

Bonus-Übungsblatt

Ausgabe 16-12-2014 – Abgabe 07/08-01-2015 – Besprechung 13/14-01-2015

HINWEIS: Die in diesem Übungsblatt erreichten Punkte werden als Bonuspunkte gezählt.

1. Aufgabe [5 Punkte]: Dirac'sche δ -Funktion und Heaviside-Funktion

Die δ -Distribution $\delta(x)$ kann als Grenzfunktion einer Funktionenschar $\delta(x; \varepsilon)$ mit den Eigenschaften

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(x \neq 0; \varepsilon) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(x = 0; \varepsilon) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x; \varepsilon) dx = 1$$

verstanden werden. Mit dieser Definition bedeutet die Gleichheit zweier δ -Distributionen $\delta_1(x)$ und $\delta_2(x)$, dass (i) Multiplikation der δ -Distribution mit einer stetigen und beschränkten Testfunktion $f(x)$, (ii) Integration über x und (iii) anschließende Durchführung aller Grenzprozesse zum gleichen Ergebnis führt, also

$$\delta_1(x) = \delta_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \delta_1(x; \varepsilon) f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \delta_2(x; \varepsilon) f(x) dx.$$

- (a) Zeigen Sie mit dieser Definition, dass für eine stetige Funktion $g(x)$ die Gleichung $g(x)\delta(x - x_0) = g(x_0)\delta(x - x_0)$ gilt. [1P]
- (b) Zeigen Sie, dass $\delta(x - x_0) = \frac{d}{dx} \Theta(x - x_0)$ gilt, d.h., dass die δ -Distribution den Sprung ihrer verallgemeinerten Stammfunktion, der Heaviside-Funktion $\Theta(x - x_0)$, misst. [2P]
- (c) Bestimmen Sie mit differenzierbaren Testfunktionen $f(x)$ durch partielle Integration formal die verallgemeinerte Ableitung $\delta'(x)$ der δ -Distribution. [2P]

2. Aufgabe [6 Punkte]: Kugelflächenfunktionen als Orthonormalsystem

- (a) Für zwei Funktionen f und g definieren wir das Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f^*(\vartheta, \varphi) g(\vartheta, \varphi) \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta.$$

Berechnen Sie für

$$\begin{aligned} f(\vartheta, \varphi) &= aY_{11}(\vartheta, \varphi) + bY_{10}(\vartheta, \varphi) + cY_{1-1}(\vartheta, \varphi) \\ g(\vartheta, \varphi) &= dY_{11}(\vartheta, \varphi) + eY_{10}(\vartheta, \varphi) \end{aligned}$$

das Skalarprodukt (f, g) , einmal mit Hilfe der expliziten Ausdrücke für die Kugelflächenfunktionen Y_{lm} , indem Sie über ϑ und φ integrieren, und ein zweites Mal mit Hilfe ihrer Orthonormalitätsbeziehungen. [1P]

- (b) Das kartesische Dipolmoment $\mathbf{p}$ und die sphärischen Multipolmomente q_{lm} einer Ladungsverteilung ρ sind gegeben durch

$$\mathbf{p} = \int \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} dV \quad \text{und} \quad q_{lm} = \int \rho(\mathbf{r}) r^l Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) dV$$

Drücken Sie den Vektor $\mathbf{r}$ mit Hilfe der Kugelflächenfunktionen aus und leiten Sie so die Beziehungen zwischen den Komponenten von $\mathbf{p}$ und den q_{lm} ab. [2P]

- (c) Die Komponenten des kartesischen Quadrupolmoments lauten

$$Q_{ij} = \int \rho(\mathbf{r}) (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) dV.$$

Auch hier kann der Integrand wieder durch Kugelflächenfunktionen angegeben werden. Wie lauten die Beziehungen zwischen den Q_{ij} und den q_{lm} ? HINWEIS: Nur fünf der neun Q_{ij} sind unabhängig. [3P]

3. Aufgabe [3 Punkte]: Erdmagnetfeld in Heidelberg

In guter Näherung gleicht das Erdmagnetfeld an der Oberfläche dem Feld eines im Erdmittelpunkt lokalisierten magnetischen Dipols. Wie groß ist die Inklination ι , d.h., der Winkel zwischen Erdmagnetfeld und lokaler Horizontalebene, in Heidelberg? Für die Rechnung können Sie annehmen, dass die magnetische Breite und die geographische Breite Heidelbergs (ca. $49^\circ 25'$ N) übereinstimmen.

4. Aufgabe [6 Punkte]: Numerische Lösung der Laplace-Gleichung

Betrachten Sie erneut das Laplace-Problem aus Aufgabe 5.4.: Ein würfelförmiger Hohlraum mit Kantenlänge L sei durch Metallwände begrenzt. Der Würfel werde nun in der Mitte parallel zu zwei Seitenflächen durchgeschnitten, so dass die beiden metallenen Hälften voneinander isoliert sind. An der einen Hälfte wird das Potential $\phi = \phi_0$ angelegt, an der anderen gelte $\phi = 0$.

Benutzen Sie die Methode der finiten Differenzen, um das Potential im Innern dieser Anordnung numerisch zu berechnen. Stellen Sie dafür die diskretisierte Form $\mathbb{A} \cdot \phi = \mathbf{b}$ der Laplace-Gleichung für kartesische Gitter mit Gitterabständen $d = L/4, L/5$ und $L/6$ auf. Nutzen Sie die Symmetrien des Systems aus, um die Zahl der unabhängigen Gitterpunkte bei den verschiedenen Gitterabständen zu reduzieren. Lösen Sie die diskretisierte Laplace-Gleichung mit Hilfe eines geeigneten Computerprogramms (z.B. freie Programme wie Sage, Octave oder SciLab, ein selbstgeschriebenes Programm oder ggf. Maple, Mathematica) durch Invertierung der Matrix $\mathbb{A}$. Vergleichen Sie die Ergebnisse für die verschiedenen Gitterabstände, um die Änderungen durch höhere Auflösung zu demonstrieren.