

# Wie Muscheln sich in Schale werfen

## Die Projektidee

Jeder, der sich schon einmal eine Muschelschale oder ein Schneckenhaus näher angesehen hat, weiß, dass sich darauf unterschiedlichste Maserungen befinden. Kaum ein Muster gleicht dem anderen – und doch finden sich immer wieder ähnliche Formen und Grundstrukturen. Ist solch eine Struktur rein zufällig, lässt sie sich erklären oder gar mathematisch berechnen? In Kooperation mit dem Interdisziplinären Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen der Universität Heidelberg (IWR) gingen wir genau dieser Frage nach. Dabei bauten wir auf dem Buch »Wie Schnecken sich in Schale werfen« von Dr. Hans Meinhardt, das sich mit derselben Thematik beschäftigt, auf.

## Entstehung von Mustern auf Muscheln

Die Muschelschalen werden entlang einer Wachstumskante gebildet. Dabei sorgt ein sogenanntes **Aktivatorsubstrat** für die Bildung von Pigmenten, also Farbstoffen. Dass die Muschel dabei nicht ganz schwarz wird, verdankt sie einem oder mehreren **Inhibitoren**. Das sind Substrate, die den Abbau des Aktivators beschleunigen. So entsteht ein zyklischer Farbwechsel und damit ein Muster, das bestimmte Regelmäßigkeiten aufweist.

## Mathematisches Modell

Da der nächste Schritt der oben genannten Reaktion immer vom vorherigen abhängt, kann dieselbe nicht in Form einer mathematischen Funktion abgebildet werden – das heißt, dass das Muster nur schrittweise berechnet werden kann. Vorgänge dieser Art können durch Differentialgleichungen ausgedrückt werden. Um diese Gleichungen zu entwickeln, muss viel experimentiert und ausprobiert werden – was uns Hans Meinhardt glücklicherweise schon vorweggenommen hat.

## Berechnung der Muster

In unserem Modell gehen wir davon aus, dass die Wachstumskante eine Reihe von einzelnen Zellen ist. Jede Zelle besitzt eine bestimmte Konzentration der Substrate. Die Konzentrationen der vorherigen Zellen bestimmen die Konzentration der nachfolgenden. Durch Diffusion spielen auch die Konzentrationen in den benachbarten Zellen eine Rolle.



Es ist also notwendig, alle Konzentrationen in einer Art Tabelle festzuhalten. Mathematisch gesprochen verwenden wir hier eine Matrix – beziehungsweise mehrere, eine für jedes Substrat.

## Simulation und Darstellung

Da für die Berechnung viele kleine Schritte notwendig sind, wird sie schnell sehr aufwendig. Die Berechnung eines Schrittes läuft aber immer nach demselben Prinzip ab, was die Aufgabe ideal für einen Computer macht.

Die Mathematik-Software MATLAB (*Matrix Laboratory*) wurde speziell für effiziente Rechnungen mit Matrizen entwickelt, weshalb sie sich für unseren Anwendungsfall geradezu anbietet. Den-

noch stellte das Umformulieren der Differentialgleichungen in MATLAB-Syntax für uns eine nicht unerhebliche Herausforderung dar. Nachfolgend sind zuerst die Differentialgleichungen in Euler-Schreibweise zu sehen, darunter ein Ausschnitt aus unserem MATLAB-Code, der dieselben berechnet.

$$\begin{aligned} \dot{a}_i &= b_0 a_i - b_1 a_i^2 + b_2 \left( \frac{a_i - a_{i-1}}{\Delta x} \right) - r_a a_i = D_a \frac{\partial^2 a_i}{\partial x^2} \\ \dot{b}_i &= b_0 b_i - b_1 b_i^2 + b_2 \left( \frac{b_i - b_{i-1}}{\Delta x} \right) + r_a a_i = D_b \frac{\partial^2 b_i}{\partial x^2} \\ \dot{c}_i &= r_c a_i - r_c c_i = D_c \frac{\partial^2 c_i}{\partial x^2} \end{aligned}$$



## Beispiel für ein berechnetes Muster

Im Vordergrund sind die Differentialgleichungen zu erkennen, die für die Berechnung der drei Substrate  $a$ ,  $b$  und  $c$  verwendet wurden.  $s$  als geringfügig schwankender Wert bezeichnet die Aufnahmefähigkeit der jeweiligen Zelle für Substrate,  $b_{a-c}$  die Auf- und Abbauraten der Stoffe.  $s_a$  ist eine Konstante zur Modellierung der natürlichen Sättigung, da der Aktivator nicht ins Unermessliche wachsen kann. Zuletzt wird in den Gleichungen die Diffusion zwischen benachbarten Zellen modelliert.

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= s \cdot \frac{b_0 + b_1 a^2}{1 + s_a a^2 + s_c c} - r_a a + D_a \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \\ \frac{db}{dt} &= b_0 - s \cdot \frac{b_0 + b_1 b^2}{1 + s_a a^2 + s_c c} + D_b \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \\ \frac{dc}{dt} &= r_c a - r_c c + D_c \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \end{aligned}$$

## Fazit und dankende Worte

Mit den vorgestellten Methoden können nicht nur Muster auf Muschelschalen modelliert werden, sondern auch viele andere biologische Prozesse, die auf Stoffaustausch basieren.

Wir bedanken uns sehr herzlich bei Andreas Potschka vom IWR für die kompetente fachliche Betreuung, bei Dr. Hans Meinhardt für das aufschluss- und ideenreiche Buch »Wie Schnecken sich in Schale werfen« sowie beim Hector-Seminar und insbesondere bei Frau Vera Körkel für die Betreuung und die Organisation der Kooperationsphase.