A1 L^p-Räume und Faltungsintegrale

Zur Behandlung von linearen partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten im Ganzraum $\mathbb{R}^n$ wird häufig die Theorie der Fourier-Transformation, s. A2, und die Darstellung der Lösung durch Faltungsintegrale benutzt. Für eine moderne Darstellung und die Analysis von Integralen über dem $\mathbb{R}^n$ ist es sinnvoll, das Lebesgue-Integral dem Riemann-Integral vorzuziehen. Der Abschnitt A1 liefert jedoch keine mathematisch präzise Abhandlung des Lebesgue-Integrals und des dafür benötigten Lebesgue-Maßes, sondern stellt nach einer kurzen Einführung die wichtigsten Eigenschaften des Lebesgue-Integrals zusammen. Anschließend werden Faltungsintegrale und in A2 die Fourier-Transformation definiert und z.T. streng analysiert.

Das Lebesgue-Maß μ auf dem $\mathbb{R}^n$ ist eine abzählbar-unendlich additive, nichtnegative *Volumenfunktion*, die auf einem großen System von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, auf der sog. *Lebesgue'schen σ-Algebra* $\mathcal{L}$, definiert ist. Präziser formuliert gilt

(i) $\emptyset \in \mathcal{L}$ und $\mu(\emptyset) = 0$, $\mathbb{R}^n \in \mathcal{L}$ und $\mu(\mathbb{R}^n) = +\infty$.

(ii) $A \in \mathcal{L} \Rightarrow A^c \in \mathcal{L}$.

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{L} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{L}$.
Es gilt sogar: Aus $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$ folgt $\mu\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

(iv) $A = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \in \mathcal{L}$ und $\mu(A) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$.

Die Teilmengen $A \in \mathcal{L}$ heißen auch *Lebesgue-messbar*. Insbesondere sind alle offenen, alle abgeschlossenen und auch alle Jordan-messbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die bei der Definition des n-dimensionalen Riemann-Integrals benötigt werden, Lebesgue-messbar. Für Jordan-messbare Mengen stimmen Jordan-Inhalt und Lebesgue-Maß überein.

Bemerkung A1.1 Eine Sonderrolle spielen die *Lebesgue-Nullmengen*, also die Mengen $N \in \mathcal{L}$ mit $\mu(N) = 0$. Nullmengen haben die folgenden Eigenschaften:

(i) $N_1, N_2, \ldots \in \mathcal{L}$ Lebesgue-Nullmengen $\Rightarrow \mu\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i\big) = 0$

(ii) $N \in \mathcal{L}$ Lebesgue-Nullmenge $\Rightarrow$
jede Menge $M \subset N$ ist Lebesgue-Nullmenge.

(iii) $M \in \mathcal{L}$ und $N \in \mathcal{L}$ Lebesgue-Nullmenge $\Rightarrow$
$M \cup N,\ \ M \backslash N \in \mathcal{L},\ \ \mu(M \cup N) = \mu(M \backslash N) = \mu(M) = 0.$

Insbesondere ist jede endliche und jede abzählbar unendliche Menge wie z.B. $\mathbb{Q}^n$ eine Nullmenge; es gibt jedoch auch überabzählbare Lebesgue-Nullmengen.

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *(Lebesgue)-messbar*, falls

$$f^{-1}\big((-\infty, \alpha)\big) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \alpha\}$$

für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar ist, d.h. $f^{-1}\big((-\infty,\alpha)\big) \in \mathcal{L}$. Durch ein Approximationsargument mit Hilfe von Treppenfunktionen, die auf Lebesgue-messbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ konstant sind, kann jetzt jeder nicht-negativen Lebesgue-messbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ das Lebesgue-Integral

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \in [0,\infty]$$

zugeordnet werden. Für eine beliebige Lebesgue-messbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ benutzt man die Zerlegung $f = f_+ - f_-$ mit

$$f_+ = \max(f,0) = \frac{1}{2}(|f| + f), \quad f_- = \max(-f,0) = \frac{1}{2}(|f| - f)\,.$$

Gilt dann $\int_{\mathbb{R}^n} f_+(x)dx < \infty$ und $\int_{\mathbb{R}^n} f_-(x)dx < \infty$, definiert die reelle Zahl

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx := \int_{\mathbb{R}^n} f_+(x)dx - \int_{\mathbb{R}^n} f_-(x)dx$$

das *Lebesgue-Integral von* f auf $\mathbb{R}^n$. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte oder unbeschränkte Lebesgue-messbare Menge und ist $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben, werden die obigen Definitionen auf f ausgedehnt, indem man die Fortsetzung

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \notin \Omega \end{cases}$$

betrachtet. Insbesondere wird dann das Lebesgue-Integral $\int_\Omega f(x)dx$ durch $\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)dx$ definiert.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, Jordan-messbare Menge und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist f auch Lebesgue-integrierbar und das Riemann-Integral von f über Ω und das Lebesgue-Integral von f über Ω stimmen überein. Das Lebesgue-Integral stellt jedoch eine echte, weit reichende Erweiterung des Riemann-Integrals dar. Ein elementares Beispiel ist die Funktion

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$$

die bekanntlich auf keinem beschränkten Intervall $[a,b]$, $a < b$, Riemann-integrierbar ist. Dagegen ist f Lebesgue-integrierbar, und mit Bemerkung A1.1 kann man

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \quad \text{für alle } -\infty \le a < b \le +\infty$$

zeigen. Ferner darf eine Lebesgue-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf jeder Lebesgue-Nullmenge beliebig abgeändert werden, ohne dass sich der Wert des Integrals ändert. Genauer gilt:

Bemerkung A1.2 Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar, und ist $N \in \mathcal{L}$ eine Lebesgue-Nullmenge, so ist jede Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$g(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n \backslash N,$$

kurz: $g = f$ *fast überall* oder $g = f$ *f.ü.*, ebenfalls Lebesgue-integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx\,.$$

Bemerkung A1.3 Wie das Riemann-Integral besitzt das Lebesgue-Integral die folgenden elementaren Eigenschaften (für Lebesgue-integrierbare Funktionen $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ auf einer Lebesgue-messbaren Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$):

(i) $\int_\Omega \big(af(x) + bg(x)\big)dx = a\int_\Omega f(x)dx + b\int_\Omega g(x)dx, \quad a, b \in \mathbb{R}.$

(ii) $f \geq 0$ f.ü. $\Rightarrow \quad \int_\Omega f(x)dx \geq 0.$

(iii) $|\int_\Omega f(x)dx| \leq \int_\Omega |f(x)|dx\,.$

Ferner gilt für das Lebesgue-Integral messbarer Funktionen:

(iv) $\int_\Omega |f(x)|dx = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0$ f.ü.

(v) f Lebesgue-integrierbar $\Longleftrightarrow$ $|f|$ Lebesgue-integrierbar

Definition A1.4 Für $1 \leq p < \infty$ wird der Lebesgue-Raum $L^p(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\begin{aligned} L^p(\mathbb{R}^n) \;\; = \;\; & \Big\{u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{Lebesgue-messbar,} \\ & \quad \|u\|_p := \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p\,dx\Big)^{1/p} < \infty\Big\} \end{aligned}$$

definiert. Analog wird für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und für komplex-wertige Funktionen $u : \Omega \to \mathbb{C}$ der Raum $L^p(\Omega)$ mit L^p-Norm $\|u\|_{p,\Omega} = \big(\int_\Omega |u(x)|^p\,dx\big)^{1/p}$ definiert.

Eine Funktion $u \in L^1(\Omega)$ heißt *absolut-integrierbar*, eine Funktion $u \in L^2(\Omega)$ auch *quadrat-integrierbar*.

Damit die fundamentale Norm-Eigenschaft $\|u\|_p = 0 \Rightarrow u = 0$ erfüllt ist, muss nach Bemerkung A1.3 die Definition A1.4 leicht abgeändert werden. Statt der Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ betrachtet man im Raum $L^p(\Omega)$ die Äquivalenzklasse

$$[u] = \{v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ Lebesgue-messbar, } v = u \text{ f.ü.}\}$$

von Funktionen v, die mit u f.ü. übereinstimmen und folglich $\|v\|_p = \|u\|_p$ sowie $\|u - v\|_p = 0$ erfüllen. Präziser formuliert ist

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) \;\; = \;\; & \Big\{[u] : \text{ es gibt einen Lebesgue-messbaren Repräsentanten} \\ & \quad v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ in } [u] \text{ mit } \|[u]\|_p := \|v\|_p = \Big(\int_\Omega |v(x)|^p dx\Big)^{1/p} < \infty\Big\}\,. \end{aligned}$$

Streng genommen ist $L^p(\Omega)$ also kein Raum von Funktionen, sondern eine Menge von Äquivalenzklassen; je zwei Repräsentanten in einer Äquivalenzklasse stimmen f.ü. überein. Mit dieser Definition gilt:

$$\|[u]\|_p = 0 \;\Rightarrow\; \|v\|_p = 0 \quad \forall v \in [u] \;\Rightarrow\; v = 0 \text{ f.ü. } \forall v \in [u]\,.$$

Obwohl wir im Folgenden die Unterschiede zwischen einer Funktion u und ihrer Äquivalenzklasse $[u]$ nicht streng beachten wollen, ist zu betonen, dass *nicht von einzelnen Funktionsauswertungen* $u(x)$ einer „Funktion“ $u \in L^p(\Omega)$ gesprochen werden darf: u ist nur f.ü. eindeutig definiert

Definition A1.5 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, und sei $p = \infty$. Dann definiert man den Raum $L^\infty(\Omega)$ der *wesentlich beschränkten Funktionen* auf Ω durch

$$\begin{aligned} L^\infty(\Omega) \;&=\; \Big\{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ (oder } \mathbb{C}) :\; u \text{ ist Lebesgue-messbar,} \\ &\qquad \|u\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |u| < \infty\Big\}\,. \end{aligned}$$

Dabei ist das *essentielle Supremum*

$$\|u\|_\infty = \inf\{K \geq 0 :\; |u(x)| \leq K \quad \text{f.ü. in } \Omega\}\,.$$

Wie auch im Fall $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, wird $L^\infty(\Omega)$ streng genommen nicht als Funktionenraum definiert, sondern als Menge von Äquivalenzklassen $[u]$, so dass zwei Elemente $v_1, v_2 \in [u]$ f.ü. übereinstimmen. Dann gilt

$$\|[u]\|_\infty = 0 \;\Rightarrow\; \|v\|_\infty = 0 \quad \forall v \in [u] \;\Rightarrow\; v = 0 \text{ f.ü. } \forall v \in [u]\,.$$

Satz A1.6 *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ein Gebiet und* $1 \leq p \leq \infty$. *Dann ist* $L^p(\Omega)$ *ein vollständiger, normierter Raum, d.h., es gelten die folgenden Eigenschaften:*

(i) $\|u\|_p \geq 0$ *und* $\|u\|_p = 0 \iff u = 0$,

(ii) $\|\lambda u\|_p = |\lambda|\, \|u\|_p$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(bzw.* $\lambda \in \mathbb{C}$*)*,

(iii) $\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$

sowie

(iv) *Ist* $(u_k) \subset L^p(\Omega)$ *eine Cauchy-Folge, gibt es ein Element* $u \in L^p(\Omega)$ *mit* $u_k \to u$ *in* $L^p(\Omega)$ *für* $k \to \infty$, *d.h.*

$$\|u - u_k\|_p \to 0 \quad \text{für } k \to \infty\,.$$

Zusätzlich gibt es eine Teilfolge (!) (u_{k_j}) *von* (u_k), *so dass*

$$u_{k_j} \to u \text{ punktweise f.ü. für } j \to \infty\,.$$

(v) *Für $1 \leq p < \infty$ liegt die Menge der Funktionen*

$$C_0^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{supp} f \text{ kompakt in } \Omega\}$$

dicht in $L^p(\Omega)$, d.h., zu jedem $f \in L^p(\Omega)$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$\|f - f_\varepsilon\|_{p,\Omega} < \varepsilon\,.$$

Diese Aussage ist für $p = \infty$ nicht gültig!

(vi) *Für $1 \leq p < \infty$ gilt in $L^p(\mathbb{R}^n)$ die folgende* Stetigkeit im L^p-Mittel*:*

$$\|f - f(\cdot - h)\|_p \to 0 \quad \text{für } h \to 0\,,$$

wobei $f(\cdot - h)$ die Funktion $x \mapsto f(x-h)$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Diese Aussage ist für $p = \infty$ nicht gültig!

Beweis Die Norm-Eigenschaften (i) – (iii) sind in den Fällen $p = 1$ und $p = \infty$ trivial. Die Dreiecksungleichung (iii) beruht für $1 < p < \infty$ auf der Hölder-Ungleichung, s. Satz A1.7. Zum Beweis der Aussagen (iv) (*Satz von Riesz-Fischer*) und (v), (vi) wird auf die Lehrbuch-Literatur zur Maßtheorie und zur Funktionalanalysis verwiesen.

Satz A1.7 (Hölder-Ungleichung) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $1 \leq p \leq \infty$ und $p' = \frac{p}{p-1}$, also*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1;$$

für $p = 1$ sei $p' = \infty$, für $p = \infty$ sei $p' = 1$. Dann gilt für $u \in L^p(\Omega)$ und $v \in L^{p'}(\Omega)$

$$u \cdot v \in L^1(\Omega) \quad \text{und} \quad \boxed{\|uv\|_1 \leq \|u\|_p\,\|v\|_{p'}\,.}$$

Für $p = p' = 2$ erhält man die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\int_\Omega |uv|dx \leq \Big(\int_\Omega |u|^2 dx\Big)^{1/2} \Big(\int_\Omega |v|^2 dx\Big)^{1/2}.$$

Beweis Der Beweis ist in den Fällen $p = 1$ und $p = \infty$ trivial; für beliebiges $p \in (1,\infty)$ benutzt man dagegen die *Youngsche Ungleichung*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'} \quad \text{für } a, b \geq 0\,. \qquad \blacksquare$$

Ein entscheidender Vorteil des Lebesgue-Integrals gegenüber dem Riemann-Integral ist ein Konvergenzsatz, der die Vertauschung von Integration und Grenzwertbildung bei Funktionenfolgen unter relativ schwachen Voraussetzungen erlaubt. In der Theorie des Riemann-Integrals wird an dieser Stelle üblicherweise gleichmäßige Konvergenz gefordert.

Satz A1.8 (Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz) *Sei $(u_k) \subset L^1(\Omega)$ eine Folge integrierbarer Funktionen auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, die f.ü. gegen eine Funktion u konvergiere. Ferner existiere eine „Majorante“ $g \in L^1(\Omega)$ mit*

$$|u_k(x)| \leq g(x)| \quad \textit{f.ü. in } \Omega \quad \textit{für alle } k \in \mathbb{N}\,.$$

Dann ist auch $u \in L^1(\Omega)$, und es gilt für $k \to \infty$

$$\int_\Omega u_k\,dx \to \int_\Omega u\,dx\,,$$

$$\int_\Omega |u_k - u|dx = \|u_k - u\|_1 \to 0\,.$$

In Satz A1.8 ist die Grenzfunktion $u(x) = \lim_{k\to\infty} u_k(x)$ nur f.ü. in Ω definiert, also für $x \in \Omega\backslash N$, $\mu(N) = 0$. Da aber Elemente in $L^1(\Omega)$ nur f.ü. eindeutig definiert sein müssen, ist die Aussage $u \in L^1(\Omega)$ sinnvoll. Entscheidende Voraussetzung in Satz A1.8, der hier nicht bewiesen werden soll, ist die Existenz einer von $k \in \mathbb{N}$ unabhängigen Majorante $g \in L^1(\Omega)$.

Satz A1.9 *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für ein $1 \leq p \leq \infty$. Dann existiert punktweise für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ das* Faltungsintegral

$$\boxed{(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy\,.}$$

Ferner gilt $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und

$$\boxed{\|f * g\|_p \leq \|f\|_1\,\|g\|_p\,.}$$

Beweis Ohne Beweis benutzen wir, dass $f * g$ Lebesgue-messbar ist, sowie eine Version des Satzes von Fubini für Lebesgue-Integrale. Zur Herleitung der Abschätzung von $\|f * g\|_p$ verwenden wir im Fall $p \in (1,\infty)$ die Hölder-Ungleichung (Satz A1.7) und erhalten

$$\begin{aligned}\Big|\int f(x-y)\,g(y)\,dy\Big| &\leq \int \underbrace{|f(x-y)|^{1-1/p}}_{p'=\frac{p}{p-1}}\,\underbrace{|f(x-y)|^{1/p}\,|g(y)|}_{p}\,dy\\ &\leq \Big(\int |f(x-y)|dy\Big)^{1/p'}\Big(\int |f(x-y)|\,|g(y)|^p\,dy\Big)^{1/p}.\end{aligned}$$

Dabei gilt $\int |f(x-y)|dy = \int |f(z)|dz = \|f\|_1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Jetzt folgt mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \|f*g\|_p^p &= \int \Big| \int f(x-y)\, g(y) dy \Big|^p dx \\ &\leq \int \Big(\|f\|_1^{p/p'} \int |f(x-y)|\, |g(y)|^p\, dy \Big) dx \\ &= \|f\|_1^{p/p'} \int |g(y)|^p \Big(\int |f(x-y)| dx \Big) dy \\ &= \|f\|_1^p\, \|g\|_p^p , \end{aligned}$$

da $\frac{p}{p'} + 1 = p$. Aus der Aussage $\|f*g\|_p < \infty$ kann man schließen, dass punktweise f.ü. $(f*g)(x)$ wohldefiniert ist. In den Fällen $p = 1$ und $p = \infty$ ist die Abschätzung $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1\, \|g\|_p$ trivial. ■

Bemerkung A1.10 Das in Satz A1.9 definierte Faltungsprodukt $*$ hat die folgenden Eigenschaften:

(i) $f * g = g * f$ (Kommutativität) für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, d.h., für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\, f(y)\, dy = g * f(x)\,.$$

(ii) $(f*g)*h = f*(g*h)$ (Assoziativität), falls zwei der Funktionen f, g, h in $L^1(\mathbb{R}^n)$ und eine in $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, liegen.

(iii) $f*(g+h) = f*g + f*h$, $(\alpha f)*g = f*(\alpha g) = \alpha(f*g)$ (Distributivität), falls $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g, h \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, (oder umgekehrt) und $\alpha \in \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$).

Die Beweise beruhen auf dem Satz von Fubini und der Substitutionsregel auf $L^1(\mathbb{R}^n)$.

A2 Die Fourier-Transformation

A2.1 Die Fourier-Transformation in $L^1(\mathbb{R}^n)$

Definition A2.1 Für eine Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ wird die *Fourier-Transformierte* $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ punktweise durch

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi}\, dx$$

definiert; dabei bezeichnet $x \cdot \xi = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$ das Skalarprodukt für Vektoren $x, \xi \in \mathbb{R}^n$. Analog ist die *Fourier-Rücktransformation* $\mathcal{F}^{-1}$ für eine Funktion

$h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ durch

$$\check{h}(x) = \mathcal{F}^{-1}(h)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) e^{+i\xi\cdot x}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} h(\xi) e^{+i\xi\cdot x} đ\xi$$

mit

$$đ\xi = \frac{1}{(2\pi)^n}\, d\xi$$

definiert. Man beachte, dass in beiden Fällen der Integrand wegen $|e^{\pm ix\cdot\xi}| = 1$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt und das L^1-Integral für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ bzw. für jedes $\xi \in \mathbb{R}^n$ definiert ist.

Satz A2.2 *Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}$ hat die folgenden Eigenschaften:*

(1) *Für jede Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $\hat{f}(\xi)$ stetig, und es gilt*

$$\hat{f}(\xi) \to 0 \quad \textit{für } |\xi| \to \infty\,.$$

(2) *Gilt neben $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sogar $|x|\, f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist $\hat{f}$ stetig partiell differenzierbar, und es gilt*

$$\boxed{\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}(\xi) = -\widehat{ix_j f}(\xi), \quad 1 \le j \le n\,.}$$

(3) *Gilt $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$ und $\nabla f \in L^1(\mathbb{R}^n)^n$, so ist*

$$\boxed{\widehat{\partial_j f}(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi), \quad 1 \le j \le n\,.}$$

Analoge Aussagen gelten für die Fourier-Rücktransformation.

Beweis

(1) Zum Beweis der Stetigkeit in $\xi \in \mathbb{R}^n$ betrachte man eine Folge $(\xi_k) \subset \mathbb{R}^n$ mit $\xi_k \to \xi$ für $k \to \infty$. Dann gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x)e^{-i\xi_k x} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x)e^{-i\xi\cdot x} \quad \text{und} \quad |f(x)e^{-i\xi_k\cdot x}| \le |f(x)|\,,$$

$|f|$ ist also eine L^1-Majorante für die Folge $\big(f(x)e^{-i\xi_k\cdot x}\big)_{k\in\mathbb{N}}$. Dann liefert der Satz von Lebesgue (Satz A1.8) die Konvergenz $\hat{f}(\xi_k) \to f(\xi)$, $k \to \infty$, also die Stetigkeit von $\hat{f}$ in ξ.

Wegen $e^{-\pi i} = -1$ gilt

$$\hat{f}(\xi) = -\int f(x)e^{-i\xi\cdot(x+\pi\xi/|\xi|^2)}dx = -\int f(x - \pi\xi/|\xi|^2)e^{-i\xi\cdot x}\, dx\,.$$

Daraus folgt mit Satz A1.6 (vi)

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi)| &= \Big|\frac{1}{2}\int \big(f(x) - f(x - \pi\xi/|\xi|^2)\big)e^{-i\xi\cdot x}\,dx\Big| \\ &\leq \frac{1}{2}\big\|f - f(\cdot - \pi\xi/|\xi|^2)\big\|_1 \\ &\to 0 \end{aligned}$$

für $|\xi| \to \infty$.

(2) Mit dem j-ten Einheitsvektor $e_j \in \mathbb{R}^n$ gilt für $0 \neq h \to 0$

$$\frac{1}{h}(e^{-i(\xi+he_j)\cdot x} - e^{-i\xi\cdot x}) \to -ix_j e^{-i\xi\cdot x}$$

sowie

$$\Big|\frac{1}{h}(e^{-i(\xi+he_j)\cdot x} - e^{-i\xi\cdot x})\Big| = \Big|\frac{1}{h}(e^{-ihx_j} - 1)\Big| \leq |x_j|\,,$$

da man $e^{-ihx_j} - 1$ als $\int_0^h \frac{d}{dt}(e^{-itx_j})dt = ix_j\int_0^h e^{-itx_j}\,dt$ schreiben kann. Also ist $|x|\,f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ eine zulässige Majorante im Differenzenquotienten

$$\int \frac{1}{h}\big(e^{-i(\xi+he_j)\cdot x} - e^{-i\xi\cdot x}\big)\,f(x)\,dx\,,$$

und der Satz von Lebesgue beweist die Konvergenz dieses Ausdrucks gegen $\widehat{-ix_j f}(\xi)$. Da nach (i) $\widehat{x_j f}$ in ξ stetig ist, ist $\hat{f}$ sogar stetig partiell differenzierbar.

(3) Da $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n)$, gibt es wegen

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx = \int_0^\infty \Big(\int_{\partial B_R} |f(y)|\,do_y\,dR < \infty$$

eine Folge $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Radien mit $R_k \to \infty$ und

$$\int_{\partial B_{R_k}} |f(y)|\,do_y \to 0 \quad \text{für } k \to \infty\,.$$

Ferner gilt mit dem Satz von Lebesgue und partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j f(x)e^{-ix\cdot\xi}\,dx &= \lim_{k\to\infty}\int_{B_{R_k}} \partial_j f(x)e^{-ix\cdot\xi}\,dx \\ &= \lim_{k\to\infty}\int_{B_{R_k}} f(x)\,i\xi_j e^{-ix\cdot\xi}\,dx \\ &\quad + \lim_{k\to\infty}\int_{\partial B_{R_k}} f(y)e^{-iy\cdot\xi}\,\frac{y_j}{R_k}\,do_y \\ &= i\xi_j\hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

für jedes $j \in \{1,\ldots,n\}$. ■

Beispiel A2.3 *Im* $\mathbb{R}^1$ *besitzt* $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ *die Fourier-Transformierte* $\hat{h}(\xi) = e^{-\xi^2/2}$.

Beweis Nach Satz A2.2(2) ist $\hat{h}(\xi)$ stetig differenzierbar mit

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi}\,\hat{h}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} -ixe^{-ix\xi} e^{-x^2/2}\,dx \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\,\frac{d}{dx}\big(e^{-x^2/2}\big)\,dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \xi e^{-ix\xi}\,e^{-x^2/2}\,dx\,,\end{aligned}$$

wobei die partielle Integration im letzten Schritt durch ein Limes-Argument gerechtfertigt werden muss. Es gilt also

$$\frac{d}{d\xi}\,\hat{h}(\xi) = -\xi\hat{h}(\xi)$$

sowie

$$\hat{h}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\,dx = 1\,.$$

Folglich stimmt $\hat{h}(\xi)$ mit der eindeutig bestimmten Lösung $e^{-\xi^2/2}$ der gewöhnlichen Differentialgleichung $u' = -\xi u$, $u(0) = 1$ überein. ■

Das Beispiel A2.3 liefert eine Funktion $h \in L^1(\mathbb{R})$ mit den Eigenschaften $\mathcal{F}(h) = \sqrt{2\pi}\,h$ und folglich

$$\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}(h) = h\,.$$

Die Aussage $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = id$ kann aber nicht für alle Funktionen $h \in L^1(\mathbb{R})$ oder $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ gelten, da für $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ i.a. $\hat{h}$ nicht in $L^1(\mathbb{R}^n)$ liegt. Zur Vorbereitung des Fourier'schen Umkehrsatzes A2.6 beweisen wir zuerst einen wichtigen Zusammenhang zwischen Faltungsintegralen und der Fourier-Transformation.

Satz A2.4 *Für alle* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *gilt*

$$\boxed{\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}\,.}$$

Beweis Mit Hilfe des Satzes von Fubini auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ folgt

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(\xi) &= \int e^{-ix\cdot\xi}\Big(\int f(x-y)\,g(y)\,dy\Big)\,dx \\ &= \int e^{-iy\cdot\xi}\,g(y)\Big(\int e^{-i(x-y)\cdot\xi}\,f(x-y)\,dx\Big)\,dy \\ &= \Big(\int e^{-iy\cdot\xi}\,g(y)\,dy\Big)\,\hat{f}(\xi) \\ &= \hat{f}(\xi)\cdot\hat{g}(\xi)\,.\end{aligned}$$

■

Lemma A2.5 *Es seien* $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$, $h_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} h\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)$ *für* $\varepsilon > 0$ *und*

$$H(\xi) := \hat{h}(\xi) = e^{-\xi^2/2}\,.$$

(i) *Für* $\varepsilon > 0$ *gilt* $H(\varepsilon\xi) = \widehat{h_\varepsilon}(\xi)$ *und* $h_\varepsilon = \mathcal{F}^{-1}\big(H(\varepsilon\cdot)\big)$.

(ii) *Für jede Funktion* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *gilt*

$$f * h_\varepsilon(x) = \int H(\varepsilon\xi)\, \hat{f}(\xi)\, e^{ix\xi}\, đ\xi$$

(iii) *Für jede Funktion* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *gilt*

$$f * h_\varepsilon \to f \quad \textit{in } L^1(\mathbb{R}) \textit{ für } \varepsilon \to 0+\ .$$

Beweis

(i) folgt mit Beispiel A2.3 und der Substitutionsregel.

(ii) Mit dem Satz von Fubini und (i) liefert die Gleichungskette

$$\begin{aligned} f * h_\varepsilon(x) &= \int f(x-y)\Big(\frac{1}{2\pi}\int H(\varepsilon\xi) e^{i\xi y}\, d\xi\Big)\, dy \\ &= \int H(\varepsilon\xi)\,\Big(\frac{1}{2\pi}\int f(x-y)\, e^{-i\xi(x-y)}\, dy\Big)\, e^{i\xi x}\, d\xi \end{aligned}$$

die Behauptung. Man beachte $đ\xi = \frac{1}{2\pi}\, d\xi$.

(iii) Da $\int h_\varepsilon(y) dy = \int h(y) dy = 1$ für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, ist für fast alle $x \in \mathbb{R}$

$$\int f(x-y)\, h_\varepsilon(y)\, dy - f(x) = \int \big(f(x-y) - f(x)\big)\, h_\varepsilon(y)\, dy\,.$$

Mit dem Satz von Fubini folgert man bei beliebigem $\delta > 0$ die L^1-Abschätzung

$$\begin{aligned} &\int \Big| \int f(x-y)\, h_\varepsilon(y) dy - f(x)\Big|\, dx \\ &\quad \le \int \Big(\int |f(x-y) - f(x)|\, dx\Big)\, h_\varepsilon(y)\, dy \\ &\quad \le \int_{|y|<\delta} \|f(\cdot - y) - f\|_1\, h_\varepsilon(y)\, dy + 2\|f\|_1 \int_{|y|>\delta} h_\varepsilon(y)\, dy\,. \end{aligned}$$

Zu beliebigem $\eta > 0$ gibt es nach Satz A1.6 (v) ein $\delta > 0$ mit $\|f(\cdot - y) - f\|_1 < \frac{\eta}{2}$ für alle $|y| < \delta$. Für ein derart bestimmtes $\delta > 0$ gilt

$$\int_{|y|>\delta} h_\varepsilon(y)\, dy = \frac{1}{sqrt2\pi} \int_{|z|>\delta/\varepsilon} e^{-z^2/2}\, dz < \frac{\eta/2}{2\|f\|_1 + 1}$$

für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_{\eta,f}$. Fasst man die bisherigen Abschätzungen zusammen, erhält man

$$\|f * h_\varepsilon - f\|_1 < \eta$$

für $0 < \varepsilon < \varepsilon_{\eta,f}$. ■

Satz A2.6 (Fourierscher Umkehrsatz) *Sind $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, gilt*

$$\mathcal{F}^{-1}\hat{f} = f \quad \text{f.ü.}$$

Beweis Im Beweis sei $n = 1$; der allgemeine Fall $n \geq 1$ folgt mit einer Verallgemeinerung von Lemma A2.5 für $n \geq 1$. Mit Lemma A2.5(ii) und dem Satz von Lebesgue gilt die punktweise Konvergenz

$$f * h_\varepsilon(x) = \int H(\varepsilon\xi)\,\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,đ\xi \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} \int \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,đ\xi\,,$$

da $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, $H(\varepsilon\xi) \to 1$ für $\varepsilon \to 0+$ und $|H(\varepsilon\xi)| \leq 1$.

Zudem konvergiert $f * h_\varepsilon(x)$ in $L^1(\mathbb{R})$ gegen f für $\varepsilon \to 0+$. Diese Aussage wird in Satz 5.19 zur Wärmeleitungsgleichung mit Anfangswerten in $L^1(\mathbb{R}^n)$ detailliert bewiesen, denn h_ε stimmt mit dem eindimensionalen Wärmeleitungskern E_t für $t = \varepsilon^2$ (und $k = \frac{1}{2}$) überein; der Beweis von Satz 5.19 benutzt selbstverständlich nicht Satz A2.6. Jetzt folgt nach dem Satz von Riesz-Fischer (Satz A1.6(vi)) $f * h_{\varepsilon_j}(x) \to f(x)$ f.ü. punktweise für eine Folge (ε_j) mit $\varepsilon_j \to 0$ gilt. Also stimmt f f.ü. mit $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})$ überein. ■

Korollar A2.7 *Stimmen für Funktionen $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ die Fourier-Transformierten $\hat{f}$ und $\hat{g}$ f.ü. überein, gilt $f = g$ (f.ü.).*

Beweis Die Funktion $u = f - g$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz A2.6. Daraus folgt $u = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}) = \mathcal{F}^{-1}(0) = 0$ f.ü. ■

A2.2 Die Fourier-Transformation in $L^2(\mathbb{R}^n)$

Die Fourier-Transformation von $L^1(\mathbb{R}^n)$ läßt sich über ein Dichtheitsargument auf $L^2(\mathbb{R}^n)$-Funktionen ausdehnen. Auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ besitzt die wieder mit $\mathcal{F}$ bezeichnete Fourier-Transformation besonders schöne Eigenschaften, denn sie ist dort ein isometrischer Isomorphismus, d.h. $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ ist bijektiv, und es gilt $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$ für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Zur Vorbereitung dieses wichtigen Satzes beweisen wir diese Isometrie-Eigenschaft zuerst für die in $L^2(\mathbb{R}^n)$ dichte Teilmenge der C_0^∞-Funktionen.

Satz A2.8 *Für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ sowie*

$$\boxed{\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2\,,}$$

wenn für die L^2-Norm im Fourierraum $đ\xi = (2\pi)^{-n}d\xi$ benutzt wird; d.h.

$$\|\hat{f}\|_2^2 := \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \, đ\xi \, .$$

Beweis Der Einfachheit halber führen wir den Beweis nur für $n = 1$. Nach Satz A2.2 gelten $\widehat{f^{(k)}}(\xi) = (i\xi)^k \hat{f}(\xi)$ und $\widehat{f^{(k)}}(\xi) \to 0$ für $|\xi| \to \infty$ und für jedes $k \in \mathbb{N}$. Deshalb klingt $\hat{f}(\xi)$ schneller als jede Potenz $\frac{1}{|\xi|^k}$, $k \in \mathbb{N}$, ab; insbesondere liegt $\hat{f}$ im Raum $L^2(\mathbb{R})$.

Neben f betrachtet man noch die Funktion $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$, für die man sofort $\hat{\tilde{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$ und folglich mit Satz A2.4

$$|\hat{f}(\xi)|^2 = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{\tilde{f}}(\xi) = \mathcal{F}(f * \tilde{f})(\xi)$$

nachweist. Wir werden deshalb die Funktion $g := f * \tilde{f}$ genauer untersuchen. Wegen $f, \tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ gilt $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$,

$$g(0) = \int f(0 - y) \, \overline{f(-y)} \, dy = \|f\|_2^2$$

und auf Grund der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$|g(x)| = \left| \int f(x - y) \, \overline{f(-y)} \, dy \right| \le \|f(x - \cdot)\|_2 \, \|f\|_2 = \|f\|_2^2 \, .$$

Da g stetig und beschränkt ist und h in $L^1(\mathbb{R})$ liegt, folgt mit dem Satz von Lebesgue (Satz A1.8) für $\varepsilon \to 0+$

$$\begin{aligned} g * h_\varepsilon(0) &= \int g(-y) \, h_\varepsilon(y) dy = \int g(-\varepsilon y) \, h(y) \, dy \\ &\to \int g(0) \, h(y) \, dy = g(0) \, . \end{aligned}$$

Andererseits beweisen Lemma A2.5 und der Satz von Lebesgue die Konvergenz

$$g * h_\varepsilon(0) = \int H(\varepsilon\xi) \, \hat{g}(\xi) \, đ\xi \to \int \hat{g}(\xi) \, đ\xi = \|\hat{f}\|_2^2$$

für $\varepsilon \to 0+$. Also gilt $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. ■

Satz A2.9 *Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}$ auf $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ läßt sich in eindeutiger Weise zu einer wieder mit $\mathcal{F}$ bezeichneten Abbildung*

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n), \quad f \mapsto \hat{f} = \mathcal{F}(f)$$

auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ fortsetzen. Diese Abbildung hat die folgenden Eigenschaften:

(1) *$\mathcal{F}$ ist eine stetige, lineare und bijektive Abbildung. Ihre Inverse $\mathcal{F}^{-1}$ ist eine Fortsetzung der in Satz A2.6 benutzten Fourier-Rücktransformation.*

(2) *Für $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gelten die Formeln*

$$\begin{aligned} \|f\|_2 &= \|\hat{f}\|_2 && \text{(Satz von Plancherel)} \\ \int f\overline{g}\,dx &= \int \hat{f}\,\overline{\hat{g}}\,đ\xi && \text{(Formel von Parseval).} \end{aligned}$$

(3) *Für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gelten für $R \to \infty$*

$$\begin{aligned} \int_{B_R(0)} f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx &\to \hat{f}(\xi) \\ \int_{B_R(0)} \hat{f}(\xi)e^{+ix\cdot\xi}đ\xi &\to f(x) \end{aligned}$$

im Sinne der L^2-Konvergenz.

Beweis Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gegeben. Nach Satz A1.6 (v) gibt es eine Folge $(f_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, die bzgl. $\|\cdot\|_2$ gegen f konvergiert. Dann ist auch $(\hat{f}_k) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ eine Cauchy-Folge, denn mit Satz A2.8 gilt

$$\|\hat{f}_k - \hat{f}_\ell\|_2 = \|f_k - f_\ell\|_2 \to 0 \quad \text{für } k, \ell \to \infty\,.$$

Da $L^2(\mathbb{R}^n)$ nach Satz A1.6 (iv) vollständig ist, gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$\hat{f}_k \to \hat{f} \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{für } k \to \infty$$

gilt. Aus $\|\hat{f}_k\|_2 = \|f_k\|_2$ folgen außerdem $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ sowie die Aussage, dass $\hat{f}$ nicht von der zuvor ausgewählten Folge (f_k) zur Approximation von f abhängt.

Ist $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$, so gibt es in Verallgemeinerung von Satz A1.6 (v) sogar eine Folge $(f_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, die in der L^2– *und* in der L^1–Norm gegen f konvergiert (ohne Beweis). In diesem Fall konvergiert $(\hat{f}_k)$ auch bzgl. der L^∞–Norm gegen $\mathcal{F}_{L^1(\mathbb{R}^n)}(f) \in C^0(\mathbb{R}^n)$. Mit Satz A1.6 (iv) schließt man

$$\hat{f} = \mathcal{F}_{L^1(\mathbb{R}^n)}(f) \text{ f.ü..}$$

Also ist die soeben konstruierte Fourier-Transformation eine Fortsetzung der Fourier-Transformation von $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Analog zu $\mathcal{F}$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ wird der Operator $\mathcal{F}^{-1}$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ definiert. Insbesondere gilt $\|\mathcal{F}^{-1}g\|_2 = \|g\|_2$ für alle $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Um die entscheidende Aussage, dass $\mathcal{F}^{-1}$ die Fourier-Rücktransformation ist, also $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = id$ gilt, zu beweisen, betrachte man zu $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ wieder eine approximierende Folge $(f_k) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Da der Fouriersche Umkehrsatz (Satz

A2.6) auf f_k angewandt werden kann, gilt $f_k = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} f_k$, wobei für $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^{-1}$ die soeben definierten Operatoren auf L^2-Räumen benutzt werden dürfen. Im Sinne der L^2-Konvergenz folgt jetzt

$$f = \lim_{k\to\infty} f_k = \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}_k) = \mathcal{F}^{-1}(\lim_{k\to\infty} \hat{f}_k) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} f\,.$$

Da analog $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = id$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ gezeigt werden kann, ist $\mathcal{F}$ tatsächlich ein *Isomorphismus* und eine *Isometrie* auf $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Zum Beweis der Formel von Parseval benutzt man die elementare Identität

$$4f\overline{g} = |f+g|^2 - |f-g|^2 + i|f+ig|^2 - i|f-ig|^2\,.$$

Integration bzgl. $x \in \mathbb{R}^n$ und der bereits bewiesene Satz von Plancherel liefern dann die Gleichungskette

$$\begin{aligned} 4\int f\overline{g}\,dx &= \|f+g\|_2^2 - \|f-g\|_2^2 + i\|f+ig\|_2^2 - i\|f-ig\|_2^2 \\ &= \|\hat{f}+\hat{g}\|_2^2 - \|\hat{f}-\hat{g}\|_2^2 + i\|\hat{f}+i\hat{g}\|_2^2 - i\|\hat{f}-i\hat{g}\|_2^2 \\ &= 4\int \hat{f}\,\overline{\hat{g}}\,đ\xi\,. \end{aligned}$$

Damit sind (1) und (2) bewiesen.

(3) Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gegeben, und sei χ_R die charakteristische Funktion der Kugel $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$, d.h., $\chi_R(x) = 1$ für $x \in B_r(0)$ und $\chi_R(x) = 0$ sonst. Aufgrund der Abschätzung

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f\chi_R|\,dx = \int_{B_R(0)} |f(x)|\,dx \le \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 dx\Big)^{1/2} \cdot \Big(\int_{B_R(0)} 1\,dx\Big)^{1/2} < \infty$$

liegt $f\chi_R$ in $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Ferner liefert der Satz von Lebesgue die Konvergenz

$$f\chi_R \to f \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{für } R \to \infty,$$

woraus mit dem Satz von Plancherel

$$\|\widehat{f\chi_R} - \hat{f}\|_2 = \|f\chi_R - f\|_2 \to 0 \quad \text{für } R \to \infty$$

folgt. Damit ist der Beweis der ersten Behauptung von (3) abgeschlossen. Der zweite Teil wird genauso bewiesen. ■

A3 Fourier-Reihen

Das Ziel in der Theorie der Fourier-Reihen ist die Entwicklung von 2π-periodischen Funktionen in die Grundschwingungen $\sin x$ und $\cos x$ sowie die Oberschwingungen $\sin nx$ und $\cos nx$, $n \ge 2$. Da $\sin \lambda x$ und $\cos \lambda x$ Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$u'' + \lambda^2 u = 0$$

sind, gestattet die Darstellung einer Funktion f als unendliche *trigonometrische Reihe*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{A3.1}$$

häufig die explizite Lösung von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen.

Lemma A3.1 *Eine Funktion $f \in C^0[-\pi, \pi]$ besitze die auf $[-\pi, \pi]$ gleichmäßig konvergente Reihendarstellung* (A3.1)*. Dann gilt*

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos nx\, dx, \quad n \geq 0, \tag{A3.2}$$

sowie

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n\pi\, dx, \quad n \geq 1\,. \tag{A3.3}$$

Beweis Integriert man $f(x)\, \cos kx$, $k \geq 0$, bzw. $f(x)\, \sin kx$, $k \geq 1$, auf $[-\pi, \pi]$, so dürfen wegen der gleichmäßigen Konvergenz in (A3.1) Integration und Reihenbildung vertauscht werden. Eine kleine Rechnung beweist die *Orthogonalitätsrelationen*

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, \cos kx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, \sin kx\, dx = \delta_{n,k} := \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}, \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, \sin kx\, dx = 0\,, \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = 0\end{gathered} \tag{A3.4}$$

für alle $k, n \geq 1$ sowie $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx = 1$. Daraus folgen die Integraldarstellungen von a_n und b_n. Insbesondere impliziert die Darstellung von a_0 den Faktor $\frac{1}{2}$ vor a_0 in (A3.1). ■

Definition A3.2 Sei $f \in L^1(-\pi, \pi)$. Dann heißen die in Lemma A3.1 benutzten Größen a_n, $n \geq 0$, und b_n, $n \geq 1$, die *Fourier-Koeffizienten*, und die unendliche Reihe in (A3.1) heißt die *Fourier-Reihe* von f. Da für $f \in L^1(-\pi, \pi)$ oder auch $f \in C^0[-\pi, \pi]$ die punktweise oder sogar gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihe i.a. nicht gesichert ist oder die Fourier-Reihe in einem Punkt x nicht gegen „$f(x)$" konvergiert, schreiben wir kurz

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,,$$

wenn die Fourier-Koeffizienten a_n, b_n von f wie in Lemma A3.1 definiert sind.

Um eine kürzere Darstellung der Fourier-Reihe (A3.1) zu gewinnen, benutzen wir die Formeln

$$\sin y = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy}), \quad \cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy}) .$$

Damit läßt sich (A3.1) auch in der Form

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

mit $c_0 = \frac{a_0}{2}$ und

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k), \quad k \geq 1 , \tag{A3.5}$$

schreiben. Die (c_k) werden wieder Fourier-Koeffizienten von f genannt und nach (A3.2) – (A3.3) aus

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx, \quad k \in \mathbb{Z} , \tag{A3.6}$$

berechnet. Schließlich vereinfachen sich die Orthogonalitätsrelationen (A3.4) zu

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-ikx} \, dx = \delta_{n,k} .$$

Die komplexwertige Darstellung einer (u.U. komplexwertigen) Funktion $f \in L^1(-\pi, \pi)$ lautet also

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{k} c_k e^{ikx} \tag{A3.7}$$

mit den Fourier-Koeffizienten c_k, $k \in \mathbb{Z}$, aus (A3.6). Mit Hilfe der einfachen Formeln

$$a_k = (c_k + c_{-k}) , \quad b_k = i(c_k + c_{-k}) \tag{A3.8}$$

gelangt man zur reellen Darstellung zurück.

Satz A3.3 (Lemma von Riemann-Lebesgue) *Für $f \in L^1(-\pi, \pi)$ gilt*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-irx} \, dx \to 0 \quad \textit{für } |r| \to \infty .$$

Insbesondere konvergieren die Folgen (c_k) für $|k| \to \infty$ und (a_n), (b_n) für $n \to \infty$ gegen 0.

Beweis Wir setzen f durch 0 zur Funktion $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$ fort und schreiben $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-irx}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x)e^{-irx}\,dx$. Wegen $e^{-ir(x+\pi/r)} = -e^{-irx}$ gilt dann

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x)e^{-irx}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x)\big(e^{-irx} - e^{-ir(x+\pi/r)}\big)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \big(\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x-\frac{\pi}{r})\big)\,dx \\ &\to 0\end{aligned}$$

für $r \to \infty$ nach Satz A1.6 (vi) (Stetigkeit im L^1-Mittel). ∎

Lemma A3.4 *Für $f \in L^1(-\pi,\pi)$ bezeichne $s_N(x)$ die N*-te Fourier-Partialsumme

$$s_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,.$$

Dann gilt

$$s_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,D_N(x-t)\,dt \tag{A3.9}$$

mit dem sog. Dirichlet-Kern

$$D_N(t) = \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{1}{2}t}\,.$$

Insbesondere ist D_N eine gerade, 2π-periodische Funktion mit der Eigenschaft

$$\int_0^{\pi} D_N(t)\,dt = \pi\,.$$

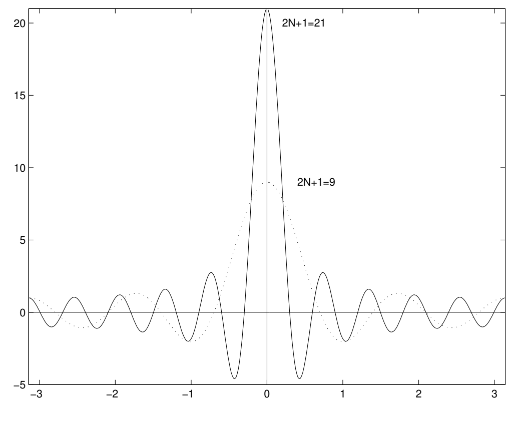

Abbildung A3.1: Der Dirichlet-Kern D_N für $N = 4$ und $N = 10$

Beweis Nach (A3.6) gilt

$$s_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=-N}^{N} e^{ik(x-t)}\, dt\,,$$

wobei der Integralkern

$$\begin{aligned} D_N(t) &= \sum_{k=-N}^{N} e^{ikt} = e^{-iNt}\sum_{k=0}^{2N}(e^{it})^k &&= e^{-iNt}\,\frac{1-e^{it(2N+1)}}{1-e^{it}} \\ &= \frac{e^{it(N+1/2)} - e^{-it(N+1/2)}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} &&= \frac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} \end{aligned}$$

ist. Offensichtlich ist D_N gerade und 2π-periodisch. Schließlich folgt für $f \equiv 1$, also $s_N \equiv 1$, die Integralbedingung $\int_0^\pi D_N = \pi$. ■

Wie Abbildung A3.1 zeigt, ist der Dirichlet-Kern für großes N eine stark oszillierende Funktion. Zudem kann man zeigen, dass die L^1-Normen $\|D_N\|_1$ auf $[-\pi,\pi]$ für $N \to \infty$ wie $\log N$ anwachsen. Deshalb lassen sich die Methoden, mit denen für die Laplace-Gleichung die Annahme von Randwerten und für die Wärmeleitungsgleichung die Annahme des Anfangswertes gezeigt werden, nicht ohne weiteres auf die Konvergenzanalyse $s_N(x) \to f(x)$ für $N \to \infty$ übertragen.

Satz A3.5 *Sei $f \in L^1(-\pi,\pi)$ in der Umgebung eines Punktes $x \in (-\pi,\pi)$ differenzierbar oder auch nur Hölder-stetig, d.h., es gibt einen Exponenten $\alpha \in (0,1]$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass*

$$|f(t) - f(t')| \le c|t-t'|^\alpha \quad \textit{für alle } t,t' \in [x-\varepsilon,\, x+\varepsilon]$$

gilt. Dann konvergiert die Fourier-Reihe in x gegen $f(x)$, also

$$s_N(x) \to f(x) \quad \textit{für } N \to \infty\,.$$

Beweis Nach Voraussetzung soll f in einer Umgebung $[x-\varepsilon,\, x+\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, von x f.ü. mit einer in x differenzierbaren oder auf $[x-\varepsilon,\, x+\varepsilon]$ Hölder-stetigen Funktion übereinstimmen. Ohne Einschränkung werde diese Funktion wieder mit f bezeichnet. Man beachte, dass nach dem Mittelwertsatz eine Funktion $f \in C^1[x-\varepsilon,\, x+\varepsilon]$ Hölder-stetig mit jedem Exponenten $\alpha \in (0,1]$ ist. Ferner ist es vorteilhaft, f 2π-periodisch auf $\mathbb{R}$ fortzusetzen, so dass (A3.9) auch in der Form

$$s_N(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\, D_N(t)\, dt$$

geschrieben werden kann. Mit Lemma A3.4 folgt dann

$$\begin{aligned} s_N(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(t+x) - f(x)\big)\, D_N(t)\, dt \\ &=: \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin\big((N+\frac{1}{2})\,t\big)\, dt \end{aligned}$$

mit

$$g(t) = \frac{f(t+x) - f(x)}{t} \cdot \frac{t}{\sin \frac{t}{2}} .$$

Nach Voraussetzung ist $|f(t+x) - f(x)| \le c|t|^\alpha$ für $|t| \le \varepsilon$, so dass wegen $|t/\sin(t/2)| \le \pi$ die Funktion g auf $[-\varepsilon, \varepsilon]$ durch die L^1-Funktion $c\pi|t|^{\alpha-1}$ abgeschätzt werden kann. Da g auf $[-\pi, -\varepsilon]$ und auf $[\varepsilon, \pi]$ integrierbar ist, folgt $g \in L^1(-\pi, \pi)$. Dann liefert das Lemma von Riemann-Lebesgue (Satz A3.3) die Behauptung $s_N(x) - f(x) \to 0$ für $N \to \infty$. ■

Satz A3.5 gilt in abgewandelter Form, falls f in x eine Sprungunstetigkeit hat.

Satz A3.6 *Die Funktion $f \in L^1(-\pi, \pi)$ sei unstetig in $x \in (-\pi, \pi)$, besitze jedoch einseitige Grenzwerte*

$$f(x+) = \lim_{h \to 0+} f(x+h) \quad \text{und} \quad f(x-) = \lim_{h \to 0+} f(x-h) .$$

Ferner sei f in x rechts- und linksseitig differenzierbar, d.h.,

$$f'(x\pm) := \lim_{h \to 0+} \frac{1}{h}\big(f(x \pm h) - f(x\pm)\big)$$

existiere. Dann gilt

$$s_N(x) \to \frac{1}{2}\big(f(x+) + f(x-)\big) \quad \text{für } N \to \infty .$$

Beweis Nach Voraussetzung stimmt f in einer Umgebung von x f.ü. mit einer Funktion überein, für die $f(x\pm)$ und $f'(x\pm)$ existieren. Analog zum Beweis von Satz A3.5 gilt hier

$$s_N(x) - \frac{1}{2}\big(f(x+) + f(x-)\big) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin(N + \frac{1}{2})t \, dt$$

mit der Funktion

$$g(t) = \frac{t}{\sin \frac{t}{2}} \cdot \begin{cases} \frac{1}{t}\big(f(x+t) - f(x-)\big), & t \in (-\pi, 0) \\ \frac{1}{t}\big(f(x+t) - f(x+)\big), & t \in (0, \pi) \end{cases} .$$

Wieder ist in einer kleinen Umgebung von $t = 0$ die Funktion $g(t)$ auf Grund der Voraussetzungen an f im Punkt x beschränkt, so dass $g \in L^1(-\pi, \pi)$ folgt. Dann beweist das Lemma von Riemann-Lebesgue die Konvergenz von $s_N(x)$ gegen den Mittelwert $\frac{1}{2}\big(f(x+) + f(x-)\big)$. ■

Beispiele A3.7 (1) Die Vorzeichenfunktion $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ +1, & x > 0 \end{cases}$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz A3.6. Als Fourier-Koeffizienten berechnet man $c_0 = 0$ und $c_k = \frac{i}{\pi k}\left(e^{-ik\pi} - 1\right)$, also

$$c_k = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{2}{\pi k i}, & k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Die Fourier-Reihe von f lautet deshalb

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}.$$

Nach Satz A3.6 konvergiert $s_N(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$ gegen -1 für $x \in (-\pi, 0)$, gegen $+1$ für $x \in (0, \pi)$ und gegen $0 = \frac{1}{2}(1-1)$ für $x = 0$ (hier gilt jedoch bereits $s_N(0) = 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$).

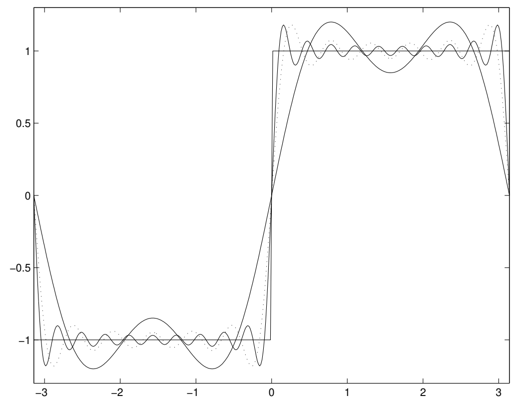

Abbildung A3.2: Die Fourier-Partialsummen s_N, $N = 3, 9$ und 19, zu $f(x) = \operatorname{sgn} x$

Die Konvergenz der Fourier-Reihe $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$ gegen f kann auf dem gesamten Intervall $[-\pi, \pi]$ *nicht gleichmäßig* sein, da andernfalls f als Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge stetiger Funktionen ebenfalls stetig sein müsste. Dagegen ist die Konvergenz in jedem kompakten Intervall $[-\pi + \varepsilon, -\varepsilon]$ und $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, gleichmäßig, s. Satz A3.15.

Ferner fällt auf, dass die Fourier-Reihe von f eine reine *sinus-Reihe* ist: da f ungerade bzgl. 0 ist, verschwinden alle Fourier-Koeffizienten a_k, $k \in \mathbb{N}_0$.

(2) Die Funktion $\tilde{f}(x) = |x|$, $x \in (-\pi, \pi)$, kann als stetige und stückweise stetig differenzierbare, 2π-periodische Funktion auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden. Als

Fourier-Koeffizienten berechnet man $\tilde{c}_0 = \frac{\pi}{2}$

$$\tilde{c}_k = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{-2}{\pi k^2}, & k \text{ ungerade,} \end{cases}$$

so dass die Fourier-Reihe

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

der geraden Funktion $|x|$ eine reine *cosinus-Reihe* ist. Wegen der quadratisch abklingenden Koeffizienten $(2k+1)^{-2}$ konvergiert diese Reihe auf $[-\pi, \pi]$ gleichmäßig gegen $|x|$.

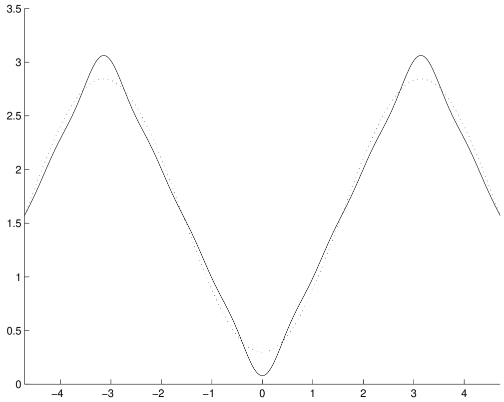

Abbildung A3.3: Die Fourier-Partialsummen s_N, $N = 1$ und 7, zu $\tilde{f}(x) = |x|$

In $x = 0$ erhält man die Identität $0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-2}$, also

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \, .$$

Die Bestimmung der Fourier-Koeffizienten $\tilde{c}_k$ konnte in diesem Beispiel mit Hilfe einer partiellen Integration aus Teil (1) gewonnen werden: wegen $\frac{d}{dx} |x| = \operatorname{sgn} x$, $x \neq 0$, gilt für $k \neq 0$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x e^{-ikx} \, dx = \frac{+ik}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| e^{-ikx} = ik\tilde{c}_k \, .$$

Lemma A3.8 (1) *Die Funktion $f \in C^0(\mathbb{R})$ sei 2π-periodisch und besitze eine „schwache Ableitung“ $f' \in L^1(-\pi, \pi)$ im folgenden Sinne: für jede 2π-periodische Funktion $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ sei die partielle Integration*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f\varphi' \, dx = - \int_{-\pi}^{\pi} f'\varphi \, dx \tag{A3.10}$$

erlaubt. Bezeichnen (c_k) bzw. (c'_k) die Fourier-Koeffizienten von f bzw. von f', gilt

$$c'_k = ikc_k, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

(2) *Für eine 2π-periodische C^m-Funktion, $m \geq 0$, klingen die Fourier-Koeffizienten wie $o(|k|^{-m})$ für $k \to \pm\infty$ ab. Insbesondere konvergiert die Fourier-Reihe punktweise in $[-\pi, \pi]$ gegen f, falls $m \geq 1$ ist, und sogar gleichmäßig, falls $m \geq 2$ ist.*

Beweis

(1) folgt mit $\varphi(x) = e^{-ikx}$ aus einer partiellen Integration.

(2) Ist $f \in C^m(\mathbb{R})$ 2π-periodisch, gilt $c_k^{(m)} = (ik)^m c_k$ für die Fourier-Koeffizienten $(c_k^{(m)})$ von $f^{(m)}$, wenn (c_k) die Fourier-Koeffizienten von f bezeichnet. Da nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue $|c_k^{(m)}| \to 0$ für $k \to \pm\infty$, folgt $|c_k| = o(|k|^{-m})$. Ist $m \geq 1$, konvergiert die Fourier-Reihe nach Satz A3.5 punktweise in $[-\pi, \pi]$ gegen f. Im Fall $m \geq 2$ ist diese Konvergenz wegen $|c_k| = o(|k|^{-2})$ sogar gleichmäßig. ■

Ein typisches Beispiel einer Funktion mit „schwacher L^1-Ableitung“ ist eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion f auf $[-\pi, \pi]$ mit $f(-\pi) = f(\pi)$. In diesem Fall ist f' eine stückweise stetige Funktion mit endlich vielen Sprungstellen.

Eine einheitliche und elegante Konvergenzanalyse von Fourier-Reihen ist im Rahmen von Funktionen im Raum $L^2(-\pi, \pi)$ möglich, für die es eine bijektive Beziehung zur Menge aller quadratsummierbaren Folgen (c_k), d.h. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$, der Fourier-Koeffizienten gibt, s. Satz A3.14. Zur Analysis (komplexwertiger) L^2-Funktionen ist es hilfreich, neben der L^2-Norm $\|\cdot\|_2$ das *Skalarprodukt*

$$(f, g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt \quad \text{für } f, g \in L^2(-\pi, \pi) \tag{A3.11}$$

zu benutzen, für das definitionsgemäß

$$(f, f) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \|f\|_2^2$$

gilt. Man beachte, dass das Integral in (A3.11) nach der Ungleichung von Cauchy-Schwarz für alle $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ existiert. Bekanntlich hat das Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ die folgenden Eigenschaften ($f, g, h \in L^2(-\pi, \pi)$, $\lambda \in \mathbb{C}$):

$$\begin{aligned}
(f, f) &\geq 0 \quad \text{und} \quad (f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad \big(\text{in } L^2(-\pi, \pi)\big) \\
(f, g) &= \overline{(g, f)} \\
(f + g, h) &= (f, h) + (g, h), \quad (f, g + h) = (f, g) + (f, h) \\
(\lambda f, g) &= \lambda(f, g) = (f, \overline{\lambda} g)\,.
\end{aligned} \tag{A3.12}$$

Definition A3.9 Eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ von Funktionen in $L^2(-\pi,\pi)$ heißt *Orthogonalsystem* in $L^2(-\pi,\pi)$, kurz: *OGS*, falls für das Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ auf $L^2(-\pi,\pi)$

$$\begin{aligned} (\varphi_n,\varphi_m) &= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(t)\,\overline{\varphi_m(t)}\,dt = 0 && \text{für alle } n\neq m\,, \\ (\varphi_n,\varphi_n) &= \|\varphi_n\|_2^2 > 0 && \text{für alle } n\in\mathbb{Z} \end{aligned} \tag{A3.13}$$

gilt. Falls sogar die Normierungsbedingung $\|\varphi_n\|_2 = 1$ für alle $n\in\mathbb{Z}$ erfüllt ist, heißt (φ_n) ein *Orthonormalsystem*, kurz: *ONS*.

Beispiele A3.10 (1) $\{\varphi_n(t) = e^{int}, n\in\mathbb{Z}\}$ definiert ein OGS. Wegen $\|\varphi_n\|_2^2 = 2\pi$ ist $\{\frac{\varphi_n}{\sqrt{2\pi}} : n\in\mathbb{Z}\}$ ein ONS auf $L^2(-\pi,\pi)$.

(2) $\{\cos nt : n\in\mathbb{N}_0\}\cup\{\sin nt : n\in\mathbb{N}\}$ ist ein OGS. Dagegen ist $\{\frac{1}{2\pi};\ \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}\ : n\in\mathbb{N}\}\cup\{\frac{\sin nt}{\sqrt{2\pi}}\ : n\in\mathbb{N}\}$ ein ONS.

Satz A3.11 *Sei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ein Orthogonalsystem auf $L^2(-\pi,\pi)$, und sei $f\in L^2(-\pi,\pi)$ gegeben. Dann wird für jedes $N\in\mathbb{N}$ das Minimum der sog. L^2-*Bestapproximation

$$E_N = \|f - \sum_{|n|\le N} k_n\varphi_n\|_2^2 \quad \textit{mit beliebigen } k_n\in\mathbb{C}$$

von f durch die Fourier-Koeffizienten

$$k_n = c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|_2^2}\,(f,\varphi_n) \tag{A3.14}$$

angenommen. Der minimale Fehler $\min\{E_N : k_n\in\mathbb{C},\ |n|\le N\}$ *ist*

$$\Big\|f - \sum_{|n|\le N} c_n\varphi_n\Big\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{|n|\le N} |c_n|^2\,\|\varphi_n\|_2^2\,. \tag{A3.15}$$

Beweis Für die Approximierende $s_N = \sum_{|n|\le N} k_n\varphi_n$ gilt mit (A3.11) die Fehlerdarstellung

$$\begin{aligned} E_N &= \|f-s_N\|_2^2 = (f-s_N,\ f-s_N) \\ &= (f,f) - 2\,\mathrm{Re}\,(f,s_N) + (s_N,s_N) \\ &= \|f\|_2^2 - 2\,\mathrm{Re}\sum_{|n|\le N}\overline{k_n}\,(f,\varphi_n) + \sum_{|n|\le N}|k_n|^2\,\|\varphi_n\|_2^2 \\ &\qquad \text{(da } (\varphi_n) \text{ ein OGS ist)} \\ &= \|f\|_2^2 + \sum_{|n|\le N}\big(|k_n|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\overline{k_n}\,c_n\big)\,\|\varphi_n\|_2^2 \quad \text{(mit (A3.14))} \\ &= \|f\|_2^2 + \sum_{|n|\le N}|k_n-c_n|^2\,\|\varphi_n\|_2^2 - \sum_{|n|\le N}|c_n|^2\,\|\varphi_n\|_2^2\,. \end{aligned}$$

Der Fehler E_N wird also minimal für $k_n = c_n$, $|n| \le N$; für diese Wahl gilt (A3.15). ∎

Korollar A3.12 *Sei* (φ_n) *ein OGS auf* $L^2(-\pi,\pi)$, *und sei* $f \in L^2(-\pi,\pi)$. *Dann gilt die* Besselsche Ungleichung

$$\sum_{|n|\le N} |c_n|^2 \, \|\varphi_n\|_2^2 \le \|f\|_2^2 \,. \tag{A3.16}$$

Insbesondere gelten für die Fourier-Koeffizienten aus (A3.2), (A3.3) *und* (A3.6) *die Ungleichungen*

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 &\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt, \\ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) &\le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt \,. \end{aligned}$$

Beweis Die Besselsche Ungleichung folgt sofort aus (A3.15). ∎

Satz A3.13 *Die Funktion* $f \in C^0(\mathbb{R})$ *sei* 2π*-periodisch und besitze eine schwache Ableitung* f', *s. Lemma A3.8, in* $L^2(-\pi,\pi)$. *Dann konvergiert die Fourier-Reihe von* f *gleichmäßig auf* $[-\pi,\pi]$ *gegen* f.

Beweis Da $f' \in L^2(-\pi,\pi)$ in $L^1(-\pi,\pi)$ liegt, gilt nach Lemma A3.8 für die Fourier-Koeffizienten $c_k = c_k(f)$ und $c'_k = c_k(f')$

$$|c_k| = \frac{1}{|k|}\,|c'_k| \quad \text{für alle } k \ne 0 \,.$$

Für die Fourier-Partialsumme $s_N(x) = \sum_{|k|\le N} c_k \, e^{ikx}$ von f folgt daraus für $0 < N < M$ und für $x \in [-\pi,\pi]$ die Abschätzung

$$|s_M(x) - s_{N-1}(x)| = \Big| \sum_{N\le|k|\le M} c_k \, e^{ikx} \Big| \le \sum_{N\le|k|\le M} \frac{1}{|k|}\,|c'_k| \,.$$

Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz und Korollar A3.12 erhält man dann

$$\|s_M - s_N\|_\infty \le \Big(\sum_{N\le|k|\le M} \frac{1}{k^2}\Big)^{1/2} \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c'_k|^2\Big)^{1/2} \le \frac{1}{2\pi}\,\|f'\|_2^2 \Big(\sum_{N\le|k|\le M} \frac{1}{k^2}\Big)^{1/2} .$$

Da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$ ist, ist $(s_N)_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge in $C^0[-\pi,\pi]$ und konvergiert gleichmäßig auf $[-\pi,\pi]$ gegen eine stetige Grenzfunktion $\tilde{f}$.

Um $f = \tilde{f}$ zu zeigen, reicht es, nach Satz A3.5 die punktweise Hölder-Stetigkeit von f zu beweisen. Dazu betrachte man für beliebige Punkte $-\pi < x_1 < x_2 < \pi$

stetige, stückweise lineare Funktionen φ mit $\varphi(x) = 1$ in $[x_1, x_2]$, $\varphi(x) = 0$ für $x < x_1 - \varepsilon$ und für $x > \frac{x}{2} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ genügend klein. Aus der Formel zur partiellen Integration (A3.10), in der auch φ als Testfunktion benutzt werden darf, folgt

$$-\int_{x_1-\varepsilon}^{x_2+\varepsilon} f'\varphi\, dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_{x_1-\varepsilon}^{x_1} f\, dt - \frac{1}{\varepsilon}\int_{x_2}^{x_2+\varepsilon} f\, dt\,.$$

Da f stetig ist, gilt im Grenzfall $\varepsilon \to 0+$

$$-\int_{x_1}^{x_2} f'\, dt = f(x_1) - f(x_2)$$

und folglich mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \int_{x_1}^{x_2} |f'(t)|\, dt \leq |x_2 - x_1|^{1/2} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2\, dt\Big)^{1/2}.$$

Auf Grund der Periodizität von f erhält man die gleiche Hölder-Abschätzung $|f(x_1) - f(x_2)| \leq \|f'\|_2\, |x_2 - x_1|^{1/2}$ auch für $x_1 = -\pi$ bzw. $x_2 = +\pi$. ■

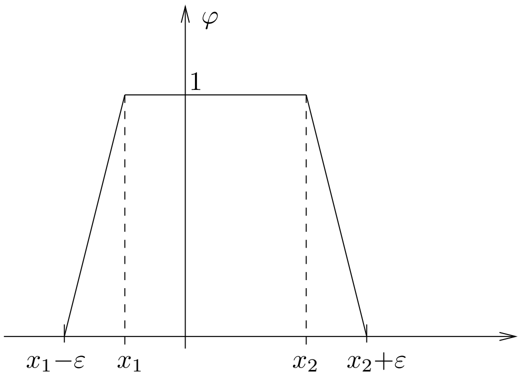

Abbildung A3.4: Die Testfunktion φ

Satz A3.14 (1) *Für jede $L^2(-\pi,\pi)$-Funktion f konvergiert die Fourier-Partialsumme s_N in der L^2-Norm gegen f. Ferner gilt*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}\, \|f\|_2^2\,. \tag{A3.17}$$

(2) *Für jede Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ komplexer Zahlen mit $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$ gibt es genau eine Funktion $f \in L^2(-\pi,\pi)$, so dass (c_k) die Fourier-Koeffizienten von f sind.*

Beweis

(1) Sei $f \in L^2(-\pi,\pi)$, $\varepsilon > 0$, und sei g eine 2π-periodische C^1-Funktion mit $\|f-g\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}$, s. Satz A1.6 (v) mit $\Omega = (-\pi,\pi)$. Nach Satz A3.13 gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\|g - s_n(g)\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\,\|g - s_n(g)\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } n \geq N\,.$$

Ferner gilt für die Fourier-Partialsummen $s_n(f)$ und $s_n(g)$ nach (A3.12), (A3.13)

$$\begin{aligned}\|s_n(f) - s_n(g)\|_2^2 &= \|s_n(f-g)\|_2^2 = \Big\|\sum_{|k|\leq n} c_k(f-g)\,\varphi_k\Big\|_2^2 \\ &= \sum_{|k|\leq n} |c_k(f-g)|^2\,\|\varphi_k\|_2^2 \leq \|f-g\|_2^2\,,\end{aligned}$$

wobei $c_k(f-g)$ den k-ten Fourier-Koeffizienten von $f-g$ bezeichnet. Zusammengefasst erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|f - s_n(f)\|_2 &\leq \|f-g\|_2 + \|g - s_n(g)\|_2 + \|s_n(g) - s_n(f)\|_2 \\ &\leq 2\,\|f-g\|_2 + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N\,.\end{aligned}$$

Schließlich gilt nach Satz A3.11 und dem zuvor bewiesenen Teil

$$\|f\|_2^2 - \sum_{|k|\leq n} |c_k|^2\,\|\varphi_k\|_2^2 = \|f - s_n(f)\|_2^2 \to 0$$

für $n \to \infty$; damit ist auch (A3.17) bewiesen.

(2) Es gelte $\sum |c_k|^2 < \infty$. Dann genügen die Partialsummen $s_N(x) = \sum_{|k|\leq N} c_k\,e^{ikx}$ nach (A3.12), (A3.13) für $0 < N < M$ der L^2-Abschätzung

$$\|s_M - s_{N-1}\|_2^2 = \Big\|\sum_{N\leq|k|\leq M} c_k\,e^{ikx}\Big\|_2^2 = 2\pi \sum_{N\leq|k|\leq M} |c_k|^2\,.$$

Folglich ist $(s_N)_{N=0}^\infty$ eine Cauchy-Folge in $L^2(-\pi,\pi)$, und nach Satz A1.6 (iv) gibt es ein $f \in L^2(-\pi,\pi)$ mit $\|f - s_N\|_2 \to 0$ für $N \to \infty$. Aus dieser L^2- und somit auch L^1-Konvergenz folgt für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_N(x)e^{-ikx}\,dx = c_k\,. \qquad \blacksquare$$

Anschließend soll noch die Frage der gleichmäßigen Konvergenz auf Teilintervallen von $(-\pi,\pi)$ beantwortet werden, vgl. Beispiel A3.7 (2).

Satz A3.15 *Die Funktion $f \in L^1(-\pi,\pi)$ stimme auf dem offenen Intervall $(x_0-\varepsilon,\, x_0+\varepsilon) \subset (-\pi,\pi)$ mit einer C^1-Funktion überein. Dann konvergiert die Folge der Fourier-Partialsummen s_N auf jedem kompakten Teilintervall $[x_0-\delta,\, x_0+\delta]$, $0<\delta<\varepsilon$, von $(x_0-\varepsilon,\, x_0+\varepsilon)$ gleichmäßig gegen f.*

Beweis Wir wählen eine Abschneidefunktion $\varphi \in C_0^\infty(x_0-\varepsilon,\, x_0+\varepsilon)$ mit $\varphi(x)=1$ in $[x_0-\delta',\, x_0+\delta']$, $\delta<\delta'<\varepsilon$, so dass $f\varphi$ als eine C^1-Funktion auf $(-\pi,\pi)$ betrachtet werden kann. Nach Satz A3.13 konvergiert die Folge der Fourier-Partialsummen $\big(s_N(f\varphi)\big)_N$ gleichmäßig auf $[-\pi,\pi]$ gegen $f\varphi$, also auf $[x_0-\delta,\, x_0+\delta]$ gleichmäßig gegen f. Folglich bleibt zu zeigen, dass die Folge der Fourier-Partialsummen $\big(s_N\big(f(1-\varphi)\big)\big)_N$ gleichmäßig auf $[x_0-\delta,\, x_0+\delta]$ gegen 0 konvergiert. Mit den Abkürzungen $g=f(1-\varphi)$ und $r=N+\frac{1}{2}$ gilt nach Lemma A3.4

$$\begin{aligned}
s_N(g)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t+x)\, D_N(t)\, dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(t+x)}{\sin\frac{t}{2}}\, \sin rt\, dt \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(t+x)}{\sin\frac{t}{2}}\, \big(\sin rt - \sin r(t+\frac{\pi}{r})\big)\, dt \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\frac{g(t+x)}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{g(t+x-\frac{\pi}{r})}{\sin\frac{t-\pi/r}{2}}\Big)\, \sin rt\, dt\,.
\end{aligned}$$

Da g auf $[x_0-\delta',\, x_0+\delta']$ verschwindet, gilt auch für jedes $x\in[x_0-\delta,\, x_0+\delta]$

$$h_x(t) := \frac{g(t+x)}{\sin\frac{t}{2}} = 0 \quad \text{für } |t|<\delta'-\delta\,;$$

ferner ist $h_x \in L^1(-\pi,\pi)$. Deshalb konvergiert

$$\begin{aligned}
|s_N(g)(x)| &\le \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Big|h_x(t)-h_x(t-\frac{\pi}{r})\Big|\, dt \\
&\le C\int_{-\pi}^{\pi} \Big|g(t+x)-g(t+x-\frac{\pi}{r})\Big|\, dt \\
&\quad + c\int_{\substack{t\in[\pi,\pi]\\ |t|\ge(\delta'-\delta)/2}} \Big|g(t+x-\frac{\pi}{r})\Big|\, \Big|\frac{1}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{\sin\frac{t-\pi/r}{2}}\Big|\, dt
\end{aligned}$$

gleichmäßig bzgl. $x\in[x_0-\delta,\, x_0+\delta]$ nach Satz A1.6 (vi) für $r\to\infty$ gegen 0. ∎