

Grothendiecks Homotopie Hypothese

und die durch Modellkategorien und $(\infty, 1)$ -Kategorien induzierten
Homotopietheorien
(mit einem Fokus auf der Kan-Quillen Modell Struktur auf **sSet**)

Maria Walch

AG Thiel
TU Kaiserslautern

3. Februar 2022

AGT Seminar

Inhalt

- 1 Einleitung
- 2 Modellkategorien
 - Was ist eine Modellkategorie?
 - Beispiele
 - Quillen Adjunktionen
- 3 $(\infty, 1)$ -Kategorien
- 4 Homotopie Hypothese
- 5 Wofür brauche ich Grothendiecks Homotopie Hypothese?

Worum es geht

“One comment is that presumably, the category of ∞ -groupoids (which is still to be defined) is a “model category” for the usual homotopy category; this would be at any rate one plausible way to make explicit the intuition referred to before, that a homotopy type is “essentially the same” as an ∞ -groupoid up to ∞ -equivalence.”

[Alexander Grothendieck in *À la poursuite des Champs*]

Ein erster Überblick

$$\begin{array}{ccc}
 \{\text{Categories}\} & \xrightarrow{N(\cdot)} & \{\infty - \text{Categories}\} & \supset & \{\text{Kan Complexes}\} \\
 & & \cap & & \uparrow s(\cdot) \\
 & & \{\text{Simplicial Sets}\} & & \{\text{Topological Spaces}\}
 \end{array}$$

Literatur (Auswahl)

- Die Modellstruktur auf **sSet**: **Goerss/Jardine** *Simplicial Homotopy Theory*
- ∞ -Kategorien und höhere Kategorientheorie (Beginner, aber von Jacob Lurie maintained): *kerodon.net*
- Homotopie Theorie und höhere Kategorientheorie (aktuell und cool): **Simpson** *Homotopy Theory of Higher Categories*
- Überblick über Modellkategorien: **Balchin** *A Handbook of Model Categories*
- Homotopie Theorien (Begriffe): *nLab*
- Homotopie Theorie (Einführung): **Arkowitz** *Introduction to Homotopy Theory*

'Grothendiecks' Homotopie Hypothese

(John C. Baez)

Hypothese (Dimension ∞)

Es besteht eine Äquivalenz von ∞ -Kategorien

$$\Pi_{\infty} : \infty\mathbf{Type} \rightarrow \infty\mathbf{Gpd} \quad (1)$$

Beispiel

Die obige Äquivalenz wird induziert durch die folgende **Quillen Adjunktion**:

$$|-| : \mathbf{sSet}_{\mathbf{Kan}} \rightleftarrows \mathbf{Top}_{\mathbf{Quillen}} : S(-). \quad (2)$$

Modellkategorien

Definition

Eine Modellkategorie ist eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit drei ausgewählten Klassen von Morphismen:

- schwache Äquivalenzen $W_{\mathcal{C}}$,
- Faserungen $\text{Fib}_{\mathcal{C}}$,
- Cofaserungen $\text{Cof}_{\mathcal{C}}$.

Modellkategorien

Definition

Eine Modellkategorie ist eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit drei ausgewählten Klassen von Morphismen:

- schwache Äquivalenzen $W_{\mathcal{C}}$,
- Faserungen $\text{Fib}_{\mathcal{C}}$,
- Cofaserungen $\text{Cof}_{\mathcal{C}}$.

Für diese müssen die 5 Modellkategorie-Axiome erfüllt sein:

MC1. $\mathcal{C}$ ist endlich bivollständig.

Modellkategorien

Definition

Eine Modellkategorie ist eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit drei ausgewählten Klassen von Morphismen:

- schwache Äquivalenzen $W_{\mathcal{C}}$,
- Faserungen $\text{Fib}_{\mathcal{C}}$,
- Cofaserungen $\text{Cof}_{\mathcal{C}}$.

Für diese müssen die 5 Modellkategorie-Axiome erfüllt sein:

MC1. $\mathcal{C}$ ist endlich bivollständig.

MC2. (2 von 3) Seien f und g Morphismen sodass auch fg definiert ist. Wenn 2 von diesen eine schwache Äquivalenz ist, so trifft dies auch auf den dritten Morphismus zu.

Modellkategorien

Definition

Eine Modellkategorie ist eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit drei ausgewählten Klassen von Morphismen:

- schwache Äquivalenzen $W_{\mathcal{C}}$,
- Faserungen $\text{Fib}_{\mathcal{C}}$,
- Cofaserungen $\text{Cof}_{\mathcal{C}}$.

Für diese müssen die 5 Modellkategorie-Axiome erfüllt sein:

MC1. $\mathcal{C}$ ist endlich bivollständig.

MC2. (2 von 3) Seien f und g Morphismen sodass auch fg definiert ist. Wenn 2 von diesen eine schwache Äquivalenz ist, so trifft dies auch auf den dritten Morphismus zu.

MC3. Schwache Äquivalenzen, Faserungen und Cofaserungen sind abgeschlossen unter Retraktionen.

MC4.-MC5.

Definition

MC4. Sei das folgende kommutative Diagram gegeben:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ i \downarrow & \nearrow l & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

dann existiert ein Lifting l wenn entweder i eine Cofaserung ist und p eine azyklische Faserung oder i eine azyklische Cofaserung ist und p eine Faserung.

MC4.-MC5.

Definition

MC4. Sei das folgende kommutative Diagram gegeben:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ i \downarrow & \nearrow I & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

dann existiert ein Lifting l wenn entweder i eine Cofaserung ist und p eine azyklische Faserung oder i eine azyklische Cofaserung ist und p eine Faserung.

MC5. Jeder Morphismus f in $\mathcal{C}$ kann auf zwei Arten faktorisiert werden:

- 1 $f = pi$, wobei i eine Cofaserung ist und p eine azyklische Faserung
- 2 $f = pi$, wobei p eine Faserung ist und i eine azyklische Cofaserung.

Fasernde und Cofasernde Objekte

Definition

Ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ heißt:

- **fasernd**, wenn $X \rightarrow *$ eine Faserung ist;

Fasernde und Cofasernde Objekte

Definition

Ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ heißt:

- **fasernd**, wenn $X \rightarrow *$ eine Faserung ist;
- **cofasernd**, wenn $\emptyset \rightarrow X$ eine Cofaserung ist;

Fasernde und Cofasernde Objekte

Definition

Ein Objekt $X \in \mathcal{C}$ heißt:

- **fasernd**, wenn $X \rightarrow *$ eine Faserung ist;
- **cofasernd**, wenn $\emptyset \rightarrow X$ eine Cofaserung ist;
- **bifasernd**, wenn X sowohl fasernd als auch cofasernd ist.

Eindeutige Bestimmung der Modellstruktur

Proposition

Eine Modellstruktur wird durch die folgenden Daten eindeutig bestimmt:

- Cofaserungen und fasernde Objekte;
- Faserungen und cofasernde Objekte;
- Faserungen und Cofaserungen;
- Azyklische (Co)Faserungen

Eindeutige Bestimmung der Modellstruktur

Proposition

Eine Modellstruktur wird durch die folgenden Daten eindeutig bestimmt:

- Cofaserungen und fasernde Objekte;
- Faserungen und cofasernde Objekte;
- Faserungen und Cofaserungen;
- Azyklische (Co)Faserungen

Umgekehrt genügen die folgenden Angaben nicht, um eine Modellstruktur zu bestimmen:

- Schwache Äquivalenzen;
- (Co)fasernde Objekte und schwache Äquivalenzen;
- Fasernde und cofasernde Objekte.

Triviale Modellstruktur

Beispiel $(\mathcal{C}_{\text{triv}})$

Sei $\mathcal{C}$ eine (co)vollständige Kategorie (zB **Set**), dann ist eine Modellstruktur auf $\mathcal{C}$ gegeben durch:

- $W_{\mathcal{C}}$: die Isomorphismen,
- $\text{Fib}_{\mathcal{C}}$: jede Abbildung,
- $\text{Cof}_{\mathcal{C}}$: jede Abbildung.

Dann sind alle Objekte fasernd und bifasernd.

Modellstruktur auf **Top**

Beispiel (Die Quillen Modellstruktur)

Auf **Top** ist eine Modellstruktur **Top**_{Quillen} gegeben durch:

- $W_{\mathbf{Top}}$: die schwachen Homotopie-Äquivalenzen;
- $\text{Fib}_{\mathbf{Top}}$: die Serre-Faserungen;
- $\text{Cof}_{\mathbf{Top}}$: die Retraktionen der relativen Zellkomplexe.

Modellstrukturen auf **sSet**

Beispiel (Kan-Quillen Modellstruktur)

Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von simplizialen Mengen. Auf **sSet** ist eine kombinatorische Modellstruktur $\mathbf{sSet}_{\text{Kan}}$ gegeben durch:

- $W_{\mathbf{sSet}}$: f ist eine schwache Äquivalenz, wenn die zugehörige geometrische Realisierung eine schwache Äquivalenz in **Top** darstellt.
- $\text{Fib}_{\mathbf{sSet}}$: f ist eine Faserung, wenn f eine Kan-Faserung ist:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ \Delta^n & \longrightarrow & Y \end{array}$$

- $\text{Cof}_{\mathbf{sSet}}$: die Monomorphismen.

Die fasernden Objekte in $\mathbf{sSet}_{\text{Kan}}$ sind die Kan Komplexe.

Kan Komplexe

Definition

Ein Kan Komplex ist eine simpliziale Menge Y_S , welche folgende Eigenschaft erfüllt:

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \xrightarrow{\sigma_0} & Y_S \\ \downarrow & \nearrow e & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

i.e. für jede Abbildung $\sigma_0 : \Lambda_k^n \rightarrow Y_S$ existiert eine Extension e .

Modellstrukturen auf **sSet**

Beispiel (Joyal Modellstruktur)

Sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von simplizialen Mengen. Auf **sSet** ist eine links exakte kombinatorische Modellstruktur **sSet**_{Joyal} gegeben durch:

- $W_{\mathbf{sSet}}$: f ist eine schwache Äquivalenz, wenn f eine schwache kategorielle Äquivalenz ist;
- $\text{Fib}_{\mathbf{sSet}}$: f ist eine Faserung, wenn f die RLP in Bezug zu allen azyklischen Cofaserungen hat;
- $\text{Cof}_{\mathbf{sSet}}$: die Monomorphismen.

In dieser Modellstruktur sind die fasernden Objekte durch die Quasi-Kategorien gegeben.

Modellstrukturen auf **sSet**

Beispiel (Weitere interessante Modellstrukturen auf **sSet**)

- n -Beke Modellstruktur $\mathbf{sSet}_{\text{Beke}}^n$ (Cofaserungen sind nicht durch Monomorphismen bestimmt)

Modellstrukturen auf **sSet**

Beispiel (Weitere interessante Modellstrukturen auf **sSet**)

- n -Beke Modellstruktur $\mathbf{sSet}_{\text{Beke}}^n$ (Cofaserungen sind nicht durch Monomorphismen bestimmt)
- Minimale Cisinski Modell Struktur $\mathbf{sSet}_{\text{min}}$ (schwache Äquivalenzen bilden einen Localizer (hier generiert von $\emptyset$))

Modellstrukturen auf **sSet**

Beispiel (Weitere interessante Modellstrukturen auf **sSet**)

- n -Beke Modellstruktur **sSet**_{Beke} ^{n} (Cofaserungen sind nicht durch Monomorphismen bestimmt)
- Minimale Cisinski Modell Struktur **sSet**_{min} (schwache Äquivalenzen bilden einen Localizer (hier generiert von $\emptyset$))
- Konstruktive Kan-Quillen Modellstruktur **sSet**_{con} (Quillen-äquivalent zu **sSet**_{Kan}, Existenzbeweis ohne Auswahlaxiom und Satz vom ausgeschlossenen Dritten)

Quillen Adjunktion

Definition

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Modellkategorien. Ein Paar von adjungierten Funktoren:

$$F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : U \quad (3)$$

heißt **Quillen Adjunktion**, wenn die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

- F erhält Cofaserungen und azyklische Cofaserungen;
- U erhält Faserungen und azyklische Faserungen;
- F erhält Cofaserungen und U erhält Faserungen;
- F erhält azyklische Cofaserungen und U erhält azyklische Faserungen.

Kanonisches Beispiel

Beispiel ($\mathbf{sSet}_{\text{Kan}}$ und $\mathbf{Top}_{\text{Quillen}}$)

$$|-| : \mathbf{sSet}_{\text{Kan}} \xleftrightarrow{\sim} \mathbf{Top}_{\text{Quillen}} : S(-) \quad (4)$$

Simpliziale Mengen sind - bis auf Homotopie-Äquivalenz - ein kombinatorisches Modell für topologische Räume.

Homotopie Kategorien

Definition

Sei $\mathcal{C}$ eine Modellkategorie. Dann ist die zugehörige **Homotopie Kategorie** $\mathbf{h}\mathcal{C}$ (bis auf kategorielle Äquivalenz) definiert durch

- Objekte: die Objekte von $\mathcal{C}_{cf}$;
- Morphismen: die Homotopieklassen der Morphismen in $\mathcal{C}$.

Quillen Äquivalenz

Definition

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Modellkategorien, für welche eine Quillen Adjunktion existiert. Dann sind $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Quillen äquivalent wenn die abgeleitete Adjunktion

$$\mathbb{F} : h\mathcal{C} \rightleftarrows h\mathcal{D} : \mathbb{U} \quad (5)$$

eine kategorielle Äquivalenz darstellt.

"Grothendiecks" Homotopie Hypothese

Hypothese (Dimension ∞)

Es besteht eine Äquivalenz von ∞ -Kategorien

$$\Pi_{\infty} : \infty\mathbf{Type} \rightarrow \infty\mathbf{Gpd} \quad (6)$$

Sowohl $\infty\mathbf{Type}$ als auch $\infty\mathbf{Gpd}$ sind Beispiele für $(\infty, 1)$ -Kategorien.

(n, k) -Kategorien

Definition

Eine (strikte) (n, k) -Kategorie ist gegeben durch:

- Objekte;
- Morphismen;
- 2-Morphismen (Morphismen zwischen Morphismen);
- ...;
- n -Morphismen;

sowie passenden Compositionen und Identitäten. Des Weiteren müssen die i -Morphismen für alle $i > k$ invertierbar sein.

Beispiele

Beispiel

- $(0, 0)$ -Kategorien: Mengen;
- $(1, 0)$ -Kategorien: Groupoide;
- $(1, 1)$ -Kategorien: "normale" Kategorien.

$(\infty, 1)$ -Kategorien und Modellkategorien

- (I.) Viele Modellstrukturen haben die Homotopietheorie von $(\infty, 1)$ -Kategorien. Somit kann man Modelle der Homotopietheorie über die assoziierten Modellstrukturen vergleichen.

$(\infty, 1)$ -Kategorien und Modellkategorien

- (I.) Viele Modellstrukturen haben **die Homotopietheorie von $(\infty, 1)$ -Kategorien**. Somit kann man Modelle der Homotopietheorie über die assoziierten Modellstrukturen vergleichen.
- (II.) Zu jeder Modellstruktur (jeder Kategorie mit schwachen Äquivalenzen) kann man eine $(\infty, 1)$ -Kategorie assoziieren. Hierfür verwendet man die ***simpliciale Lokalisierung***.

$(\infty, 1)$ -Kategorien und Modellkategorien - (I.)

Definition (Modell einer $(\infty, 1)$ -Kategorie)

Sei $\mathcal{C}$ eine Modellkategorie. Dann ist $\mathcal{C}$ das Modell einer $(\infty, 1)$ -Kategorie, wenn es eine Quillen-Äquivalenz gibt, sodass:

$$\mathcal{C} \simeq \mathbf{sSet}_{\text{Joyal}}. \quad (7)$$

Wann ist eine gegebene Modellkategorie Modell einer $(\infty, 1)$ -Kategorie?

[**Bertrand Toën**: Vers une axiomatisation de la theorie des categories superieures]

$(\infty, 1)$ -Kategorien und Modellkategorien - (II.)

Lemma

Sei $\mathcal{C}$ eine Modellkategorie und $L^H(\mathcal{C}, W)$ die (über simpliziale Lokalisierung) assoziierte Quasi-Kategorie. Dann besteht eine kategorielle Äquivalenz zwischen $h\mathcal{C} \simeq hL^H(\mathcal{C}, W)$.

$(\infty, 1)$ -Kategorien und Modellkategorien - (II.)

Lemma

Sei $\mathcal{C}$ eine Modellkategorie und $L^H(\mathcal{C}, W)$ die (über **simpliciale Lokalisierung**) assoziierte Quasi-Kategorie. Dann besteht eine kategorielle Äquivalenz zwischen $h\mathcal{C} \simeq hL^H(\mathcal{C}, W)$.

Lemma

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Quillen äquivalente Modellkategorien. Dann besteht eine kategorielle Äquivalenz von $(\infty, 1)$ -Kategorien $L^H(\mathcal{C}, W) \simeq L^H(\mathcal{D}, W)$.

$(\infty, 1)$ -Kategorien und Modellkategorien - (II.)

Lemma

Sei $\mathcal{C}$ eine Modellkategorie und $L^H(\mathcal{C}, W)$ die (über **simpliciale Lokalisierung**) assoziierte Quasi-Kategorie. Dann besteht eine kategorielle Äquivalenz zwischen $h\mathcal{C} \simeq hL^H(\mathcal{C}, W)$.

Lemma

Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Quillen äquivalente Modellkategorien. Dann besteht eine kategorielle Äquivalenz von $(\infty, 1)$ -Kategorien $L^H(\mathcal{C}, W) \simeq L^H(\mathcal{D}, W)$.

In diesem Sinne sind Quillen-Äquivalenzen ein "Trick" um Äquivalenzen zwischen $(\infty, 1)$ -Kategorien zu erhalten.

Revisited

Hypothese (Dimension ∞)

Es besteht eine Äquivalenz von ∞ -Kategorien

$$\Pi_{\infty} : \infty\mathbf{Type} \rightarrow \infty\mathbf{Gpd} \quad (8)$$

Definition

∞ **Type** ist die ∞ -Kategorie von Homotopie-Typen gegeben durch:

- Objekte: CW Komplexe;
- 1-Morphismen: kontinuierliche Abbildungen;
- 2-Morphismen: Homotopien;
- 3-Morphismen: Homotopien zwischen Homotopien;
- 4-Morphismen: Homotopien zwischen Homotopien zwischen Homotopien;

Definition

∞ -Groupoid Ein ∞ -Groupoid ist eine $(\infty, 0)$ -Kategorie in der alle k -Morphismen Äquivalenzen sind.

Die ∞ -Groupoide bilden eine $(\infty, 1)$ -Kategorie: ∞ **Gpd**.

Definition

∞ -Groupoid Ein ∞ -Groupoid ist eine $(\infty, 0)$ -Kategorie in der alle k -Morphismen Äquivalenzen sind.

Die ∞ -Groupoide bilden eine $(\infty, 1)$ -Kategorie: ∞ **Gpd**.

"Geometrischer" Zugang zu höherer Kategorientheorie:

Definition von ∞ **Gpd** über **Kan Komplexe**.

Revisited

Hypothese (Dimension ∞)

Es besteht eine Äquivalenz von ∞ -Kategorien

$$\Pi_{\infty} : \infty\mathbf{Type} \rightarrow \infty\mathbf{Gpd} \quad (9)$$

Die Modellkategorie $\mathbf{Top}_{\text{Quillen}}$ liefert die $(\infty, 1)$ -Kategorie $\infty\mathbf{Type}$. Die Modellkategorie $\mathbf{sSet}_{\text{Kan}}$ liefert $\infty\mathbf{Gpd}$.

Revisited

Hypothese (Dimension ∞)

Es besteht eine Äquivalenz von ∞ -Kategorien

$$\Pi_{\infty} : \infty\mathbf{Type} \rightarrow \infty\mathbf{Gpd} \quad (9)$$

Die Modellkategorie $\mathbf{Top}_{\text{Quillen}}$ liefert die $(\infty, 1)$ -Kategorie $\infty\mathbf{Type}$. Die Modellkategorie $\mathbf{sSet}_{\text{Kan}}$ liefert $\infty\mathbf{Gpd}$.

Theorem

Die kombinatorische Homotopie-Theorie auf $\mathbf{sSet}$ ist äquivalent zu der "klassischen" Homotopie-Theorie der topologischen Räume.

Weiterführende Literatur zu $\infty\mathbf{Gpd}$

Grothendieck definierte $\infty\mathbf{Gpd}$ nicht über Kan Komplexe.

Globulare Kombinatorik: n -Pfeile zwischen jedem Paar von parallelen $n - 1$ -Pfeilen und Operationen.

Aktuelle Forschung zu Grothendiecks Definition:

Weiterführende Literatur zu $\infty\mathbf{Gpd}$

Grothendieck definierte $\infty\mathbf{Gpd}$ nicht über Kan Komplexe.

Globulare Kombinatorik: n -Pfeile zwischen jedem Paar von parallelen $n - 1$ -Pfeilen und Operationen.

Aktuelle Forschung zu Grothendiecks Definition:

- **Georges Maltsinotis:** Grothendieck ∞ -Groupoids, and still another Definition of ∞ -Categories

Weiterführende Literatur zu $\infty\mathbf{Gpd}$

Grothendieck definierte $\infty\mathbf{Gpd}$ nicht über Kan Komplexe.

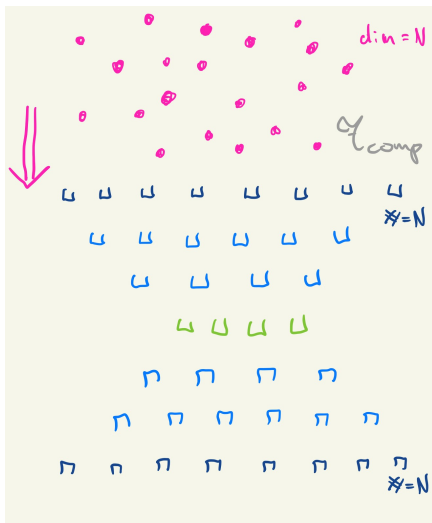
Globulare Kombinatorik: n -Pfeile zwischen jedem Paar von parallelen $n - 1$ -Pfeilen und Operationen.

Aktuelle Forschung zu Grothendiecks Definition:

- **Georges Maltsinotis:** Grothendieck ∞ -Groupoids, and still another Definition of ∞ -Categories
- **Dimitri Ara:** On the Homotopy Theory of Grothendieck ∞ -Groupoids

Von der Datenwolke zur Analyse

Homologie/Homotopie/Topologie



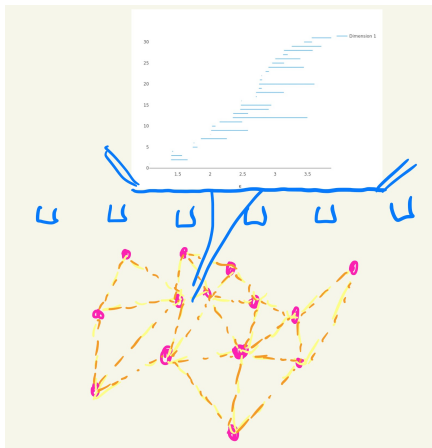
Von der Datenwolke zur Analyse

Homologie/Homotopie/Topologie



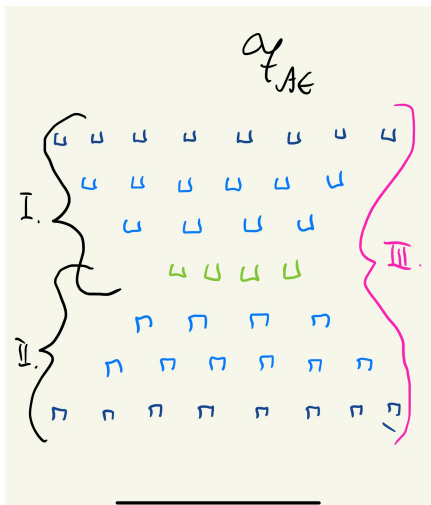
Von der Datenwolke zur Analyse

Homologie/Homotopie/Topologie



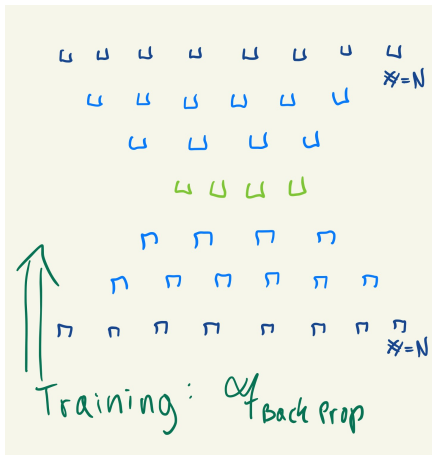
Von der Datenwolke zur Analyse

Homologie/Homotopie/Topologie



Von der Datenwolke zur Analyse

Homologie/Homotopie/Topologie



The (Co)End

