

Theoretische Physik 4 (Quantentheorie)

Sommersemester 2014

Lösungen zu Übungsblatt 2

Lösung 2.1: Matricelemente I

(a) Die n -te Eigenfunktion des harmonischen Oszillators ist gegeben durch

$$\phi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{n!}} ((a_+)^n \phi_0)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(-\frac{d}{d\xi} + \frac{1}{2}\xi \right)^n (2\pi)^{-1/4} e^{-\xi^2/4}. \quad (1)$$

Durch die Umskalierung $\xi = x/L$, $\psi_n(x) = L^{-1/2} \phi_n(x/L)$ mit $L = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}$ erhalten wir

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(-\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{d}{dx} + \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x \right)^n (2\pi)^{-1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right). \quad (2)$$

Diese Funktion ist ebenso wie $\phi_n(\xi)$ normiert, da

$$\int |\psi_n(x)|^2 dx = \frac{1}{L} \int |\phi_n(x/L)|^2 dx = \int |\phi_n(\xi)|^2 d\xi = 1. \quad (3)$$

(b) Es gelten

$$\langle \psi_m | x | \psi_n \rangle = \int \overline{\psi_m(x)} x \psi_n(x) dx = L \int \overline{\phi_m(\xi)} \xi \phi_n(\xi) d\xi = L \langle \phi_m | \xi \phi_n \rangle \quad (4)$$

und analog

$$\langle \psi_m | p | \psi_n \rangle = \frac{1}{L} \frac{\hbar}{i} \left\langle \phi_m \left| \frac{d}{d\xi} \phi_n \right. \right\rangle. \quad (5)$$

Es genügt daher die dimensionslosen Matricelemente mit den Funktionen ϕ_n zu berechnen. Hierzu drücken wir zunächst den Multiplikationsoperator mit ξ sowie den Ableitungsoperator ($d/d\xi$) mithilfe der Auf- und Absteigeoperatoren aus,

$$\xi = a_- + a_+ \quad (6)$$

$$\frac{d}{d\xi} = \frac{1}{2}(a_- - a_+) \quad (7)$$

Da die Wirkung der Operatoren $a_{\pm}$ auf die Eigenfunktionen ϕ_n besonders einfach ist, können wir wie folgt rechnen:

$$\langle \phi_m | \xi \phi_n \rangle = \langle \phi_m | (a_- + a_+) \phi_n \rangle \quad (8)$$

$$= \langle \phi_m | (\sqrt{n} \phi_{n-1} + \sqrt{n+1} \phi_{n+1}) \rangle \quad (9)$$

$$= \delta_{m,n-1} \sqrt{n} + \delta_{m,n+1} \sqrt{n+1}, \quad (10)$$

wobei wir verwendet haben, dass die Funktionen $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Orthonormalbasis bilden. Analog ergibt sich

$$\left\langle \phi_m \left| \frac{d}{d\xi} \phi_n \right. \right\rangle = \frac{1}{2} (\delta_{m,n-1} \sqrt{n} - \delta_{m,n+1} \sqrt{n+1}). \quad (11)$$

Wir haben somit gezeigt, dass

$$\langle \psi_m | x | \psi_n \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\delta_{m,n-1} \sqrt{n} + \delta_{m,n+1} \sqrt{n+1}), \quad (12)$$

$$\langle \psi_m | p | \psi_n \rangle = -i \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} (\delta_{m,n-1} \sqrt{n} - \delta_{m,n+1} \sqrt{n+1}). \quad (13)$$

(c) Analog zu (b) berechnen wir zunächst die dimensionslosen Matrixelemente:

$$\langle \phi_m | \xi^2 \phi_n \rangle = \langle \phi_m | (a_- + a_+)^2 \phi_n \rangle \quad (14)$$

$$= \langle \phi_m | [(a_-)^2 + a_- a_+ + a_+ a_- + (a_+)^2] \phi_n \rangle \quad (15)$$

$$= \delta_{m,n-2} \sqrt{n(n-1)} + \delta_{m,n} (2n+1) + \delta_{m,n+2} \sqrt{(n+1)(n+2)} \quad (16)$$

und

$$\left\langle \phi_m \left| \frac{d^2}{d\xi^2} \phi_n \right. \right\rangle = \frac{1}{4} (\delta_{m,n-2} \sqrt{n(n-1)} - \delta_{m,n} (2n+1) + \delta_{m,n+2} \sqrt{(n+1)(n+2)}). \quad (17)$$

Hieraus ergeben sich durch Umskalieren

$$\langle \psi_m | x^2 | \psi_n \rangle = L^2 \langle \phi_m | \xi^2 | \phi_n \rangle \quad (18)$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega} (\delta_{m,n-2} \sqrt{n(n-1)} + \delta_{m,n} (2n+1) + \delta_{m,n+2} \sqrt{(n+1)(n+2)}), \quad (19)$$

$$\langle \psi_m | p^2 | \psi_n \rangle = \frac{1}{L^2} \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \left\langle \phi_m \left| \frac{d^2}{d\xi^2} \phi_n \right. \right\rangle \quad (20)$$

$$= -\frac{\hbar m \omega}{2} (\delta_{m,n-2} \sqrt{n(n-1)} - \delta_{m,n} (2n+1) + \delta_{m,n+2} \sqrt{(n+1)(n+2)}). \quad (21)$$

Lösung 2.2: Matrixelemente II

(a) Es gilt $c_n = \langle \phi_n | \phi \rangle$.

(b) Für den Vektor $A\phi$ gilt

$$d_m = \langle \phi_m | A\phi \rangle = \left\langle \phi_m \left| A \left(\sum_{n=0}^N c_n \phi_n \right) \right. \right\rangle = \sum_{n=0}^N c_n \langle \phi_m | A\phi_n \rangle = \sum_{n=0}^N A_{mn} c_n, \quad (22)$$

wobei wir die Linearität von A verwendet haben.

(c) Für unendliche Reihen gilt analog

$$\langle \phi_m | A\phi \rangle = \left\langle \phi_m \left| A \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n \right) \right. \right\rangle \quad (23)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \left\langle \phi_m \left| \sum_{n=0}^{\infty} c_n A(\phi_n) \right. \right\rangle \quad (24)$$

$$\stackrel{(\circ)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \langle \phi_m | A\phi_n \rangle \quad (25)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \langle \phi_m | A\phi_n \rangle \langle \phi_n | \phi \rangle. \quad (26)$$

Im Schritt (*) haben wir verwendet, dass A stetig und linear ist:

$$A \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n \right) \equiv A \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N c_n \phi_n \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} A \left(\sum_{n=0}^N c_n \phi_n \right) \quad (27)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N c_n A(\phi_n) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n A(\phi_n). \quad (28)$$

Im Schritt (o) haben wir verwendet, dass die Abbildung $\psi \mapsto \langle \phi_m | \psi \rangle$ stetig und linear ist. Während die Linearität unmittelbar aus der Definition des Skalarprodukts folgt, lässt sich die Stetigkeit mithilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung beweisen: Sei ψ_N eine Folge, die für $N \rightarrow \infty$ bezüglich der Hilbertraum-Norm gegen ψ konvergiert,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\psi_N - \psi\| = 0. \quad (29)$$

Verwenden wir, dass

$$|\langle \phi_m | \psi_N \rangle - \langle \phi_m | \psi \rangle| = |\langle \phi_m | \psi_N - \psi \rangle| \leq \|\phi_m\| \cdot \|\psi_N - \psi\|, \quad (30)$$

so folgt auch

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\langle \phi_m | \psi_N \rangle - \langle \phi_m | \psi \rangle| = 0, \quad (31)$$

d.h. die Folge $\langle \phi_m | \psi_N \rangle$ konvergiert gegen $\langle \phi_m | \psi \rangle$, woraus die Behauptung folgt.

Lösung 2.3: Kohärente Zustände

(a) Es gilt

$$\langle v_\alpha | v_\beta \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle v_\alpha | \phi_n \rangle \langle \phi_n | v_\beta \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \right) \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\bar{\alpha}\beta)^n}{n!} = e^{\bar{\alpha}\beta}, \quad (32)$$

wobei wir verwendet haben, dass die Funktionen $\{\phi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Orthonormalbasis bilden.

(b) Aus (a) folgt insbesondere

$$||v_\alpha||^2 = \langle v_\alpha | v_\alpha \rangle = e^{|\alpha|^2}, \quad (33)$$

somit ist für $N_\alpha = e^{-|\alpha|^2/2}$ der Vektor $\kappa_\alpha = N_\alpha v_\alpha$ normiert,

$$||\kappa_\alpha||^2 = N_\alpha^2 ||v_\alpha||^2 = 1. \quad (34)$$

(c) Es gilt

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{d\bar{\alpha} d\alpha}{\pi} e^{-|\alpha|^2} v_\alpha \langle v_\alpha | \phi \rangle = \int_{\mathbb{C}} \frac{d\bar{\alpha} d\alpha}{\pi} e^{-|\alpha|^2} \sum_{n,m} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \phi_n \frac{\bar{\alpha}^m}{\sqrt{m!}} \langle \phi_m | \phi \rangle \quad (35)$$

$$= \sum_{n,m} \left(\int_{\mathbb{C}} \frac{d\bar{\alpha} d\alpha}{\pi} e^{-|\alpha|^2} \frac{\alpha^n \bar{\alpha}^m}{\sqrt{n!m!}} \right) \phi_n \langle \phi_m | \phi \rangle \quad (36)$$

$$\equiv \sum_{n,m} \mathcal{I}(n, m) \phi_n \langle \phi_m | \phi \rangle. \quad (37)$$

Das Integral $\mathcal{I}(n, m)$ ist definiert als ($\alpha = x + iy$)

$$\mathcal{I}(n, m) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-x^2-y^2} (x + iy)^n (x - iy)^m. \quad (38)$$

Durch Substitution mit den Polarkoordinaten $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, $dx dy = r dr d\phi$ ergibt sich

$$\mathcal{I}(n, m) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \int_0^{\infty} dr r^{1+n+m} e^{-r^2} \int_0^{2\pi} d\phi e^{i(n-m)\phi}. \quad (39)$$

Für das Winkelintegral sieht man leicht

$$\int_0^{2\pi} d\phi e^{i(n-m)\phi} = \delta_{nm} 2\pi, \quad (40)$$

somit erhalten wir

$$\mathcal{I}(n, m) = \delta_{nm} \frac{2}{n!} \int_0^{\infty} dr r^{1+2n} e^{-r^2}. \quad (41)$$

Die Substitution $t = r^2$, $dt = 2r dr$ führt weiter zu

$$\mathcal{I}(n, m) = \delta_{nm} \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} dt t^n e^{-t}. \quad (42)$$

Nun gilt mit der Gammafunktion Γ

$$\int_0^{\infty} dt t^n e^{-t} = \Gamma(n+1) = n!, \quad (43)$$

woraus folgt

$$\mathcal{I}(n, m) = \delta_{nm}. \quad (44)$$

Einsetzen in (37) liefert

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{d\bar{\alpha} d\alpha}{\pi} e^{-|\alpha|^2} v_{\alpha} \langle v_{\alpha} | \phi \rangle = \sum_n \phi_n \langle \phi_n | \phi \rangle = \phi, \quad (45)$$

was die Behauptung war.