

Analysis I

Yichuan Shen

14. Oktober 2011

Kapitel 1

Mengen

Definition 1.1 (*Menge*) Eine Menge M ist eine Zusammenfassung von wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung und unseres Denkens, die *Elemente von M* genannt werden. Ist x ein Element von M , so schreiben wir $x \in M$. Ist x kein Element von M , so schreiben wir $x \notin M$.

Schreibweise

$$\begin{aligned} M &= \{x, y, z, \dots\} && \text{(aufzählend)} \\ M &= \{x \mid x \text{ hat Eigenschaft } A\} \end{aligned}$$

Beachte

$$\{x, y, z\} = \{z, y, x\} = \dots \text{ usw.}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} A &= \{3, 4, 9\} && 5 \notin A, 3 \in A \\ B &= \{x \mid (x-2)(x-5) = 0\} = \{2, 5\} \\ C &= \{x \mid x \text{ ist prim}\} \end{aligned}$$

Definition 1.2 Für Mengen A, B heißt A Teilmenge von B ($A \subset B$) $:\Leftrightarrow$

$$x \in A \Rightarrow x \in B$$

Wir nennen die Mengen A und B gleich oder identisch $:\Leftrightarrow$

$$A \subset B \text{ und } B \subset A$$

- A heißt nichtleer $:\Leftrightarrow \exists x \in A$
- A heißt leer oder die leere Menge ($A = \emptyset$) $:\Leftrightarrow A$ ist nicht nichtleer $\Leftrightarrow \forall x : x \notin A$

Die Menge $\mathcal{P}(A) := \{M \mid M \subset A\}$ heißt *Potenzmenge von A* .

Folgerung 1.3

- (i) $\emptyset \subset A$
- (ii) $A \subset A$
- (iii) $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$

Beweis Wäre (i) falsch $\Rightarrow \exists x \in \emptyset$ mit $x \notin A \Rightarrow$ Widerspruch, da $\nexists x \in \emptyset$

(ii) $x \in A \Rightarrow x \in A \Rightarrow A \subset A$

(iii) $x \in A \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in C \Rightarrow A \subset C$

□

Beispiel 1.4 A ist eine echte Teilmenge von B ($A \subsetneq B$) $:\Leftrightarrow$

$$A \subset B, A \neq B$$

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{0, 1, 2, 3\} \Rightarrow A \subsetneq B$$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \dots\}$$

Definition 1.5 A, B, X seien Mengen.

- $A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$ (Durchschnitt von A und B)
- $A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$ (Vereinigung von A und B)
- $A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$ (Mengentheoretische Differenz)

Ist $A \subset X$, so heißt $A^c := X \setminus A$ das Komplement von A bezüglich X .

Schreibweise 1.6 Sei F ein System von Mengen.

$$\bigcap_{M \in F} M := \{x \mid x \in M, \forall M \in F\}$$

$$\bigcup_{M \in F} M := \{x \mid x \in M, \exists M \in F\}$$

Satz 1.7 $A, B, C \subset M$ seien Mengen; das Komplement werde bezüglich M gebildet.

- (i) $A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$
 $A \cup A^c = M, \quad A \cap A^c = \emptyset$
- (ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- (iii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- (iv) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Beweis

(i)

$$\begin{aligned} x \in A \cup \emptyset &\Rightarrow x \in A \text{ oder } x \in \emptyset \\ &\Rightarrow x \in A \Rightarrow A \cup \emptyset \subset A \Rightarrow A = A \cup \emptyset \end{aligned}$$

Alle anderen Fälle gehen analog.

(ii)

$$\begin{aligned}x \in A \cup (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \text{ oder } x \in B \cup C \\&\Leftrightarrow x \in A \text{ oder } (x \in B \text{ oder } x \in C) \\&\Leftrightarrow (x \in A \text{ oder } x \in B) \text{ oder } x \in C \\&\Leftrightarrow x \in A \cup B \text{ oder } x \in C \\&\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C\end{aligned}$$

Der andere Fall geht analog.

(iii) Seien $L = A \cup (B \cap C)$, $R = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Zu zeigen: $L \subset R$ und $R \subset L$ ($\Rightarrow L = R$)

I. „ $L \subset R$ “: Sei $x \in L = A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in A$ oder $x \in B \cap C$

• Fall 1:

$$\begin{aligned}x \in A &\Rightarrow x \in A \cup B \text{ und } x \in A \cup C \\&\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) = R\end{aligned}$$

• Fall 2:

$$\begin{aligned}x \in B \text{ und } x \in C &\Rightarrow x \in A \cup B \text{ und } x \in A \cup C \\&\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) = R\end{aligned}$$

$$\Rightarrow L \subset R$$

II. „ $R \subset L$ “: Sei $x \in R \Rightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C \Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$

• Fall 1: $x \in A \cup (B \cap C) = L$

• Fall 2:

$$\begin{aligned}x \in A &\Rightarrow x \in B \text{ und } x \in C \\&\Rightarrow x \in B \cap C \\&\Rightarrow x \in A \cup (B \cap C) = L\end{aligned}$$

$$\Rightarrow R \subset L$$

(iv) Seien $L = (A \cup B)^c$, $R = A^c \cap B^c$.

I. „ $L \subset R$ “:

$$\begin{aligned}\text{Sei } x \in L &= (A \cup B)^c = M \setminus (A \cup B) \\&\Rightarrow x \in M \text{ und } x \notin A \cup B \\&\Rightarrow x \in M \text{ und } (x \notin A \text{ und } x \notin B) \\&\Rightarrow (x \in M \text{ und } x \notin A) \text{ und } (x \in M \text{ und } x \notin B) \\&\Rightarrow x \in M \setminus A \text{ und } x \in M \setminus B \\&\Rightarrow x \in A^c \cap B^c\end{aligned}$$

II. „ $R \subset L$ “:

$$\begin{aligned}\text{Sei } x \in R &= A^c \cap B^c \\&\Rightarrow x \in A^c \text{ und } x \in B^c \\&\Rightarrow (x \in M \text{ und } x \notin A) \text{ und } (x \in M \text{ und } x \notin B) \\&\Rightarrow x \in M \text{ und } (x \notin A \text{ und } x \notin B) \\&\Rightarrow x \in M \setminus (A \cup B) = L\end{aligned}$$

□