadium des Kurses nicht weiter aufdröseln möchte. Spätestens im Kapitel 23 werden Sie aber über diese Hintergründe voll aufgeklärt sein.

Hat Ihnen dieser Beweis Spaß gemacht? Oder fühlten Sie sich wie jenes "Thier, auf dürrer Heide von einem bösen Geist im Kreis herum geführt, und rings umher liegt schöne grüne Weide"? Damit können Sie testen, ob auch ein Mathematikstudium etwas für Sie wäre. Nur falls Sie sowieso schwanken! Ich will natürlich niemanden von unserer befreundeten Nachbarfakultät abwerben.

4.4, Seite 84: Die Formel der Lipschitzabschätzung heißt dann

$$\|\vec{f}(x, \vec{y}) - \vec{f}(x, \vec{\tilde{y}})\| \leq L\|\vec{y} - \vec{\tilde{y}}\|,$$

der zugehörige Text ist analog dem eindimensionalen Fall. Auch der in der obigen Fußnote 4.3 geschilderte Eindeutigkeitsbeweis überträgt sich ohne Schwierigkeiten auf die allgemeinere Situation.

4.5, Seite 85: Um die Natur dieser Schwierigkeiten zu sehen, die im Falle von Differentialgleichungen für nur eine gesuchte Funktion $y = y(x)$ schon genau so bestehen, betrachten Sie die einfache Differentialgleichung $y' = x$ mit den Lösungen $y = \frac{1}{2}x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$, aber nicht auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, sondern z.B. auf dem Streifen $\mathbb{R} \times [-1, 1]$. Dann gibt es zu der Anfangsbedingung $y(0) = 1$, obwohl der Punkt $(x_0, y_0) = (0, 1)$ im Streifen liegt, keine auf einem Intervall definierte, im Streifen verlaufende Lösung, denn in Frage käme ja nur $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$.

Hat man einen Existenzsatz für offenen Intervalle zur Verfügung, braucht aber dringend Information über eine Differentialgleichung auf dem abgeschlossenen Streifen $\mathbb{R} \times [-1, 1]$, so geht man nicht zaghaft und resigniert zu dem offenen Streifen $\mathbb{R} \times (-1, 1)$ über, womit man gleichsam aufgeben würde, über die Randpunkte etwas zu erfahren, sondern versucht die Differentialgleichung auf einen offenen Bereich fortzusetzen, der den abgeschlossenen *enthält*, etwa auf einen offenen Streifen $\mathbb{R} \times (-1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$.

Auf den Satz von Picard-Lindelöf werden wir aber erst in Abschnitt 14.5 näher eingehen.

5.1, Seite 91: Diese Mitteilung geht noch ein bisschen über das hinaus, was direkt aus dem Satz von Picard-Lindelöf zu entnehmen wäre. Beachten Sie insbesondere, dass die maximalen Lösungen alle auf dem ganzen Intervall D definiert sind, also nicht auf halbem Wege ins Unendliche verschwinden können, wie das bei nichtlinearen Gleichungen oft vorkommt, siehe das zweite Beispiel in Abschnitt 4.2.

Beachten Sie übrigens auch, dass es mit gutem Grund *ein Fundamentalsystem* heißt, nicht *das Fundamentalsystem*. Fundamentalsysteme gibt es viele für so eine Gleichung! Wenn Sie in der linearen Algebra (ab Kapitel 8) etwas weiter fortgeschritten sein werden, wird Ihnen das völlig selbstverständlich erscheinen.

5.2, Seite 92: Die Variation der Konstanten funktioniert für beliebige lineare Systeme erster Ordnung aus n Gleichungen für n gesuchte Funktionen $y_1, \dots, y_n$, nicht nur für solche, die von Gleichungen zweiter Ordnung herkommen. Ich kann es Ihnen aber jetzt eigentlich nicht näher erklären, weil Sie noch zu wenig lineare Algebra können. Wenn ich mir aber vorstelle, Sie schlagen diese Seite vielleicht später wieder

einmal auf, wenn Sie schon in der Matrizenrechnung versiert sind, dann verstehen Sie das leicht:

Das System lautet $\vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$, wobei $A(x)$ eine $n \times n$ -Matrix von Funktionen ist, die sogenannte *Koeffizientenmatrix* des Systems. Vorausgesetzt wird, dass ein Fundamentalsystem $\vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_n$ für das homogene System $\vec{y}' = A(x)\vec{y}$ schon da ist. Sei $\Phi(x)$ die aus den Spalten $\vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_n$ gebildete Matrix. Der Ansatz für die Variation der Konstanten ist dann $\vec{\psi}(x) = u_1(x)\vec{\varphi}_1(x) + \dots + u_n(x)\vec{\varphi}_n(x) = \Phi(x)\vec{u}(x)$, wobei eben $\vec{u}(x)$ nun zu bestimmen ist. Geht man mit dem Ansatz ins inhomogene System hinein, so erhält man wegen $(\Phi\vec{u})' = \Phi'\vec{u} + \Phi\vec{u}'$ (Produktregel) und $\Phi' = A\Phi$ (Lösungseigenschaft der $\vec{\varphi}_i$), die Gleichung $\Phi(x)\vec{u}'(x) = \vec{b}(x)$, also $\vec{u}'(x) = \Phi(x)^{-1}\vec{b}(x)$, wobei $\Phi(x)^{-1}$ die inverse Matrix bezeichnet, und somit ist zum Beispiel

$$\vec{\psi}(x) := \Phi(x) \int_{x_0}^x \Phi(t)^{-1} \vec{b}(t) dt$$

eine Einzellösung des inhomogenen Systems.

5.3, Seite 100: Die komplexen Zahlen werden im Abschnitt 18.3 mathematisch korrekt eingeführt. Vorher werden Sie aber noch mehrmals Gelegenheit haben, heuristisch-praktisch damit umzugehen.

6.1, Seite 103: Hier schon. $\mathbb{R}^0$ ist nicht leer, wie Sie vielleicht denken könnten, weil ja ein 0-tupel null, also keine Komponenten hat. Ganz formal betrachtet ist ein n -tupel von Zahlen eine Abbildung $\{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$, ein 0-tupel also eine Abbildung $\emptyset \rightarrow \mathbb{R}$, und eine solche Abbildung gibt es, freilich ist sie nicht interessant: sie ist, als Relation zwischen $\emptyset$ und $\mathbb{R}$, natürlich leer, weil ja $\emptyset \times \mathbb{R}$ selbst leer ist. Aber die Frage ist nicht, ob dieses einzige 0-tupel interessant ist, sondern ob es überhaupt existiert, und das ist nun einmal so. Würden wir mit Gewalt, per Konvention, $\mathbb{R}^0 := \emptyset$ festsetzen, so würden wir auf Schritt und Tritt den Fall $n = 0$ extra behandeln müssen. Zum Beispiel wäre dann auch $\mathbb{R}^0 \times \mathbb{R}^n$ leer, was nicht gut damit harmonierte, dass doch sonst $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ auch als $\mathbb{R}^{n+m}$ aufgefasst werden kann, usw.

Ist nun $\mathbb{R}^0$ als einpunktige Menge erkannt, so fragt es sich, wie wir dieses eine Element zweckmäßigerweise benennen sollen, und hier kommt

die lineare Algebra mit überwältigenden Argumenten, dass dafür nur eine Notation in Frage kommt, dieses Element muss Null genannt werden, und daher ist $\mathbb{R}^0 = \{0\}$.

6.2, Seite 111: In Abschnitt 12.2 finden Sie den Beweis der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und gleich danach, als Korollar, die Dreiecksungleichung.

6.3, Seite 113: Denken Sie sich eine vielleicht komplizierte Formel, in die n Variable eingehen, und schauen Sie auf die Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ der Punkte, an denen wir die Formel entweder nicht lesen *können*, weil wir sonst durch Null dividieren oder Wurzeln aus negativen Zahlen ziehen müssten, oder nicht lesen *wollen*, weil sie dort schlechte Eigenschaften hat. Diese Menge A ist häufig das Urbild $\Psi^{-1}(0)$ des Nullpunkts unter einer stetigen Abbildung $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ oder das Urbild $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_0^-)$ eines abgeschlossenen Halbstrahles unter einer stetigen Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ oder die Vereinigung von endlich vielen solchen Mengen. Die stetigen Abbildungen lassen sich aber auch als die Abbildungen charakterisieren, bei denen Urbilder offener Mengen stets offen sind, oder, was dasselbe bedeutet, bei denen Urbilder abgeschlossener Mengen stets abgeschlossen sind, wovon im Kapitel 19 in viel allgemeinerem Rahmen noch zu reden sein wird. Das ist der Grund, weshalb solche Ausnahmемengen A häufig abgeschlossen, die Lesbarkeitsbereiche $\mathbb{R}^n \setminus A$ der Formeln deshalb offen sind. — Aber immer ist das wohl nicht so? — Nein, das habe ich auch nicht versprochen.

6.4, Seite 121: Davon handelt zum Beispiel der *Umkehrsatz*, ein zentraler Satz der Differentialrechnung in mehreren Variablen. Der Umkehrsatz wird uns aber erst im zweiten Band begegnen.

7.1, Seite 127: Führt man den Beweis eines behaupteten Satzes nur unter zusätzlichen, das Problem vereinfachenden Voraussetzungen, so hat man einstweilen nur ein Sätzchen bewiesen, der Beweis des Satzes steht noch aus. Man kann ja Gründe dafür haben, besonders im Unterricht, der vollständige Beweis würde vielleicht zu lange dauern oder zu schwierig sein. Man würde dann sagen "ich beschränke mich [aus Zeitmangel

oder weshalb auch immer] auf den Fall, dass ... ” um klarzustellen, dass man nicht vorgibt, den Satz *in voller Allgemeinheit* bewiesen zu haben.

Ganz anders, wenn die zusätzlichen Voraussetzungen mit den Worten “ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei ... ” oder kurz “oBdA sei ... ” eingeleitet werden. Damit erhebt man den Anspruch, den Beweis des Satzes in voller Allgemeinheit zu leisten, da entweder aus dem scheinbaren ‘Sätzchen’ der allgemeine Satz als Korollar leicht zu folgern ist oder die weggelassenen Beweisteile trivial oder dem ausgeführten Fall so analog sind, dass es sich nicht lohnt, sie ebenfalls auszuführen.

Sie können sich denken, dass die Mathematiker von der Arbeit sparenden Zauberformel ‘oBdA’ regen Gebrauch machen. Manchmal mag ein gewisser Zweifel bestehen, *wie* leicht aus dem Sätzchen der Satz folgt, dann heißt es “oBdA dürfen wir ... annehmen, denn ... ” und es folgt eine Rechtfertigung der oBdA-Annahme. Auch Sie selbst sollten die Wendung ‘oBdA’ eifrig benutzen, in mathematischen Diskussionen und bei der Bearbeitung von Übungsaufgaben. Es spart Arbeit, sieht professionell aus und erzieht Sie dazu, sich auf das Wesentliche zu konzentrieren und triviale Sachen auch als trivial zu erkennen und abzutun.

Freilich ist’s eine verführerische Phrase. Sie müssen sich auch kontrollieren, ob Sie jederzeit in der Lage wären, Ihre oBdA-Annahmen auf Verlangen zu rechtfertigen, sonst verkommt Ihre Beweisführung zu einem nicht akzeptablen *ohne Beachtung der Allgemeinheit*, wie einmal ein Übungsbearbeiter (versehentlich?) geschrieben hat.

7.2, Seite 128: Zuerst, stelle ich mir vor, hat Ihnen Ihr Mathematiklehrer, im Zuge einer Diskussion der Vollständigkeit der reellen Zahlen, erklärt weshalb jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ein Maximum und ein Minimum annehmen muss.

Ist ferner $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar und gilt $f(a) = f(b)$, dann muss es eine Zwischenstelle ξ , also eine Zahl mit $a < \xi < b$ geben, an der $f'(\xi) = 0$ gilt. Das ist der *Satz von Rolle*. Er ergibt sich daraus, dass ja entweder Maximum und Minimum an den Intervall-Enden liegen, nach Voraussetzung also gleich sind und f damit überhaupt konstant, oder zumindest eines der Extrema wird an einer Zwischenstelle ξ angenommen, wo dann nach Definition der Ableitung als Limes des Differenzenquotienten $f'(\xi) = 0$ sein muss.

Den Mittelwertsatz, der ja keine Voraussetzung über die Funktionswerte an den Intervallenden macht, erhält man dann, indem man auf die durch $g(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ definierte Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

den Satz von Rolle anwendet. Beachten Sie $g(a) = g(b)$, was zu erreichen eben der Sinn des linearen Korrekturterms ist.

7.3, Seite 134: Unter einer *Permutation* der Zahlen von 1 bis n versteht man eine bijektive Abbildung τ von $\{1, \dots, n\}$ auf sich selbst. Schreibt man die Permutation statt in der Abbildungsschreibweise in Form eines n -tupels $(\tau_1, \dots, \tau_n)$, das wieder alle Zahlen von 1 bis n enthält, nur in irgend einer Reihenfolge, so ist damit natürlich die durch $i \mapsto \tau_i$, $i = 1, \dots, n$ gegebene Abbildung gemeint.

8.1, Seite 150: Sie werden das nach einiger Beschäftigung mit der linearen Algebra bald selbst einsehen. Die zweidimensionale lineare Algebra zum Beispiel, die sich in der Ebene $\mathbb{R}^2$ abspielt, müssen Sie auch in einer “schräg” im $\mathbb{R}^3$ drinliegenden Ebene durch den Nullpunkt beherrschen. Insbesondere kommt man in der Matrizenrechnung nicht voran, wenn man nicht mit gewissen, eine Matrix A betreffenden Untervektorräumen wie Kern A und Bild A umgehen kann.

Auf die Dauer aber sind nicht nur die Räume $\mathbb{R}^n$, sondern auch ihre Untervektorräume nicht ausreichend für die volle Wirkung der linearen Algebra, die erst in den allgemeinen *Vektorräumen* richtig zu Hause ist. Die Vektorräume sind jedoch Objekte mit einer axiomatischen Struktur, worin Sie noch keine Erfahrung haben. Deshalb nehme ich mir im Kapitel 18 Zeit, ganz langsam und ausführlich zu erklären, was das ist. Was ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist, lässt sich dagegen sofort in ein paar Zeilen sagen, und die Mitteilung, dass die nichttrivialen Unterräume des $\mathbb{R}^3$ die Geraden und Ebenen durch den Nullpunkt sind, sichert das anschauliche Verständnis des Begriffs.

Für die Anwendungen in der Analysis genügen die Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$ vorderhand auch, und Sie können an den Untervektorräumen von $\mathbb{R}^n$ die wesentlichen linear-algebraischen Techniken schon üben. Ich halte deshalb die vorläufige Beschränkung auf Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$ für einen sinnvollen Kompromiss in einem Kurs wie diesem, wo lineare Algebra frühzeitig als Hilfsmittel gebraucht wird, ohne dass viel Zeit zu ihrer Entwicklung da wäre.

8.2, Seite 155: Die Nebenklassen sind die ‘Vektoren’ des Quotientenvektorraumes $\mathbb{R}^n/V$, analog wird W/V gebildet, wenn W irgend ein Vektorraum und $V \subset W$ ein Untervektorraum davon ist. Im Kapitel 20 werden wir auf diese und andere Quotientenbildungen näher eingehen. In der Mathematik kommen Quotientenbildungen sehr häufig vor. In der linearen Algebra ist es eine der Grundkonstruktionen, wie die direkte Summe oder das Tensorprodukt. Wollte man die Nebenklassenbildung um jeden Preis vermeiden, so wäre man oft zu umständlichen Umschreibungen genötigt.

Um den Sinn von W/V in konkreten Beispielen zu erfassen, muss man daran denken, dass V selbst darin der Nullvektor ist. Der Quotient vereinfacht Darstellung und Denken überall dort, wo man in einem Vektorraum W einen unerwünschten oder uninteressanten Untervektorraum V zu ignorieren trachtet. Der sogenannte *Hilbertraum der quadratintegrierbaren Funktionen* auf einem Integrationsbereich (Maßraum), etwa auf $\mathbb{R}$, ist zum Beispiel ein Quotientenraum. Der Vektorraum W der quadratintegrierbaren Funktionen selbst, mit dem Hilbertschen Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) dx$$

versehen, ist nämlich gar kein richtiger Hilbertraum, weil darin $\|f\| = 0$ vorkommen kann, ohne dass $f \equiv 0$ ist. Zusammen mit der konstanten Funktion Null bilden diese Störenfriede einen Untervektorraum $V \subset W$, und der Hilbertraum wird als der Quotient $L^2(\mathbb{R}) := W/V$ definiert.

Hier hat man die Quotientenbildung eingesetzt, um gewissermaßen eine kleine Verunreinigung V zu beseitigen. Ein andermal kann es darum gehen, eine kleine, aber hochinteressante Information aus einem riesigen Vektorraum W herauszudestillieren, der durch einen fast ebenso riesigen uninteressanten Untervektorraum V so verwässert ist, dass man die wertvolle Information kaum noch entdecken kann. In der mathematischen Vektoranalysis, die Sie als aufklärendes Hintergrundwissen zur klassischen, in der Physik gebräuchlichen Vektoranalysis im zweiten Band kennenlernen können, betrachtet man zum Beispiel den Vektorraum W der *geschlossenen k -Formen*, einer Verallgemeinerung der rotationsfreien Vektorfelder, auf einem Bereich M , und darin den Untervektorraum der *exakten k -Formen*, die etwa den Gradientenfeldern entsprechen. Der Quotient $W/V =: H^k(M, \mathbb{R})$ ist dann die k -te *de Rham-Kohomologie* von M , ein kleiner, meist endlichdimensionaler, berechenbarer Vektorraum, der Interessantes über M aussagt.

Sie sehen meinen guten Willen, Ihre Fragen zu beantworten. Dass Sie die Antwort jetzt noch nicht in allen Einzelheiten verstehen können, liegt in der Natur der Sache. Vorerst geht es für Sie auch nur darum, den einfachen Quotientenbildungsvorgang selbst zu begreifen, und sogar das tritt erst im Abschnitt 20.4 ganz konkret an Sie heran.

9.1, Seite 170: Als ein prominentes physikalisches Beispiel betrachten Sie im realen physikalischen Raume einen Bezugspunkt P , von dem aus Sie alle Raumpunkte durch *Ortsvektoren* darstellen und den physikalischen Raum dadurch zu einem reellen Vektorraum (im Sinne von Abschnitt 18.4) machen. Die Vektoraddition ist darin durch das bekannte 'Kräfteparallelogramm' von Ortsvektoren definiert. Viel physikalische Mathematik spielt sich in diesem Vektorraum ab. Wenn Sie ihn aber mit dem Zahlentripel-Raum $\mathbb{R}^3$ in Verbindung bringen wollen, müssen Sie eine Basis darin wählen. Mangel daran besteht nicht, aber die Auswahl fällt schwer, es gibt praktisch keine Möglichkeit, sich ein für allemal auf eine bestimmte Basis zu einigen, ja man wollte das auch gar nicht, weil je nach dem vorliegenden physikalischen Problem einmal diese, dann wieder jene Basis einfacheres Rechnen gestattet. Gelegentlicher Basiswechsel ist unvermeidbar.

10.1, Seite 198: Auch die mehrdimensionale Kettenregel im folgenden Abschnitt 10.3 hat man erst richtig verstanden, wenn man die gewöhnliche, eindimensionale Kettenregel als Spezialfall darin wiedererkennt.

Einen anderen Fall von Betriebsblindheit infolge zu großer Einfachheit beobachte ich ebenfalls immer wieder, nämlich wenn es um das Differential $d\vec{f}_{\vec{x}}$ einer Abbildung $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ der Form $\vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$, einer sogenannten *affinen* Abbildung geht, vergl. Notiz 1 in 10.1. Dass dann für jedes $\vec{x}$ einfach $d\vec{f}_{\vec{x}} = A$ gilt, sorgt regelmäßig bei einigen Hörern für Verwirrung, obwohl doch niemand ein Problem damit hat, dass die Ableitung von $f(x) = ax + b$ überall $f'(x) = a$ ist.

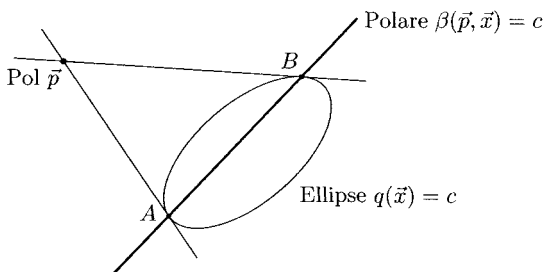
Vielleicht hat es damit zu tun, dass in der Formel für $\vec{f}$ das A auf die Variable $\vec{x}$ zu wirken hat, während die Gleichung $d\vec{f}_{\vec{x}} = A$ für festes $\vec{x}$ zu lesen ist und $d\vec{f}_{\vec{x}}(\vec{v}) = A\vec{v}$ für alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ bedeutet. Sollten Sie zu den Betroffenen gehören, so versuchen Sie doch einmal bewusst, die Schwierigkeit zu lokalisieren.

10.2, Seite 203: Die sechs Beispiele sind aus den beiden Lehrbüchern

1. W. Demtröder, *Experimentalphysik 1*, Springer-Verlag 1994
2. K. Dransfeld, P. Kienle, H. Vonach, *Physik I*, 7. Auflage, Oldenbourg, München 1996

genommen, und zwar die ersten beiden aus [2], Seiten 56 und 106, die anderen vier Beispiele aus [1], Seiten 63, 67, 69 und 389.

12.1, Seite 232: Diese Benennung stammt aus der analytischen Geometrie. Sei $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine quadratische Form auf der Ebene, und die Gleichung $q(\vec{x}) = c$ beschreibe, sagen wir, eine Ellipse. Sei ferner $\vec{p} \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt im Außenbereich der Ellipse, den wir jetzt den *Pol* nennen. Die beiden Geraden durch $\vec{p}$, welche die Ellipse berühren, berühren sie in zwei Punkten A und B , und die Gerade durch A und B nennt man dann die *Polare* zum Pol $\vec{p}$ bezüglich der Ellipse $q(\vec{x}) = c$.



Polare $\beta(\vec{p}, \vec{x}) = c$ zum Pol $\vec{p}$ bezüglich $q(\vec{x}) = c$.

Und die Gleichung dieser Polaren zum Pol $\vec{p}$ ist dann $\beta(\vec{p}, \vec{x}) = c$, wobei β die symmetrische Bilinearform von q bezeichnet. Deshalb nennt man die Bestimmung von β aus q die *Polarisierung* von q .

Fängt man einmal an, sich für Pol und Polare zu interessieren, stellen sich sofort weitere Fragen: was geschieht, wenn der Pol in den Innenbereich der Ellipse wandert, was bedeutet die Polare, wenn $q(\vec{x}) = c$ keine Ellipsengleichung ist, was bedeutet die Gleichung $\beta(\vec{p}, \vec{x}) = c$ in höheren Dimensionen geometrisch usw. Ich wollte Ihnen aber nur rasch sagen, woher die sonst unverständliche Benennung für den Übergang $q \mapsto \beta$ kommt.

12.2, Seite 240: Von der Hauptachsentransformation quadratischer Formen handelt der Abschnitt 22.3.

12.3, Seite 251: Sei U eine offene beschränkte Teilmenge im $\mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen mit $\mu_k(U) \in \mathbb{R}$ den Volumeninhalt des Würfelaggregates $W_k(U)$, das die Vereinigung der in U enthaltenen Würfel des k -fach unterteilten Einheits-Würfelgitters ist. Dann heißt $\mu(U) := \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(U)$ das *Maß* oder der Volumeninhalt oder kurz das Volumen von U .

Für offene Mengen ist das eine gute Art, das Volumen zu messen, aber für viele andere beschränkte Mengen versagt die Methode kläglich. Man kann zum Beispiel aus einer großen dicken offenen Menge U eine Folge $P_1, P_2, \dots$ von Punkten gezielt so herausnehmen, dass die Restmenge $\Omega = U \setminus \{P_1, P_2, \dots\}$ überhaupt keinen einzigen noch so kleinen Würfel enthält. Sie erhielte demnach das Maß Null, aber nach unserer Intuition sollte das Volumen von U die Herausnahme dieser Punkte gar nicht spüren, denn wieviel Volumen kann man dabei insgesamt herausgenommen haben? So eine Punktmenge $\{P_1, P_2, \dots\}$ sollte doch auf jeden Fall das Maß Null haben, kann man sie doch für jedes $\varepsilon > 0$ in eine Vereinigung von offenen Würfeln mit Volumina $\varepsilon/2, \varepsilon/4, \varepsilon/8, \dots$ einschließen, deren Gesamtvolumen dann also höchstens ε ist.

Die bessere Methode besteht darin, eine beschränkte Menge Ω durch eine abgeschlossene Menge A und eine offene Menge U mit $A \subset \Omega \subset U$ — soll ich wieder sagen: in die Zange zu nehmen? Dann ist $U \setminus A$ offen, und $\mu(U \setminus A)$ würde man die *Maßtoleranz* der Maßzange (A, U) nennen. Eine beschränkte Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Lebesgue-meßbar**, wenn man sie mit beliebig kleiner Toleranz in eine Maßzange nehmen kann, und das Infimum $\mu(\Omega) := \inf\{\mu(U) \mid \Omega \subset U, \text{ und } U \text{ offen}\}$ heißt dann das **Lebesgue-Maß** von Ω . Auf diesem Maß fußt das Lebesgue-Integral, der moderne Integralbegriff.

13.1, Seite 264: In der Polardarstellung $z = re^{i\varphi}$ einer komplexen Zahl $z \neq 0$ vom Betrag $r = |z| > 0$ wird φ zwar oft *das Argument* von z genannt, aber eigentlich ist das irreführend, es sollte richtig *ein Argument* von z heißen, denn mit φ ist für jedes $k \in \mathbb{Z}$ auch $\varphi + 2k\pi$ ein ebenso gutes ‘Argument’ für z , wie aus der Eulerschen Formel und den Periodizitätseigenschaften von Sinus und Cosinus ersichtlich ist.

Für eine einzelne Zahl z ist damit kein Problem verbunden, man wählt eben eines der Argumente zur Benutzung aus, für eine positive reelle Zahl etwa $\varphi = 0$, für eine positiv-imaginäre $\varphi = \pi/2$, für eine negativ imaginäre $\varphi = -\pi/2$ für eine negative reelle — hier stocken wir kurz: wollen wir $\varphi = \pi$ oder $\varphi = -\pi$ nehmen? Na, nehmen wir $\varphi = \pi$, wenn nichts dagegen spricht, und was sollte denn dagegen sprechen.

Nun, es spricht schon manchmal etwas dagegen. Hat man nicht mit einer einzelnen Zahl, sondern mit allen Zahlen in einem gewissen offenen Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ der komplexen Ebene zu tun, so verursacht es schon manchmal technische Probleme, wenn bei einer Zuordnung $z \mapsto \varphi(z)$, die wir vornehmen, eine *unstetige* Funktion $G \rightarrow \mathbb{R}$ herauskommt, das wollen wir doch möglichst vermeiden. Enthält G zum Beispiel keine negativen reellen Zahlen, so führt die vorhin vorgeschlagene so gemütlich getroffene Wahl zu einer stetigen Funktion und alles ist in Ordnung. Wenn aber $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ zur Debatte steht, ja wenn G auch nur irgend eine Kreislinie um den Nullpunkt enthält, dann ist eine stetige Argumentzuordnung auf G unmöglich.

Deswegen bricht keine Panik aus, die Möglichkeiten der Argumentzuordnung haben ja nichts Geheimnisvolles an sich. Stellen Sie sich die Menge $\{(z, \varphi) \mid \varphi \text{ Argument von } z\}$ im Raum $(\mathbb{C} \setminus 0) \times \mathbb{R}$ anschaulich vor, gleichsam den Graphen der ‘mehrdeutigen Funktion’ φ . Wie sieht das aus? Wie eine große Wendeltreppe oder besser *Wendelfläche*, denn Stufen sind keine da. Starten wir mit dem Argument 0 über dem positiven reellen Halbstrahl, so haben wir $\mathbb{R}^+ \times 0 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, und drehen wir nun den Halbstrahl gegen den Uhrzeigersinn, so schraubt sich der stets horizontal darüber liegende Halbstrahl in der Wendelfläche nach oben, nach einer vollen Umdrehung liegt er in der Höhe 2π über seiner Ausgangslage usw., analog nach unten im Uhrzeigersinn. Stellt man sich das so vor, so sieht man schon, ob und wie man über einem gegebenen G einen Teil dieser Wendelfläche so ausschneiden kann, dass es der Graph einer *stetigen* Argumentzuordnung ist. In dem Fall hat man dann ein sogenanntes *Blatt der Argumentfunktion* auf G ausgewählt. Das ist dann sogar eine C^∞ -Funktion und auf die eine oder andere Weise durch Arcusfunktionen beschreibbar. Insbesondere lässt sich auf einer ganz in $\mathbb{C} \setminus 0$ gelegenen Kreisscheibe G immer ein Blatt des Arguments definieren.

Interessant ist, dass das Differential oder der Gradient so eines Argumentblattes an einer festen Stelle $z \in \mathbb{C} \setminus 0$ oder $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus 0$, wie wir das auch lesen können, von der Wahl des Blattes gar nicht abhängt, weil ein konstanter Summand $2k\pi$ beim Differenzieren verschwindet. Deshalb ist $\text{grad } \varphi : \mathbb{R}^2 \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein ganz richtiges, ‘eindeutiges’ C^∞ -Vektorfeld.

Zusammen mit der Mehrdeutigkeit seines Potentials φ ergibt das interessante mathematische, auch physikalisch relevante Effekte, die uns noch manchmal beschäftigen werden.

13.2, Seite 269: Dass man den allgemeinen Fall $\omega > 0$ mathematisch auf den speziellen Fall $\omega = 1$ zurückgeführt hat heißt aber nicht, dass man das ω ein für allemal los geworden ist. Erstens müssen Sie sowieso im konkreten Anwendungsfall auch ein konkretes ω wieder einsetzen, und zweitens ist es von physikalischem Interesse zu studieren, was für $\omega \rightarrow 0$ mit der Fourierentwicklung einer Funktion f geschieht.

Was soll das heißen? Eine nicht konstante Funktion f kann doch nicht für alle $\omega > 0$ zugleich $\frac{2\pi}{\omega}$ -periodisch sein? So ist es nicht gemeint. Betrachten Sie eine Funktion f auf ganz $\mathbb{R}$, periodisch braucht sie nicht zu sein. Dann können wir ihre Einschränkung auf das Intervall $(-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}]$ zu einer $\frac{2\pi}{\omega}$ -periodischen neuen Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen und diese in eine $\frac{2\pi}{\omega}$ -periodische Fourierreihe entwickeln. Außerhalb $(-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}]$ hat diese Entwicklung freilich nichts mit dem dortigen Verlauf des ursprünglichen f zu tun, dort schauen wir auch gar nicht hin. Wir haben eben f nur auf dem Intervall $(-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}]$ entwickelt, wenn Sie diese Sprechweise genehmigen. Je kleiner nun ω wird, desto größer wird dieses Intervall und einen desto größeren Teil von f sehen wir dargestellt. Was wird daraus, wenn wir ω gegen Null gehen lassen?

Mit bloßem Auge ist das nicht zu sehen. Ein besserer Ausgangspunkt als die klassische trigonometrische Fourierreihe ist die auf der Eulerformel beruhende komplexe Version $\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$ davon, die Sie später kennenlernen werden (s. auch Übungsaufgabe R22.8). Von da aus führt ein heuristischer Weg zu der Überzeugung, dass die Reihendarstellung auf $(-\frac{\pi}{\omega}, \frac{\pi}{\omega}]$ für $\omega \rightarrow 0$ in eine Integraldarstellung der Form $f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{it\omega} d\omega$ übergeht. Die Funktion $\hat{f}(\omega)$ heißt die **Fouriertransformierte** der Funktion $f(t)$.

Der mathematische Weg zu *bewiesenen*, also verlässlichen Aussagen über die Fouriertransformation führt zwar nicht über die Fourierreihen und den Grenzübergang $\omega \rightarrow 0$, aber dieser Zusammenhang ist für die physikalische Interpretation wichtig, und deshalb wird Ihnen diese Heuristik in den Physikvorlesungen begegnen. Die Fouriertransformation gibt es auch für Funktionen von mehreren Variablen, und sie spielt eine große Rolle in der Physik.

14.1, Seite 294: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ bezeichnet die Menge der rationalen Zahlen, also der ganzzahligen Brüche, in $\mathbb{R}$. Sei M die Menge der Nebenklassen $[x] := \{x + q \mid q \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, man schreibt dafür auch $M = \{[x] \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Auf dieser Menge definieren wir ein dynamisches System $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ durch $\Phi(t, [x]) := [t + x]$. Das System hat nur einen Orbit, nämlich ganz M , und jede Flusslinie ist nichtkonstant, hat aber trotzdem beliebig kleine positive Perioden, denn sogar jede rationale Zahl ist Periode.

14.2, Seite 296: Die maximalen lokalen Flüsse sind nicht nur *sogenannte* maximale lokale Flüsse, sie *sind* wirklich ‘maximal’, und zwar in folgendem Sinne. Es seien Φ und $\tilde{\Phi}$ zwei lokale Flüsse, im Sinne unserer Definition, auf derselben Menge M , und $\tilde{\Phi}$ sei eine Erweiterung von Φ , das heißt für jedes $p \in M$ ist $(a_p, b_p) \subset (\tilde{a}_p, \tilde{b}_p)$ und $\alpha_p(t) = \tilde{\alpha}_p(t)$ für alle $t \in (a_p, b_p)$. Dann folgt automatisch schon $(a_p, b_p) = (\tilde{a}_p, \tilde{b}_p)$, also $\Phi = \tilde{\Phi}$. Man kann also Φ gar nicht echt erweitern, es ist eben schon *maximal*.

Der Beweis ist nicht schwierig. Angenommen $(a_p, b_p) \subsetneq (\tilde{a}_p, \tilde{b}_p)$ für ein $p \in M$, oBdA $b_p < \tilde{b}_p$. Betrachte $q := \tilde{\alpha}_p(b_p)$ und wähle $\varepsilon > 0$ so klein, dass $a_q < -\varepsilon$ und auch $a_p < b_p - \varepsilon$ gilt. Dann wäre $\tilde{\alpha}_q(-\varepsilon) = \tilde{\alpha}_p(b_p - \varepsilon)$, und da Φ überall dort, wo es überhaupt definiert ist, mit $\tilde{\Phi}$ übereinstimmt, auch $\alpha_q(-\varepsilon) = \alpha_p(b_p - \varepsilon) =: r$, woraus nun aber mittels (2a) einerseits $(a_r, b_r) = (a_q + \varepsilon, b_q + \varepsilon)$, andererseits $(a_r, b_r) = (a_p + \varepsilon - b_p, b_p + \varepsilon - b_p)$ folgte, was wegen $b_q > 0$ nicht sein kann.

14.3, Seite 299: Etwa eine stillschweigende Verabredung, Vierervektoren immer als Paare $(E, \mathbf{p})$ oder $(t, \mathbf{x})$ usw. zu schreiben und nicht abzukürzen, oder griechische Indices μ, ν usw. immer von 0 bis 3, lateinische i, j aber von 1 bis 3 laufen zu lassen.

14.4, Seite 299: Physikalische Ortsvektoren dienen oft nicht nur zur einfachen Ortsangabe, sondern beschreiben die Abweichung oder Ortsdifferenz von einem physikalisch relevanten Bezugspunkt. Dann ist auch Addition dieser Vektoren physikalisch relevant und die Pfeilchen-Notation ein berechtigtes Signal.

14.5, Seite 306: Das wird im Abschnitt 19.3 ausführlich erklärt.

14.6, Seite 307: Siehe etwa die Darstellung in V. I. Arnold, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer-Verlag, 2. Auflage 2001.

14.7, Seite 313: Wenigstens glaubt man es zu sehen, was für den heuristischen Zweck auch ausreichen mag. Der Beweis: gäbe es in einem der drei Intervalle Punkte $a < b$, die verschiedenen Bahnen A und B angehörten, so hätte das Supremum $c := \sup\{a \in A \mid a < b\}$ die Eigenschaft, dass für jedes $\varepsilon > 0$ das Intervall $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ Punkte aus verschiedenen Bahnen enthielte. Das kann aber nicht sein, denn für genügend kleines $\varepsilon > 0$ muss $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ ganz in der Bahn von c liegen, da der Definitionsbereich von α_c ein offenes Intervall und $\dot{\alpha}_c(0) \neq 0$ ist.

15.1, Seite 327: Hätte ich das transformierte System besser $\dot{\vec{y}} = A\vec{y}$ statt $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ schreiben sollen? Aber wozu sollten wir noch einen zusätzlichen Buchstaben y einführen? Nun, vielleicht dazu, um die Transformation $\vec{y} = S\vec{x}$ als die Einführung neuer Koordinaten $\vec{y}$ aufzufassen und $\dot{\vec{y}} = A\vec{y}$ als das alte System $\dot{\vec{x}} = B\vec{x}$, *geschrieben in den neuen Koordinaten* zu lesen. Auch gut, ich möchte aber doch lieber haben, dass Sie sich jetzt einmal $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ und $\dot{\vec{x}} = B\vec{x}$ als zwei durchaus selbständige, verschiedene Systeme vorstellen, zwischen denen die Transformation in der präzis angegebenen Weise vermittelt. Wenn Sie das richtig erfasst haben, dann mögen Sie sich mit einer Redeweise anfreunden, die $\dot{\vec{y}} = A\vec{y}$ als "dasselbe" System wie $\dot{\vec{x}} = B\vec{x}$ auffasst.

15.2, Seite 339: Gewöhnlich wird hier auf P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York 1964 verwiesen.

16.1, Seite 358: Die allgemeineren geschlossenen und exakten k -Formen treffen Sie im *Cartan-Kalkül* der mathematischen Vektoranalysis an. Im zweiten Band.

16.2, Seite 360: Schreiben wir zur Abkürzung $f(t, h) := \omega_{p+th\vec{e}_i}(\vec{e}_i)$, so brauchen wir jetzt das Lemma

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 f(t, h) dt = \int_0^1 \lim_{h \rightarrow 0} f(t, h) dt,$$

denn die linke Seite ist die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$, die wir da ausrechnen wollen, und auf der rechten Seite ist $\lim_{h \rightarrow 0} f(t, h) = f(t, 0) = \omega_p(\vec{e}_i)$ wegen der Stetigkeit von f , und da das von t gar nicht mehr abhängt, ist das Integral $\int_0^1 \dots dt$ darüber auch nichts anderes als diese Konstante $\omega_p(\vec{e}_i)$. Aber das sind schon die zufälligen Details unseres konkreten Problems, die allgemeine Frage ist, ob und unter welchen Umständen man Limes und Integral wie oben vertauschen darf.

Sätze, die darüber Auskunft geben, nennt man *Integralkonvergenzsätze*. Es gibt eine ganze Anzahl davon, denn das Problem stellt sich unter den verschiedensten Begleitumständen immer wieder von Neuem, und davon, dass man etwa die Vertauschung einfach ‘immer’ vornehmen dürfe, kann gar keine Rede sein. Auch vom verwendeten Integralbegriff hängt das ab, und seine Konvergenzeigenschaften sind nicht gerade ein Ruhmesblatt für unseren Riemannschen Integralbegriff, das Lebesgue-Integral verhält sich da viel besser.

Im zweiten Band bekommen Sie eine bescheidene Grundausrüstung an Konvergenzsätzen, mit der sich aber doch ganz schön haushalten lässt. Für den Moment kann ich Ihnen mitteilen, dass jedenfalls für stetige Funktionen $f(t, h)$ auf einem Rechteck der Form $[a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ die Vertauschung der Operationen $\lim_{h \rightarrow 0}$ und $\int_a^b \dots dt$ anstandslos erlaubt ist. Die Gefahr, dass Ihr Physikprofessor Rechenschaft von Ihnen fordern könnte, weshalb Sie Limes und Integral glaubten vertauschen zu dürfen, halte ich für eher gering. Und so wären Sie in dieser Hinsicht erst einmal versorgt.

16.3, Seite 363: Auch hierfür ist letzten Endes ein Integralkonvergenzsatz zuständig. Für eine C^1 -Funktion $f(t, \vec{x})$ auf einem Definitionsbereich $[a, b] \times M$, wobei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen ist, dürfen Sie jedenfalls $\partial/\partial x_j$ und $\int_a^b \dots dt$ vertauschen.

17.1, Seite 372: Im zweiten Band werden wir den koordinatenbedürftigen *k-dimensionalen Flächen im $\mathbb{R}^n$* begegnen, und Interessenten werden dort auch die noch allgemeineren *Mannigfaltigkeiten* und ihre lokalen Koordinaten kennenlernen.

17.2, Seite 381: Innerhalb der klassischen Vektoranalysis im zweiten Band, zur Vorbereitung auf die Integralsätze von Gauß und Stokes.

18.1, Seite 385: Wichtig für Physiker, wenn auch vielleicht nicht für Erstsemester, sind zum Beispiel die *semidirekten Produkte* zweier Gruppen H und G . Zur Herstellung eines solchen semidirekten Produkts braucht man als Konstruktionsanweisung aber noch einen Gruppenhomomorphismus $\sigma : G \rightarrow \text{Aut}(H)$, $g \mapsto \sigma_g$ von G in die Gruppe der Automorphismen von H . Das klingt kompliziert, bedeutet aber doch nur, dass erstens jedes einzelne $\sigma_g : H \rightarrow H$ bijektiv ist und die Verknüpfung in H respektiert und zweitens σ selbst die Eigenschaft $\sigma_{g_1 g_2} = \sigma_{g_1} \circ \sigma_{g_2}$ hat. Stellen Sie sich intuitiv G als handelnd und H als erleidend vor: jedes $g \in G$ wirbelt H mittels $\sigma_g : H \rightarrow H$ durcheinander. Das nach Anweisung σ gebildete *semidirekte Produkt* $H \rtimes_\sigma G$ ist als Menge einfach $H \times G$, wie das direkte Produkt, aber die Verknüpfung ist durch

$$(h_1, g_1)(h_2, g_2) := (h_1 \sigma_{g_1}(h_2), g_1 g_2)$$

gegeben. Das aggressive g_1 , auf dem Wege zum g_2 wie beim direkten Produkt, kann es also nicht unterlassen, dem h_2 , dem es dabei begegnet, einen kleinen Dreher zu verpassen. Das h_1 tritt dann so hinterdrein. Für den Spezialfall des konstanten $\sigma : G \rightarrow \{\text{Id}_H\} \subset \text{Aut}(H)$ ergibt sich das gewöhnliche direkte Produkt.

Sei zum Beispiel M^4 der Minkowski-Raum, das Universum der speziellen Relativitätstheorie, und T^4 der Vektorraum der Translationen auf M^4 , versehen mit der naturgegebenen Lorentzischen quadratischen Form $q : T^4 \rightarrow \mathbb{R}$, die in den Koordinaten eines jeden Inertialsystems durch $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ beschrieben ist. Sei $\mathcal{P}(M^4)$ die *Poincaré-Gruppe*, das ist die Gruppe der affinen lorentzinvarianten Transformationen auf M^4 , die *Automorphismengruppe des Universums*, pathetisch gesprochen. Dass die physikalischen Gesetze invariant unter der Wirkung der Poincaré-Gruppe sein sollen, ist das *Relativitätsprinzip*.

Die Struktur der Poincaré-Gruppe ist die eines semidirekten Produkts, in kanonischer Weise ist nämlich $\mathcal{P} = T^4 \rtimes L$, wobei T^4 als die

abelsche Gruppe $(T^4, +)$ zu verstehen ist und L die **Lorentz-Gruppe** bezeichnet, das ist die Gruppe der linearen Automorphismen von T^4 , welche die Lorentzform invariant lassen. Da jedes $\Lambda \in L$ schon von Haus aus als ein Automorphismus $\Lambda : T^4 \rightarrow T^4$ definiert ist, wäre es pedantisch, zwischen Λ und σ_Λ zu unterscheiden, das ist hier dasselbe, und deshalb kann diesmal σ in der Notation unterdrückt werden.

Haben Sie das alles verstanden? Brauchen Sie auch nicht. Man könnte aber nicht Physik studieren, wenn man alles gleich von sich wiese, was man nicht ganz versteht — eher schon Mathematik. Semidirekte Produkte kommen in der Physik vor, die Mathematiker haben aus ihren eigenen Gründen semidirekte Produkte sehr genau studiert, wenn Sie also später einmal damit zu tun haben, können Sie sich aus der Mathematik nützliche Informationen holen. Nehmen Sie zumindest das aus unserer kleinen Diskussion mit.

18.2, Seite 402: In diesem ganzen ersten Band. Der Zweite beginnt aber direkt mit der Konstruktion der reellen Zahlen. Eine detaillierte “Erinnerung” an das, was Sie aus der Schule darüber schon hätten wissen können.

18.3, Seite 403: Nicht zufällig war eine Matrix dieser Form in Abschnitt 15.4 aufgetaucht (3. Fall).

18.4, Seite 407: Zum Beispiel auf S.91 in K. Jänich, *Analysis für Physiker und Ingenieure*, 4. Auflage, Springer-Verlag 2001. Wenn Sie sich für den Fundamentalsatz interessieren, sei Ihnen aber dringend der Aufsatz von R. Remmert empfohlen, der als Kapitel A4 in H.-D. Ebbinghaus et al., *Zahlen*, 3. Auflage, Springer-Verlag 1992 zu finden ist. Zitat: “Eine Übersicht über fast hundert klassische Beweise des Fundamentalsatzes gaben 1907 E. NETTO und R. LE VAVASSEUR: [...]”.

18.5, Seite 409: Ausschnitt aus einer e-mail-Predigt an einige meiner Hörer, aus gegebenem Anlass, nachdem das in der Vorlesung schon dran gewesen war. Hat geholfen, nach eigenem Bekunden der Adressaten, vielleicht hilft’s auch dem einen oder anderen Leser: “Jetzt erinnere

ich Sie an den Begriff des reellen Vektorraums. Ein reeller Vektorraum besteht aus drei Bestimmungsstücken, nämlich aus erstens einer Menge, nennen wir sie V , zweitens einer Abbildung $V \times V \rightarrow V$ und drittens einer Abbildung $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$, und dieses Tripel

$$(V, V \times V \rightarrow V, \mathbb{R} \times V \rightarrow V)$$

von Bestimmungsstücken nennt man auch nur dann einen *reellen Vektorraum*, wenn es gewisse Bedingungen (“Axiome”) erfüllt (die sich am leichtesten merken lassen, wenn man das zweite Bestimmungsstück als $+: V \times V \rightarrow V$, $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} + \vec{v}$ und das dritte als $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$, $(\lambda, \vec{v}) \mapsto \lambda \vec{v}$ notiert, weil sie sich dann als geläufige Rechenregeln formulieren lassen, ich führe sie jetzt nicht auf, Sie finden sie in Ihrem Skript).

Das versteht man in der Mathematik unter einem reellen Vektorraum, und diese Benennung müssen Sie sich gewissermaßen als geschützt vorstellen: *Reeller Vektorraum*®, es steht Ihnen *nicht* frei, unter einem reellen Vektorraum etwas anderes zu verstehen, für eigene Neuschöpfungen, die natürlich nicht verboten sind, müssen Sie dann schon auch einen neuen Namen wählen, damit keine Mißverständnisse entstehen. Insbesondere läßt sich die Mathematik keines der Axiome und schon gar keines der Bestimmungsstücke abhandeln. Daran ändert auch die Gewohnheit nichts, statt “der reelle Vektorraum $(V, +, \cdot)$ ” kurz “der reelle Vektorraum V ” zu sagen, das ist nur eine abkürzende Sprechweise unter Eingeweihten, an der Definition des Begriffes wird deshalb kein Iota geändert.”

19.1, Seite 424: Quotientenräume $X/\sim$, von denen im nächsten Kapitel die Rede sein wird, erweisen sich häufig als nichthausdorffsch und stellen anschauliche, nichttriviale und mathematisch relevante Beispiele nichthausdorffscher Räume. Von ganz anderer Art ist z.B. die in der algebraischen Geometrie wichtige nichthausdorffsche *Zariski-Topologie*. Dass nichthausdorffsche Räume etwas an sich haben, was unserem geometrischen Empfinden widerspricht, wird ja nicht bestritten. Um so überraschender und technisch sehr nützlich ist, wie *viel* geometrische Intuition auch in nichthausdorffschen Räumen noch wirksam bleibt.

19.2, Seite 437: Die abgeschlossenen Kugeln im unendlichdimensionalen Hilbertraum sind zum Beispiel nicht kompakt.

20.1, Seite 455: Von der Wohldefiniertheit spricht man aber nicht nur in Zusammenhang mit Äquivalenzrelationen. Wann immer in einer Definition der Benutzer eine *Wahl* unter mehreren Möglichkeiten zu treffen hat, die vorgeblich alle zum selben Ergebnis führen, darf man fragen ob das auch wahr ist, ob durch den Wortlaut der Definition deren Ergebnis wirklich *wohldefiniert* ist.

21.1, Seite 463: Man kann aber den Basisbegriff selbst so verallgemeinern, dass dann *jeder* Vektorraum Basen hat. Und zwar versteht man dann unter einer Basis von V eine möglicherweise unendliche Familie $\{\vec{v}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ von Vektoren in V mit der Eigenschaft, dass sich jedes Element $\vec{v} \in V$ eindeutig als Summe $\vec{v} = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda \vec{v}_\lambda$ schreiben lässt, wobei jeweils nur für endlich viele $\lambda \in \Lambda$ der Koeffizient $c_\lambda \in \mathbb{K}$ von Null verschieden ist, es sich also wirklich um ganz normale endliche Summen handelt. Wenn Sie irgendwo lesen, jeder Vektorraum habe eine Basis, dann ist das so gemeint. Unsere bisherigen Basen sind mit den endlichen Indexmengen $\Lambda := \{1, \dots, n\}$ als Spezialfälle dabei.

21.2, Seite 463: Das hat vor allem damit zu tun, dass die unendlichdimensionale lineare Algebra, soll sie für Analysis und Physik brauchbar sein, metrische und topologische Gesichtspunkte mit einbeziehen und so zur *Funktionalanalysis* werden muss. Der in Fußnote 21.1 beschriebene Basisbegriff denkt zum Beispiel nur an die rein linear-algebraischen Bedürfnisse und spielt deshalb in der Funktionalanalysis keine große Rolle. Im Hilbert-Raum benutzt man stattdessen sogenannte *Hilbert-Basen*, bei denen die Entwicklung eines Vektors nach der Basis im Allgemeinen nicht auf eine endliche Summe, sondern auf eine unendliche Reihe führt.

21.3, Seite 469: Es greift zwar in unsere Betrachtungen nicht wirklich ein, aber guter Ordnung halber will ich doch darauf hingewiesen haben,

dass in der Algebra zwischen dem Begriff des Polynoms in einer Unbestimmten λ als eines formalen Ausdrucks $P(\lambda) := a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0$ mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{K}$ und der dadurch definierten polynomialen Abbildung $P : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ ein Unterschied gemacht wird. Für manche Körper kann man das Polynom aus seiner Abbildung nicht eindeutig rekonstruieren, zum Beispiel gibt es ja überhaupt nur vier Abbildungen $\mathbb{F}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2$, aber unendlich viele Polynome. Bei $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ enthält aber die Abbildung noch die volle Information.

21.4, Seite 470: Wollen Sie vom gegenwärtigen Autor noch etwas über das Gaußsche Verfahren wissen, so darf ich Sie auf die Abschnitte 7.3 und 7.5 in K. Jänich, *Lineare Algebra*, 8. Auflage, Springer-Verlag 2000 hinweisen.

21.5, Seite 474: Auch wenn $V = \mathbb{C}^n$ ist und f deshalb schon als Matrix vorliegt, müssen wir so vorgehen, denn an dieser ursprünglichen Matrix sehen wir erst einmal gar nichts. Ein typisches Beispiel für die Nützlichkeit des Basisergänzungslemmas im linear-algebraischen Alltag.

22.1, Seite 479: Der Ausdruck *orthogonal*, der im direkten Wortsinne eigentlich nur so viel wie *rechtwinklig* bedeutet, kennzeichnet die Orthogonalprojektionen unter allen Projektionen ganz adäquat, jeder würde sich unter einer ‘rechtwinkligen Projektion’, im Unterschied zu einer schiefen oder schrägen, das Richtige vorstellen. Schon eher sollte man die Benennungen *orthogonale Matrix* und *orthogonale Transformation* bedauern, denn diese Abbildungen erhalten nicht nur die rechten Winkel, sondern sogar die Längen. Aber das ist einmal so eingeführt.

22.2, Seite 482: Oft ist damit zumindest nichts gewonnen, oft auch würde man dabei relevante geometrische Begleitumstände aus den Augen verlieren. Echte Schwierigkeiten kann man aber bekommen, wenn man viele euklidische Vektorräume gleichzeitig zu betrachten hat, zum Beispiel alle *Tangentialräume* $T_p M$ einer k -dimensionalen Fläche M im $\mathbb{R}^n$. Zwar können Sie mit Gewalt für jedes $p \in M$ eine ON-Basis $(\vec{e}_1(p), \dots, \vec{e}_k(p))$ von $T_p M$ wählen oder wenigstens sich gewählt denken, um alle Vorgänge der tangentialen orthogonalen linearen Algebra,

etwa selbstadjungierte Operatoren $S_p : T_p M \rightarrow T_p M$ wie den Weingartenoperator der Flächentheorie usw. in den $\mathbb{R}^k$ zu holen. Sobald aber Ihre Absichten etwas mit Analysis zu tun haben, sollten Sie die Auswahl dieser Hilfs-ON-Basen besser differenzierbar oder zumindest stetig in Abhängigkeit von p treffen, sonst bekommen die in den $\mathbb{R}^k$ geholten Objekte Unstetigkeiten, die sie in Wirklichkeit gar nicht haben und die nun die analytischen Methoden blockieren, die Sie gerade anwenden wollten.

Na gut, sagen Sie, denke ich mir die Basen eben stetig gewählt, oder differenzierbar nach Bedarf. Das aber ist im Allgemeinen *unmöglich*, schon bei der Kugeloberfläche $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ geht es nicht. Wenn man das ignoriert und die Fragestellung wirklich globaler Natur ist, kann das zu Fehlern führen.

22.3, Seite 497: Eine Gleichung $\Psi(\vec{x}) = 0$, wie man ja immer schreiben kann, wenn man alle Terme auf eine Seite bringt, heißt regulär, wenn an allen Punkten, an denen die Gleichung erfüllt ist, der Gradient von Ψ von Null verschieden ist. Bei den parabolischen Gleichungen ist der entsprechende Gradient wegen des linearen Terms z_t sowieso nirgends Null.

22.4, Seite 498: Wie das Skalarprodukt hier zwischen den selbstadjungierten Operatoren und den symmetrischen Bilinearformen vermittelt, ist Spezialfall eines allgemeineren Vorgangs, der sich sehr übersichtlich ohne Basen beschreiben läßt. Sei nämlich V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum und $V^* := \{\alpha : V \rightarrow \mathbb{R} \mid \alpha \text{ linear}\}$ sein Dualraum, der dann ebenfalls ein n -dimensionaler Vektorraum ist. Die bilinearen Formen $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ lassen sich auch als die linearen Abbildungen $\varphi : V \rightarrow V^*$ lesen, wir brauchen nur zum Beispiel $\beta(\vec{v}, \vec{w}) = \varphi(\vec{w})(\vec{v})$ zu verabreden. Dazu braucht man gar keine weitere Struktur auf V .

Sei nun aber als ‘weitere Struktur’ eine bestimmte *nichtentartete* Bilinearform auf V gegeben, d.h. eine Bilinearform, die in der eben beschriebenen Weise sogar einen Isomorphismus $\iota : V \cong V^*$ herstellt. Dann können wir ι natürlich benutzen, um aus linearen Abbildungen $\varphi : V \rightarrow V^*$ wieder Operatoren $f := \iota^{-1}\varphi : V \rightarrow V$ zu machen. In unserem konkreten Fall im Text ist das Skalarprodukt die nichtentartete Strukturform.

22.5, Seite 499: Der Gebrauch des Wortes *Tensor* in der Physik einerseits und der Mathematik andererseits wäre ein Kapitel für sich. Eine von beiden Seiten zugängliche Position nimmt der so genannte *Ricci-Kalkül* ein, den Sie z.B. in meinem Buch *Vektoranalysis* erläutert finden, Springer-Verlag, 4. Auflage 2003.

22.6, Seite 505: Die Fortsetzung des Zitats aus Fußnote 18.5 gehört hierher: "Andererseits läßt sich die Mathematik auch keine zusätzlichen Forderungen an den Begriff des reellen Vektorraums aufdrängen. Jedes Tripel $(V, +, \cdot)$ wie oben beschrieben, welches die Axiome erfüllt, ist ein vollgültiger reeller Vektorraum, da gibt es nichts Kleingedrucktes, wonach die Elemente von V irgendwelche Tupel sein müssten oder durch reelle Zahlen beschrieben sein müssten oder what not."

22.7, Seite 508: Schreiben wir $A_{\mathbb{R}}$ für die reelle $2n \times 2n$ -Matrix, die der komplexen $n \times n$ -Matrix A entspricht, so gilt $\det A_{\mathbb{R}} = \det A \cdot \overline{\det A}$. Für den Fall $\det A = 0$ ist das ohnehin klar, weil mit A natürlich auch $A_{\mathbb{R}}$ nicht injektiv ist. Ist aber A invertierbar, so lässt es sich durch elementare Spaltenumformungen in die Einheitsmatrix verwandeln, also $AX_1 \dots X_m = E$ für geeignete Elementarmatrizen $X_1, \dots, X_m$, wie am Ende von Kapitel 12 erklärt. Daher braucht man die Behauptung nur noch für E und die Elementarmatrizen zu prüfen, was ganz einfach ist. Ist insbesondere A unitär, so ist $\det A_{\mathbb{R}} = \det A \cdot \overline{\det A} = 1$, weil $A^\dagger A = E$ gilt.

Register

A

$A^\dagger$ 507

Abbildung 105, 113, 515

— zwischen Mengen 158

—, injektive 158

—, surjektive 159

—, bijektive 159

—, inverse 159

abelsch 393

abgeschlossene Teilmenge

$X \subset \mathbb{R}^n$ 111

abgeschlossener Halbstrahl 2

abgeschlossenes Intervall 2

abgeschlossene Menge in

einem topologischen

Raum 425

Ableitung 21

— elementarer Funktionen 31

— nach der Variablen x_i 123

—, partielle 124

—, einer Funktion längs einer

Kurve 200

Ableitungsregeln 25

— für C^k -Funktionen 28

— für Potenzreihen 32

—, mehrdimensionale 198

Abschluss einer Menge 426

Abstand 107, 415

Additionsregel 25

Additionstheoreme 15

additive Schreibweise 393

Additivität 143

affine Abbildung 192

affiner Teilraum des $\mathbb{R}^n$ 154

Aktion einer Gruppe 413

algebraische Vielfachheit 473

allgemeines Intervall 2

allgemeines Rechteck 63

allgemeiner Quader 105

ALS OB 96, 97

Alter einer Flusslinie 296

alternierend 217, 464

Amplitude 100

Anfangsbedingung 64, 310

Anstieg 23

—, vektorieller 83
 Approximation erster
 Ordnung 187
 Äquivalenzklasse 445
 Äquivalenzrelation 445
 Areafunktionen 37
 Archimedes 14
 Arcuscosinus $\arccos$ 16
 —, Nebenzweige $\arccos_k$ 16
 Arcusfunktionen 15
 Arcussinus $\arcsin$ 16
 —, Nebenzweige $\arcsin_k$ 16
 Arcustangens $\arctan$ 17
 —, Nebenzweige $\arctan_k$ 18
 Argument einer komplexen
 Zahl 534
 assoziativ 389
 äußere Punkte 425
 autonome und nichtautonome
 DGLn und Systeme
 307, 309, 311

B

$\text{Bij}(M)$ 394
 Bahn
 — einer Kurve 115
 — eines Punktes
 — in einem Fluss 292
 — unter einer Gruppen-
 aktion 413
 Bahnabbildung 413
 Balkenfunktion 287
 Basis 167, 462
 —, Entwicklung nach 167
 —, Koordinaten bezüglich
 einer 167

—, rechtshändige bzw. links-
 händige im $\mathbb{R}^n$ 246
 —, reziproke 256
 —, verallgemeinerte 543
 Basisergänzungssatz 172, 463
 Basisisomorphismus 169, 462
 beschränkte Funktion 42
 beschränkte Teilmenge
 $X \subset \mathbb{R}^n$ 109
 Besselsche Ungleichung 278
 bijektiv 159
 Bild, Bildmenge 5
 — einer Funktion 5
 — einer Matrix 152
 — einer linearen Abbildung
 156
 — eines Gruppenhomo-
 morphismus 397
 bilinear 214
 Bilinearform 231
 Bogenlänge 344

C

$C^k(M)$ 399
 Cauchy-Schwarzsche
 Ungleichung 241, 478,
 503
 charakteristische Gleichung
 93
 charakteristisches Polynom
 — eines Differential-
 operators 260
 — einer 2×2 -Matrix 320
 — einer Matrix 469
 — eines Operators 469, 470
 C^k -Funktion 22

C^∞ -Funktion 22

C^r -Funktionen in mehreren
Variablen 127

Cosinus $\cos x$ 14

Cotangens $\cot x$ 15

D

d/dx 24

$\frac{\partial^r}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}}$ 125

$d(\vec{x}, \vec{y})$ 107

Darstellung 413

definit 232

Definitionsbereich 1, 114

—, natürlicher 113

deformieren (eine Basis in eine
andere) 246

Determinante 220, 464

—, Bedeutung für Volumen-
messung 250

—, Berechnung für große
Matrizen 229, 464

—, Berechnung für kleine
Matrizen 223

—, Entwicklungsformeln 226,
464

—, Leibnizformel 222, 464

Diagonalisierbarkeit 471

— hermitescher Matrizen 510

— hermitescher

Operatoren 509

— selbstadjungierter

Operatoren 483

—, simultane 514

— symmetrischer

Matrizen 485

Diagonalmatrix 472

Diffeomorphismus 371

Differential $d\vec{f}_{\vec{x}}$ 187

Differentialgleichung

—, gewöhnliche erster

Ordnung 63

—, gewöhnliche zweiter bzw.
 n -ter Ordnung 88, 307

—, zugehöriges System er-
ster Ordnung 88,
307-309

—, gekoppelte Systeme
82

—, Vektorschreibweise 82

—, autonome 69

—, lineare erster Ordnung 79

—, inhomogene 79

—, zugehörige homogene
79

—, lineare zweiter Ordnung 91

—, inhomogene 91

—, zugehörige homogene
91

— mit konstanten Koeffi-
zienten 93

— mit getrennten Variablen
75

—, partielle 129

—, Kurzrezept 78

differenzierbare Abbildung
187

Differenzierbarkeit 21, 187

—, partielle 124

Dimension 173, 463

Dimensionsformel

— für Untervektorräume 176

— für lineare Abbildungen
178

direkte Summe 155

direktes Produkt von
 Gruppen 395
 diskrete Topologie 421
 Distributivgesetze 398
 Drehsinn beim
 Phasenportrait 336
 Drehungen 394, 481
 Dreiecksmatrix 228
 Dreiecksungleichung 111, 242,
 415
 Druckverteilung im Innern
 eines Sterns 86
 dynamische Suszeptibilität
 289
 dynamisches System 292

E

e -Ansatz 93, 319, 324
 e -Funktion 11
 Eigenwert, Eigenvektor,
 Eigenraum
 — für 2×2 -Matrizen 320
 — für Operatoren 465
 — für Matrizen 468
 —, Verfahren zur Bestimmung
 471
 Eindeutigkeitssatz 72
 —, Beweis 523
 eingeschwungene Lösung 289
 Einheitsmatrix 149
 Einheitsvektoren 143, 144, 461
 Einschränkung 5
 Einsform, 1-Form 351, 352
 — $d\vec{r}$ 355
 —, exakte 358
 —, geschlossene 361

 —, konservative 358
 —, zugehöriges Vektorfeld 356
 elementare Funktionen 18, 33
 elementare Umformungen 182
 Elementarmatrizen 237
 Ellipse 490
 Ellipsoid 490
 Entwicklung
 — nach einer Basis 167
 — nach einer ON-Basis 243,
 478, 503
 —, Entwicklungsformel 243
 Entwicklungskoeffizienten 167
 Ergänzungslemma 172, 463
 erstes Integral 317
 euklidischer Vektorraum 477
 Eulerformel 97
 Exponentialfunktion 11
 —, allgemeine 13
 —, Funktionalgleichung 11
 — $\exp_a$ zur Basis a 13

F

f_+ , f_- 60
 $f^{-1} : Y \rightarrow X$ 159
 $\mathbb{F}_2$ 402
 Familie 427
 Fermi-Funktion 39
 Fluss 292
 Flussabbildung 292
 Flussaxiome 292
 Flusslinie 292, 296
 —, injektive 295
 —, periodische 295
 —, stationäre 295
 —, Alter, Lebensdauer 296

Folge 440
 Fourierkoeffizienten einer
 Funktion 277
 Fourierpolynom 266
 —, bestapproximierendes 273
 Fourierreihe 267
 — einer Funktion 277
 Fouriertransformierte 536
 Fubini 133
 —, für Quader 133
 —, für allgemeinere Integrationsbereiche 137
 Fundamentalsatz der Algebra 407
 Fundamentalsystem 91
 Funktion 1
 —, affine 23
 —, beschränkte 42
 —, differenzierbare 21
 — einer reellen Variablen 4
 —, elementare 18,33
 —, Exponential- oder e - 11
 —, identische 9
 —, konstante 9
 —, lineare 23
 —, rationale 10
 —, reellwertige 1
 —, stetige 21
 —, trigonometrische 14
 —, vektorwertige 105
 —, Wurzel- 10
 Funktion $f(x)$ 8
 Funktionswert $f(x)$ 8

G

$GL(n, \mathbb{R})$ 394
 gedämpfte Schwingung 100
 geometrische Vielfachheit 465
 geschlitzte Ebene 365
 geschlossene Kurve 346
 geschlossene 1-Form 361
 Geschwindigkeitsvektor einer
 Kurve 193
 Geschwindigkeitsvektorfeld 297
 globale Integrierbarkeit eines
 DGL-Systems 302
 Gradient 196
 Gradientenfeld 358
 Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren 245, 478, 503
 Graph 3, 114, 515
 —, einer ebenen Kurve 115
 Gruppe 389
 Gruppenaxiome 389
 Gruppenhomo-
 morphismus 396
 Gruppenisomorphismus 397
 "gute" Integrationsbereiche
 im $\mathbb{R}^n$ 137

H

Halbraum 106
 Halbstrahl 2
 —, abgeschlossener 2
 —, offener 2
 harmonischer Oszillator 258
 — durch äußere Kraft
 angetrieben 259

Hauptachsentransformation
 — quadratischer Formen 498
 —, hermitescher 511
 — auf dem $\mathbb{R}^n$ 489
 Hauptsatz "HDI" 47
 Hauptträgheitsmomente 513
 Hausdorffraum 423
 Heine-Borel 436
 hermitesche Matrix 508
 hermitesche Sesqui-
 linearform 501
 hermitescher Operator 508
 hermitesches Skalar
 produkt 502
 Hesseform, Hessematrix 232
 Hintereinanderanwendung 5
 Homogenität 143
 Homomorphismen 160
 —, Endomorphismen 160
 —, Epimorphismen 160
 —, Isomorphismen 160
 —, Monomorphismen 160
 homöomorphe Räume 438
 Homöomorphismen 160, 438
 Hülle 151
 Hyperbel 492
 Hyperbelfunktionen 37
 Hyperboloid 491
 —, einschaliges 492
 —, zweischaliges 492

I

Imaginärteil, Im 405
 indefinit 232
 Indexmenge 427
 indizierte Indices 215

Induktionsbeweis 29
 induzierte Topologie 418
 infinitesimale Größen 202
 Inhomogenität 79, 91
 injektiv 6, 158
 innere Punkte 425
 inneres Produkt 238
 Integral 43
 —, unbestimmtes 58
 —, uneigentliches 46
 — in mehreren Variablen 132
 — von vektorwertigen Abbil-
 dungen 138
 Integraltoleranz einer
 Zange 43
 Integraltransformationen
 formel 376
 Integrationsweg 347
 Intervall 2
 —, abgeschlossenes 2
 —, allgemeines 2
 —, halboffenes 2
 —, kompaktes 2
 —, offenes 2
 invers 6, 159, 346
 inverses Element 391
 Inversionsformel für Matrizen
 227
 isoliertes lokales Maximum 39
 Isometrie 416
 isometrische Abbildung 416
 isomorph 160
 isomorphe Gruppen 398
 Isomorphismen 160, 444

J

Jacobi-Identität 255
 Jacobimatrix $J_{\vec{f}}(\vec{x})$ 187
 Jordankästchen 474

K

$\mathbb{K}$ 408
 $\overset{\circ}{K}_r(\vec{x}_0)$ 107
 kanonische Einheitsvektoren 144
 kanonische Projektion 445
 Kantenvektoren 247
 Karte 369
 Kategorie 442
 — der Mengen 444
 — der Gruppen 444
 — der Vektorräume 444
 —, lineare 444
 —, topologische 444
 Kern
 — einer Matrix 152
 — einer linearen Abbildung 156
 — eines Gruppenhomomorphismus 397
 Kettenregel 26
 —, mehrdimensionale 198
 —, Kurzformel 199
 Knickstelle 284
 Koeffizienten 10
 — einer Fourierreihe 267
 — eines Fourier- oder trigonometrischen Polynoms 266
 — eines linearen DGL-Systems 318

— eines Polynoms 10
 — (Komponenten) einer multilinearen Abbildung 215, 463
 kommutative Gruppe
 kommutatives Diagramm 171
 kompakte Intervalle 2, 432
 kompakte Teilmenge
 $X \subset \mathbb{R}^n$ 112
 kompakter topologischer Raum 426
 Kompaktheitsschluss 428
 — für lokale Flüsse 430
 komplementäre Untervektorräume 156
 komplementäre Projektion 185
 komplex eindimensionales System 335
 komplex konjugiert 406
 komplexe Multiplikation 403
 komplexe Zahlen 405
 komplexes Polynom 407
 konjugierte Standgruppen 413
 konservativ 358
 Konvergenz
 — im quadratischen Mittel 275
 — in einem topologischen Raum 440
 Konvergenzsätze für Fourierreihen 284, 286, 287
 Koordinaten bezüglich einer Basis 167
 Koordinatenabbildung 369
 Koordinatensystem 369
 Koordinatentransformation 370

Koordinatenwechsel 370
 Körper 401
 Kreisscheibe 107
 —, abgeschlossene 107
 —, offene 107
 Kreuzprodukt 252
 Kronecker-Symbol 149
 Kugel 107
 —, abgeschlossene 107
 —, offene 107
 Kugelkoordinaten 367
 Kurve 114, 343
 —, Bogenlänge längs einer 344
 —, geschlossene 346
 —, inverse 346
 — mit Einheitsgeschwindigkeit 344
 —, reguläre 344

L

Länge einer Kurve 343
 Lebensdauer 296
 Lebesgue 534
 Leibnizformel 222
 Limes 21, 518
 —, halbseitiger 21, 519
 lineare Abbildung 143, 156,
 411
 lineare Algebra 411
 lineare Hülle 151, 462
 lineare Unabhängigkeit 166,
 462
 lineares Gleichungssystem 157
 —, inhomogenes 157
 —, zugehöriges homogenes
 157

Linearfaktorzerlegung 407
 Linearisierung 338
 Linearkombination 151
 Linienelement ds 356
 Linienintegral 346
 —, infinitesimale Sicht 349
 —, Rechenformeln 348, 349
 — über eine 1-Form 352
 linksinvers 389
 Linksmultiplikation 452
 Linksnebenklasse 452
 linksneutral 389
 Lipschitz-Kasten 73
 logarithmisch geteilte
 Achse 19
 logarithmische Spirale 334
 Logarithmus 12
 —, Funktionalgleichung 12
 — $_a \log x$ zur Basis a 13
 lokal beschränkt 428
 lokal endlich 428
 lokale Lipschitz-Eigenschaft
 72
 lokaler Fluss 296
 lokales Maximum 39
 Lorentz-Gruppe 541
 Lorentz-Transformation
 164, 412
 Lösung 64
 —, allgemeine 73
 — von $y' = f(x, y)$ 64
 —, maximale 64
 Lösungskurven des Systems
 $\dot{x} = \vec{v}(x)$ 300

M

$M(n \times n, \mathbb{R})$ 399
 Matrix 145, 460
 —, Anwendung auf einen Vektor 146
 — einer Bilinearform 234
 — einer linearen Abbildung 170
 — einer quadratischen Form 234
 —, $m \times n$ - 146
 —, Spalten einer 145
 —, transponierte 224
 —, Zeilen einer 146
 Matrizenaddition 147
 Matrizeninversion 227
 — mittels elementarer Umformungen 238
 Matrizenmultiplikation 148
 Matrizenprodukt 148
 Matrizenring 399
 maximaler lokaler Fluss 296
 maximale Lösungskurve α_p 302
 Mehrfachintegral 133
 Metrik 415
 metrischer Raum 415
 metrischer Teilraum 416
 ε -Mikroskop 207
 Mittelwertsatz der Differentialrechnung 128, 529
 Morphismen 443
 multilinear 214, 463
 multiplikative Schreibweise 393

N

nach, "o" 5
 n -Bein 480
 Nebenklasse 154
 Nebenzweige der Arcusfunktionen 17
 neutral 391
 Niveaumengen 158
 n -tupel 103
 Norm 107
 — bezüglich eines Skalarprodukts 240
 — einer Funktion 270
 Normalteiler 413, 456
 nullte Ableitung 22

O

oBdA 529
 Objekte 442
 "offen in" 419
 offene Kugel, Kreisscheibe 107
 offene Menge
 — im $\mathbb{R}^n$ 110
 — in einem metrischen Raum 420
 — in einem topologischen Raum 417
 offene Überdeckung 426
 offenes Intervall 2
 offenes Kästchen 434
 Operation einer Gruppe 413
 Operator 464
 Orbit 292, 413
 orientiert (Basen im $\mathbb{R}^n$) 246
 orthogonale Abbildung 479

orthogonale Gruppe
 — $O(n)$ 481
 — $O(V)$ 482
 —, spezielle, $SO(n)$ 481
 —, spezielle, $SO(V)$ 482
 orthogonale
 — Matrix 480
 — Summe 483
 — Vektoren 240, 478, 502
 — Transformation 479
 orthogonales Komplement 244
 Orthogonalpolynome 512
 Orthogonalprojektion 245, 478,
 503
 Orthonormal- oder ON-Basis
 243, 478, 502
 Orthonormalisierungs-
 verfahren 245, 478
 Orthonormalsystem oder
 ON-System 480
 Ortsvektor 346

P

parabolisch 496
 Paraboloid 497
 Parallelepiped 247
 Parametrisierung 369
 Parsevalsche Gleichung 278
 Partialbruch-Zerlegung 59
 partielle Ableitungen 124
 —, höherer Ordnung 125
 — vektorwertiger Funktionen
 129
 partielle Differential-
 gleichungen 129
 Pauli-Matrizen 411

partielle Integration 51
 periodische Flusslinie 294
 Periode 294
 Permutation 134, 217, 530
 —, gerade 218
 Permutationsgruppe 394
 Phasenfluss 303, 307
 Phasenportrait 303, 307
 — der Pendelgleichung 338
 —, erweitertes 309
 —, von $\vec{x} = A\vec{x}$ 329ff
 Phasenebene 308
 Phasenraum 308
 Phasenverschiebung 100
 Picard-Lindelöf
 —, Satz über die einzelnen
 Lösungen 301
 —, Satz über die Lösungs-
 gesamtheit 307
 Poincaré-Bereich 365
 Poincaré-Gruppe 541
 Poincaré-Lemma 362
 Pol und Polare 533
 Polarisierung 232, 506
 Polarkoordinaten 99, 367
 Polynom 10
 —, Koeffizienten 10
 positiv definit bzw.
 semidefinit 232, 501
 Potenz 10
 —, allgemeine 12
 —, negative 10
 Potenzmenge 421
 Produkt
 — von Funktionen 4
 — von Matrizen 148
 — von topologischen
 Räumen 435

Produktregel 26
 Produkttopologie 434
 Projektion 164
 projektive Ebene 452
 punktierte Ebene 365

Q

$\mathbb{Q}$ 402
 Quader 105
 —, n -dimensionaler 105
 —, kompakter 106
 quadratische Ergänzung 495
 quadratische Form 231
 —, hermitesche 510
 quadratische Gleichung 494
 quadratisches Mittel 274
 quadratisches Polynom 494
 Quadrupel 103
 Quotient zweier Funktionen 4
 Quotient G/H von Gruppen
 453, 457
 Quotientenabbildung 445
 Quotientenmenge 445
 Quotientenraum 450
 Quotientenregel 26
 Quotiententopologie 450
 Quotientenvektorraum 457

R

$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{R}_0^-$ 2
 $\mathbb{R}^2$ 63
 $\mathbb{R}^n$ 103
 $\mathbb{R}[x]$ 399
 $\mathbb{R}(x)$ 402
 Randpunkte 426

Rang
 — einer linearen
 Abbildung 177
 — einer Matrix
 — einer quadratischen
 Form 235
 Rangbestimmung 183
 Rangsatz 179
 Raum 104
 Realteil, Re 405
 rechtshändige Basis
 im $\mathbb{R}^n$ 246
 Reellifizierung 504
 regulär 490
 reguläre Kurve 344
 Rekursionsformel 59
 Relation 445, 515
 Relativitätsprinzip 541
 Repräsentant 454
 Richtungsableitung 194
 Richtungsfeld 65
 —, eines gekoppelten Systems
 84, 312
 Riemann-integrierbar 43
 — in mehreren Variablen 131,
 135
 Riemannsches Lemma 278
 Ring 398
 — mit Eins 399
 —, kommutativer 399
 —, nullteilerfreier 399
 Ringaxiome 398
 Ringhomomorphismus 398
 Rolle, Satz von 529
 rotationsfreies Vektorfeld 361

S

$SL(n, \mathbb{R})$ 481
 $SO(3)$ 394
 $SO(n)$ 481
 S_r^{n-1} 108
 $SU(n)$ 481
 "sauberer" Sprung 285
 schiefssymmetrisch 217
 "Schutzkugel" 110, 420
 Schwerpunkt 139
 Schwingung 100
 Schwingungsdauer 265
 Schwingungsgleichung 101, 258
 —, anharmonische 316
 selbstadjungiert 482
 semidefinit 232
 semidirektes Produkt 540
 senkrecht 240
 Sesquilinearform 501
 Signatur einer quadratischen
 Form 235
 Signum $\operatorname{sgn}(\tau)$ einer
 Permutation τ 218
 singulär 490
 Sinus $\sin x$ 14
 skalare Multiplikation 408
 Skalarprodukt 239
 — eines euklidischen Raums
 477
 — von Funktionen 270
 Spalte 142
 $\operatorname{span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r)$ 151
 Spat, k -Spat 247
 spektral- 486
 Spektraldarstellung 486, 510
 Spektrum 486
 Sphäre 108

sphärische Koordinaten 367
 sphärische Polarkoordinaten
 210
 Stammfunktion 48
 Standard-Basis des $\mathbb{R}^n$ 168
 Standard-Skalarprodukt auf
 (oder in) $\mathbb{R}^n$ 239
 sternförmig 362
 Stetigkeit 21, 119, 416, 418
 Streifen 63
 stückweise C^1 345
 Substitutionsregel 54
 Substitutionsvoraussetzung 53
 —, Lockerung 56
 Summe zweier
 — Funktionen 4
 — Matrizen 147
 — Nebenklassen 154
 — Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ 153
 — Untervektorräume 152
 Supremum 520
 surjektiv 159
 Sylvesterbasis für eine quadra-
 tische Form 235
 Sylvestersche Normalform 235
 —, Berechnung mittels
 elementarer Um-
 formungen 237
 symmetrisch 217
 symmetrische Gruppe 394

T

Tangens $\tan x$ 15
 Tangente 23
 Tangentialebene an den
 Graphen 194

Teilfolge 440
 Teilraumtopologie 418
 Topologie 417
 —, diskrete 421
 — eines metrischen
 Raumes 420
 —, triviale 421
 topologischer Rand 426
 Topologischer Raum 417
 Torus 108
 — als Quotientenraum 459
 Toruskoordinaten 383
 totales Differential 188
 totale Differenzierbarkeit 188
 Trägheitsmoment 140
 Trägheitstensor 499, 513
 transformierter Operator 467
 Transformation eines
 DGL-Systems 327
 Transformationsgesetz
 — für Vektoren 372
 — für Gradienten 373
 transponierte Matrix 224
 trigonometrische
 Funktionen 14
 trigonometrisches
 Polynom 266
 trilinear 214
 Tripel 103
 triviale Topologie 421
 tupel 103

U

$U(1)$ 394
 Überdeckung 426, 433
 Umgebung 422

Umkehrformel 201
 Umkehrregel 26, 519
 Umkehrung
 — einer injektiven Funktion 6
 — einer bijektiven Abbildung
 160
 Umkehrabbildung f^{-1} 159
 unbestimmtes Integral 58
 unendlichdimensional 463
 unitäre Abbildung 506
 unitäre Gruppe 506, 507
 unitärer Vektorraum 502
 unitäre Transformation 506
 Untergruppe 395
 Untervektorraum
 — des $\mathbb{R}^n$ 150
 — eines $\mathbb{K}$ -Vektorraums 409
 Urbild 122

V

$\text{Vol}(Q) = \text{Vol}^n(Q)$ 131
 $V_{\mathbb{R}}$ 476
 Variation der Konstanten 81,
 526
 Vektorfeld 117
 —, konservatives 358
 —, rotationsfreies 361
 —, zugehörige Einsform 356
 Vektorprodukt 252
 Vektorraum 408
 —, reeller bzw. komplexer 409
 Verkettung 5
 — zweier Funktionen 5
 Vielfachheit 407
 —, geometrische von Eigen-
 werten 465

—, algebraische von Eigen-
werten 473
 Vollständigkeit 520
 Volumen 130
 — eines Quaders 130
 —, Gebrauch des Wortes 141
 —, k -dimensionales eines
 k -Spats 248
 —, orientiertes Spat- 249
 Volumenänderungsfaktor 251
 Volumenelement 380
 — der 3-Sphäre im $\mathbb{R}^4$ 384
 — einer k -dimensionalen
 Fläche 381
 “Vorratsvektoren” 172

W

Wärmeleitungsgleichung 129
 Winkel bezüglich eines
 Skalarprodukts 242
 wohldefiniert 455, 543
 Wurzelfunktionen 10

Z

Zahlengerade $\mathbb{R}$
 Zange 42, 131
 —, Funktion in einer 43, 131
 —, Integraltoleranz 43, 131
 —, Untersumme, Obersumme
 43, 131
 Zeile 142
 Zerlegung einer Menge
 293, 445
 Zuordnung 1
 zusammenhängende
 offene Teilmenge
 des $\mathbb{R}^n$ 359
 Zusammenstückung von
 Kurven 345
 Zylinder 108
 Zylinderkoordinaten 210, 367